揺動 Wilberforce 振子の壁面からの励振の基礎解析

中道 義之[*1*2] 舟田 敏雄[*2*3] 大庭 勝久[*2*3] 川上 誠[*2*3] 宮内 太積[*2*4] 望月 孔二[*2*5]

Fundamental Analysis of a Swinging Wilberforce Pendulum with Parametric Excitation from a Wall

Yoshiyuki NAKAMICHI[*1*2] Toshio FUNADA[*2*3] Katsuhisa OOBA[*2*3] Makoto KAWAKAMI[*2*3]
Tatsumi MIYAUCHI[*2*4] and Kouji MOCHIZUKI[*2*5]

Abstract: In view of various types of pendulums provided at foreign universities and colleges, some representative education materials are reexamined to show fundamental mechanical phenomena and to step up to higher level of PBL (Problem Based Learning) resources. As one of such typical pendulums, Wilberforce pendulum is taken up here, whose longitudinal and torsional modes of oscillation are known to arise from the nature of coil spring and may give rise to near resonance. The pendulum is allowed to swing in a vertical plane to lead the system to three degrees of freedom. Nonlinear free oscillation is simulated at near resonance and near the critical. It is found that initial values of the swinging causes the coupling oscillation among the three oscillation modes and the near resonance occurs in the three modes.

Keywords: Wilberforce Pendulum, Longitudinal and Torsional Mode of Oscillation, Coupling Oscillation, Near Resonance

1 はじめに

Wilberforce 振子[1]に用いられるコイルバネでは，素線をヘリカルに巻いてあるので，伸縮と捩れによる連成振動が起こる．この振子は，連成振動系の代表例の一つとして振子教材 list[2] にも挙げられており，幾つかの実験解説書や研究報告[3]–[12] がある．特に，Hughey[13] は共振 (resonance) について理論的実験的検証を行っており，共振と準共振 (near resonance，あるいは近共振) について考察している．この現象は伸縮と捩れの結合バネ定数 ϵ が小さいときに起こり，$\epsilon \to 0$ の極限が共振点になる．

本研究では，準共振を区別する視点から，振子教材の充実・整備のために，Wilberforce 振子の基礎運動解析[14]、揺動 Wilberforce 振子の運動[15] を解明して来た。それらに続き、本報告では、Wilberforce 振子が揺動し壁面から励振される場合の連成振動を解析する．これは Wilberforce 振子の拡張であるが、視点を変えれば、単振子の運動の拡張として、支持点が励振される場合からの拡張にもなっている。その問題は、線形/非線形の Mathieu 方程式で記述され、先行研究[16]–[22] がある。先ず、北川の研究[16],[17] では、非線形化 Mathieu 方程式:

$$\ddot{\theta}+\gamma\dot{\theta}+\left(1+\theta^2+\Gamma\sin(2\omega_0 t)\right]\theta=F\sin(\omega t) \tag{1.1}$$

が数値解析されている。壁面からの励振の問題における θ 方向の運動方程式は、ブランコの励振の問題と類似しており、「パラメトリック振り子」[23] では、次の方程式が数値解析されている:

$$\ddot{\theta}+c\dot{\theta}+[1+p\sin(\omega t)]\sin(\theta)=0 \tag{1.2}$$

また、先の報告[24] では、次の方程式の数値解析により、カオス的振舞が観察された:

$$\ddot{\theta}+(p-2q\cos(2t)]\sin(\theta)=0 \tag{1.3}$$

さらに、吉武等[18]–[22] は、フラフープの運動記述する方程式として、次の 2 つの非線形化 Mathieu 方程式:

$$\ddot{\theta}+\gamma\dot{\theta}+\delta\cos(t)\sin(\theta)=0, \tag{1.4}$$

$$\ddot{\theta}+\gamma\dot{\theta}+\left[\beta^2+\delta\cos(t)\right]\sin(\theta)=0 \tag{1.5}$$

を数値解析している。以上は、後に見るように、本報告で数値解析する方程式に関連する。

本報告では、励振による揺動 Wilberforce 振子の振動を記述する Lagrange 関数を導き，運動方程式を求め、その初期値問題を数値解析し、線形・非線形振動特性を調べる．

2 揺動 Wilberforce 振子の壁面からの励振解析

Fig.1 に示すように，壁面上の原点から水平方向に x 軸、鉛直下方を z 軸とするデカルト座標系 (x,z) を取り、平面極座標系 (r,θ) を併用して，壁面から吊り下げられた自然長 r_0 で伸縮のバネ定数 k_1 の線形バネの下端に取り付けられた質量 m_1 の物体 (錘) の質量中心までの距離を $r_1\equiv r_1(t)$ (t: 時間) と表し，鉛直軸から測るバネの傾き角を $\theta_1\equiv\theta_1(t)$ と表す．線形バネの捩りのバネ定数を δ とし，バネの捩れ角を $\psi_1\equiv\psi_1(t)$ と表し、バネの伸縮と捩れの結合バネ定数を ϵ とする．錘は、質量 m_1 で捩れの慣性 moment J_1 を持ち、鉛直面内で r 方向に伸縮運動し、θ 方向に揺動 (swing) し、ψ 方向に捩れ振動する．錘の座標 (x_p,z_p) は，支持点 (x_0,z_0) を時間の既知関数とし壁面か

[*1] 総合情報センター: Information Technology Center.
[*2] 専攻科: Advanced Engineering Course.
[*3] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
[*4] 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.
[*5] 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.

ら水平・鉛直・鉛直面内での回転励振が可能であり、一般的に、次のように表される:

$$x_p = x_0 + r_1 \sin(\theta_1),\ \ z_p = z_0 + r_1 \cos(\theta_1) \tag{2.1}$$

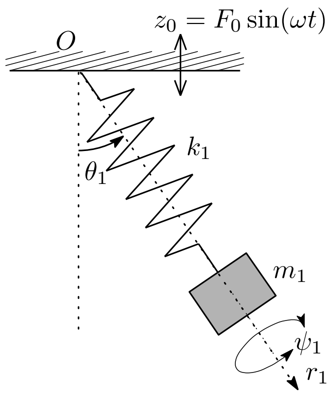


Fig.1 Swinging Wilberforce pendulum with horizontal or vertical 1D excitation or vertically rotational 2D excitation.

(2.1) 式により、壁面から励振される揺動 Wilberforce 振子の運動は，Lagrange 関数 $\mathcal{L}_2$ で記述される:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 =& \frac{m_1}{2}\left(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}_1^2\right) + m_1\dot{r}_1\left(\dot{x}_0\sin(\theta_1) + \dot{z}_0\cos(\theta_1)\right)\\ &+\frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_0^2+\dot{z}_0^2\right) + m_1 r_1\left(\dot{x}_0\cos(\theta_1) - \dot{z}_0\sin(\theta_1)\right)\dot{\theta}_1\\ &+\frac{J_1}{2}\dot{\psi}_1^2 - \frac{k_1}{2}\left(r_1 - r_0\right)^2 - \frac{\delta}{2}\psi_1^2 - \frac{\epsilon}{2}\left(r_1 - r_0\right)\psi_1\\ &+m_1 g\left[r_1\left(\cos(\theta_1) - 1\right) + z_0\right]\end{aligned} \tag{2.2}$$

これにより，Lagrange の運動方程式は，次式となる:

$$m_1\ddot{r}_1 + k_1\left(r_1 - r_0\right) + \frac{\epsilon}{2}\psi_1 - m_1 g\left(\cos(\theta_1) - 1\right) + m_1\left(\ddot{x}_0\sin(\theta_1) + \ddot{z}_0\cos(\theta_1) - r_1\dot{\theta}_1^2\right) = 0, \tag{2.3}$$

$$m_1 r_1^2\ddot{\theta}_1 + m_1 r_1 g\sin(\theta_1) + 2m_1 r_1\dot{r}_1\dot{\theta}_1 + m_1 r_1\left(\ddot{x}_0\cos(\theta_1) - \ddot{z}_0\sin(\theta_1)\right) = 0, \tag{2.4}$$

$$J_1\ddot{\psi}_1 + \delta\psi_1 + \frac{\epsilon}{2}\left(r_1 - r_0\right) = 0 \tag{2.5}$$

壁面からの周期的励振は、水平励振、鉛直励振、鉛直面内での回転励振が可能であり、各場合の運動方程式を次に示す。

水平励振の場合，支持点 (x_0, z_0) の振動は次式で表される:

$$x_0 = X_0\sin(\omega t),\ \ z_0 = 0 \tag{2.6}$$

これにより，Lagrange の運動方程式は，次のように表される：

$$m_1\ddot{r}_1 + k_1\left(r_1 - r_0\right) + \frac{\epsilon}{2}\psi_1 - m_1 g\left(\cos(\theta_1) - 1\right) - m_1\left(X_0\omega^2\sin(\omega t)\sin(\theta_1) + r_1\dot{\theta}_1^2\right) = 0, \tag{2.7}$$

$$m_1 r_1^2\ddot{\theta}_1 + m_1 r_1 g\sin(\theta_1) + m_1 r_1\left(-X_0\omega^2\cos(\theta_1)\sin(\omega t) + 2\dot{r}_1\dot{\theta}_1\right) = 0, \tag{2.8}$$

$$J_1\ddot{\psi}_1 + \delta\psi_1 + \frac{\epsilon}{2}\left(r_1 - r_0\right) = 0 \tag{2.9}$$

鉛直励振の場合，支持点 (x_0, z_0) の振動は次式で表される:

$$x_0 = 0,\ \ z_0 = Z_0\cos(\omega t) \tag{2.10}$$

これにより，Lagrange の運動方程式は，次のように表される：

$$m_1\ddot{r}_1 + k_1\left(r_1 - r_0\right) + \frac{\epsilon}{2}\psi_1 - m_1 g\left(\cos(\theta_1) - 1\right) - m_1\left[+Z_0\omega^2\cos(\omega t)\cos(\theta_1) + r_1\dot{\theta}_1^2\right] = 0, \tag{2.11}$$

$$m_1 r_1^2\ddot{\theta}_1 + m_1 r_1 g\sin(\theta_1) + m_1 r_1\left(Z_0\omega^2\cos(\omega t)\sin(\theta_1) + 2\dot{r}_1\dot{\theta}_1\right) = 0, \tag{2.12}$$

$$J_1\ddot{\psi}_1 + \delta\psi_1 + \frac{\epsilon}{2}\left(r_1 - r_0\right) = 0 \tag{2.13}$$

鉛直面内の回転励振の場合，支持点 (x_0, z_0) の振動は次式で表される:

$$x_0 = R_0\sin(\omega t),\ \ z_0 = R_0\cos(\omega t) \tag{2.14}$$

これにより，Lagrange の運動方程式は，次のように表される：

$$m_1\ddot{r}_1 + k_1\left(r_1 - r_0\right) + \frac{\epsilon}{2}\psi_1 - m_1 g\left(\cos(\theta_1) - 1\right) - m_1\left(R_0\omega^2\cos(\omega t - \theta_1) + r_1\dot{\theta}_1^2\right) = 0, \tag{2.15}$$

$$m_1 r_1^2\ddot{\theta}_1 + m_1 r_1 g\sin(\theta_1) + m_1 r_1\left(-R_0\omega^2\sin(\omega t - \theta_1) + 2\dot{r}_1\dot{\theta}_1\right) = 0, \tag{2.16}$$

$$J_1\ddot{\psi}_1 + \delta\psi_1 + \frac{\epsilon}{2}\left(r_1 - r_0\right) = 0 \tag{2.17}$$

3 揺動 Wilberforce 振子の壁面からの励振の数値解析

Wilberforce 振子の規定値を $g = 1$, $m_1 = 1$, $J_1 = 1$, $k_1 = 1$, $\delta = 1$, $\epsilon = 0.1$, $r_0 = 1$, $X_0 = 1$, $\omega = 1$ とおく．微分方程式系 (2.7), (2.8), (2.9) 式の初期値を $r_1(0) = 1$, $\dot{r}_1(0) = 0$, $\theta_1(0) = 0$, $\dot{\theta}_1(0) = 0$, $\psi_1(0) = 0$, $\dot{\psi}_1(0) = 0$ と設定して，(2.7), (2.8), (2.9) 式を時間 $0 \le t \le t_e$ ($t_e = 2\pi \times 22$) で数値積分した結果を **Fig.2a-2i** に示す．

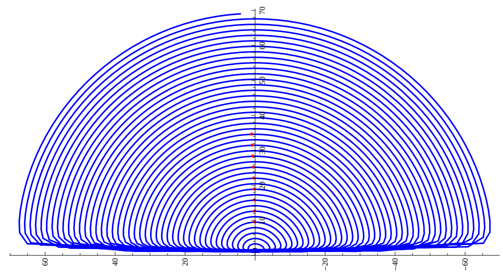


Fig.2a Phase portrait of $(r_1, \dot{r}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

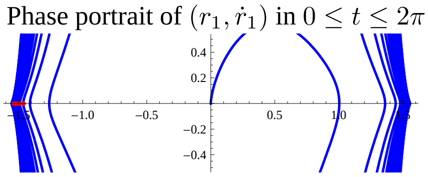


Fig.2b Phase portrait of $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

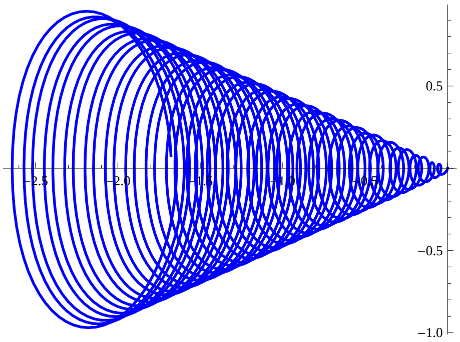


Fig.2c Phase portrait of $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

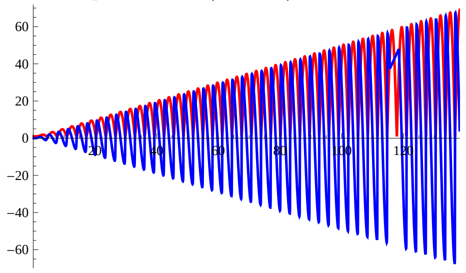


Fig.2d Time sequence of $r_1(t)$ and $\dot{r}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

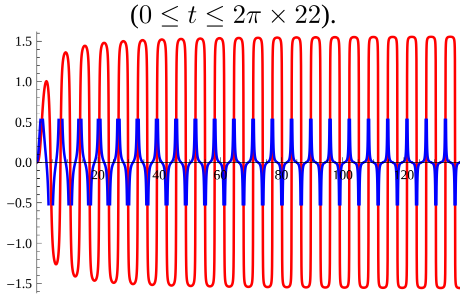


Fig.2e Time sequence of $\theta_1(t)$ and $\dot{\theta}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

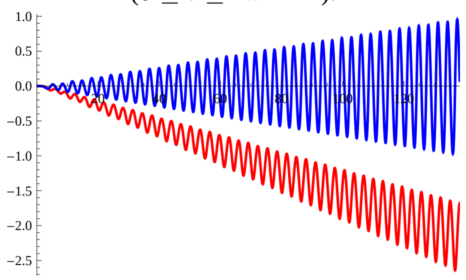


Fig.2f Time sequence of $\psi_1(t)$ and $\dot{\psi}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

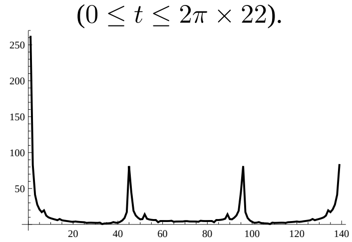


Fig.2g Spectrum of $r_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

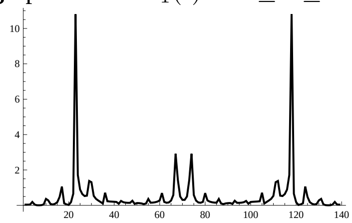


Fig.2h Spectrum of $\theta_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

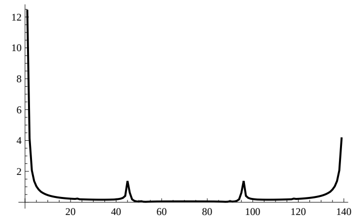


Fig.2i Spectrum of $\psi_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

SessionTime[] 73.8281250

Wilberforce 振子の規定値を $g = 1$, $m_1 = 1$, $J_1 = 1$, $k_1 = 1$, $\delta = 1$, $\epsilon = 0.1$, $r_0 = 1$, $Z_0 = 0.1$, $\omega = 1$ とおく．微分方程式系 (2.11), (2.12), (2.13) 式の初期値を $r_1(0) = 1$, $\dot{r}_1(0) = 0$, $\theta_1(0) = 0$, $\dot{\theta}_1(0) = 0$, $\psi_1(0) = 0$, $\dot{\psi}_1(0) = 0$ と設定して，(2.11), (2.12), (2.13) 式を時間 $0 \le t \le t_e$ $(t_e = 2\pi \times 22)$ で数値積分した結果を **Fig.3a-3i** に示す.

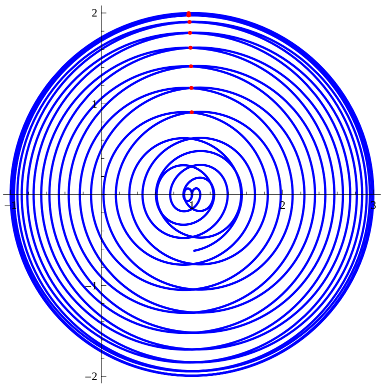


Fig.3a Phase portrait of $(r_1, \dot{r}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

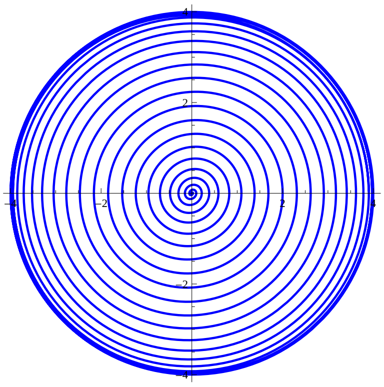


Fig.3c Phase portrait of $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

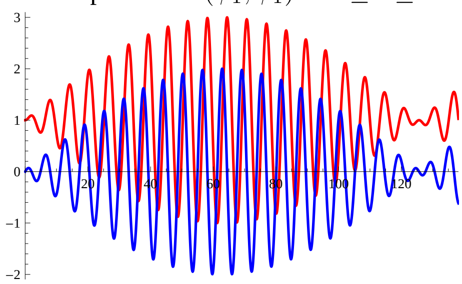


Fig.3d Time sequence of $r_1(t)$ and $\dot{r}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

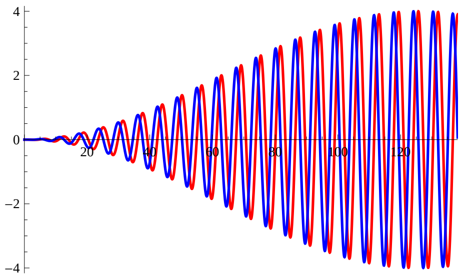


Fig.3f Time sequence of $\psi_1(t)$ and $\dot{\psi}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

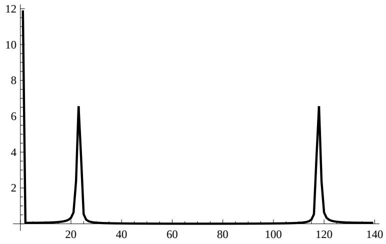


Fig.3g Spectrum of $r_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

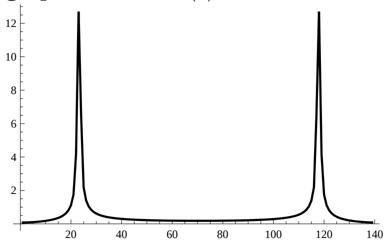


Fig.3i Spectrum of $\psi_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

SessionTime[] 13.8593750

Wilberforce 振子の規定値を $g = 1$, $m_1 = 1$, $J_1 = 1$, $k_1 = 1$, $\delta = 1$, $\epsilon = 0.1$, $r_0 = 1$, $R_0 = 0.01$, $\omega = 1$ とおく．微分方程式系 (2.15),(2.16),(2.17) 式の初期値を $r_1(0) = 1$, $\dot{r}_1(0) = 0$, $\theta_1(0) = 0$, $\dot{\theta}_1(0) = 0$, $\psi_1(0) = 0$, $\dot{\psi}_1(0) = 0$ と設定して，(2.15),(2.16),(2.17) 式を時間 $0 \le t \le t_e$ $(t_e = 2\pi \times 22)$ で数値積分した結果を **Fig.4a-4i** に示す．

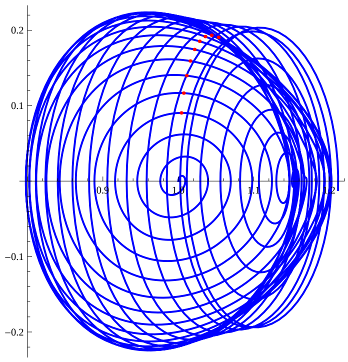


Fig.4a Phase portrait of $(r_1, \dot{r}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

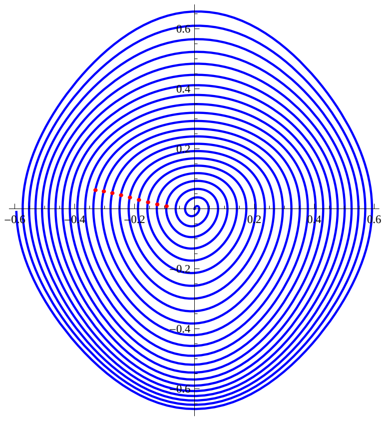


Fig.4b Phase portrait of $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

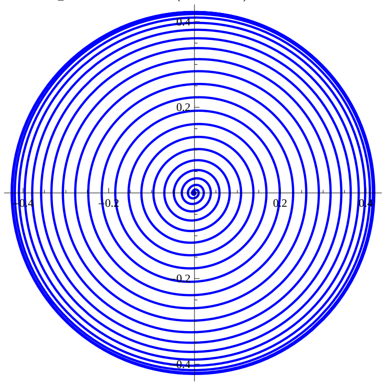


Fig.4c Phase portrait of $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

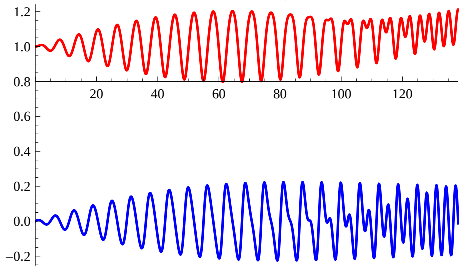


Fig.4d Time sequence of $r_1(t)$ and $\dot{r}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

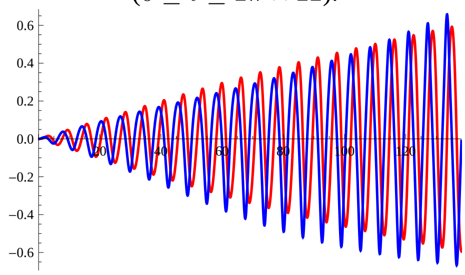


Fig.4e Time sequence of $\theta_1(t)$ and $\dot{\theta}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

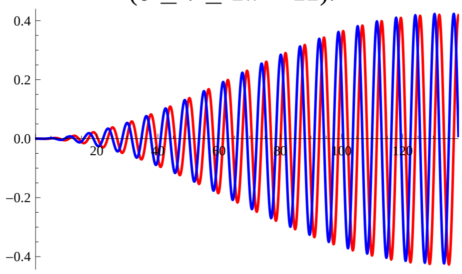


Fig.4f Time sequence of $\psi_1(t)$ and $\dot{\psi}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

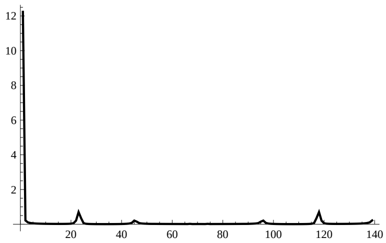


Fig.4g Spectrum of $r_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

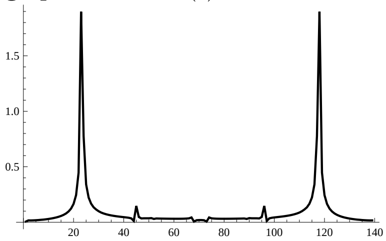


Fig.4h Spectrum of $\theta_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

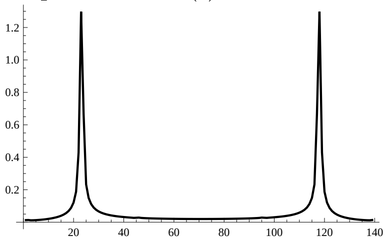


Fig.4i Spectrum of $\psi_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

SessionTime[] 14.9531250

4 θ 方向の運動方程式の励振によるカオス解

$t_s = 2\pi \times 20$, $t_e = 2\pi \times 121$, $\theta_1(0) = 0.1$, $\dot{\theta}_1(0) = 0$
$F_1 = 0.001$ から $F_1 = F1 + 0.002$ $F_1 < 1$

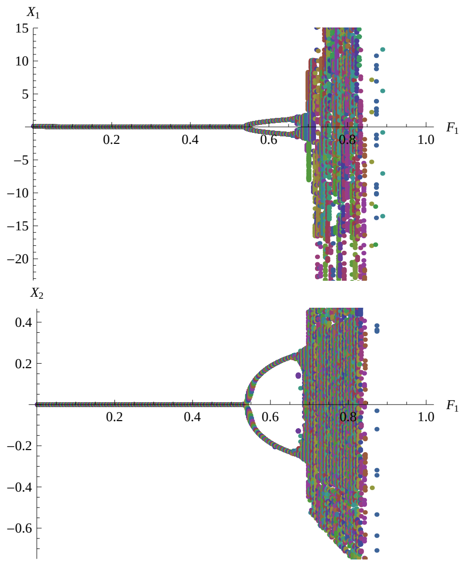
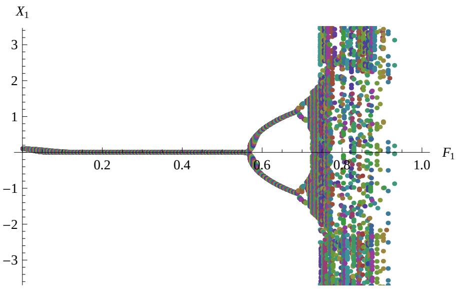


Fig.5a Time sequence. $c_2 = 0.3$



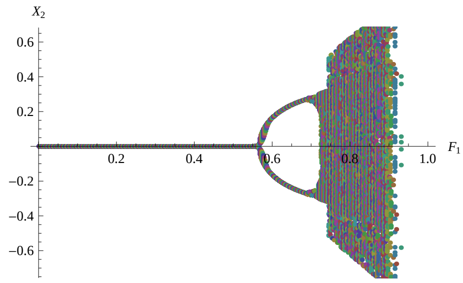


Fig.5b Time sequence. $c_2 = 0.35$

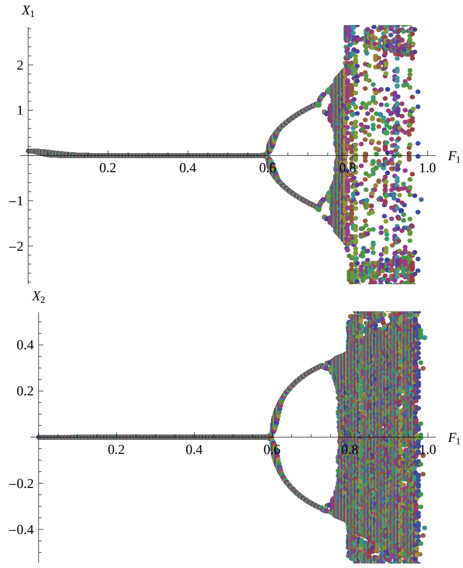


Fig.5c Time sequence. $c_2 = 0.4$

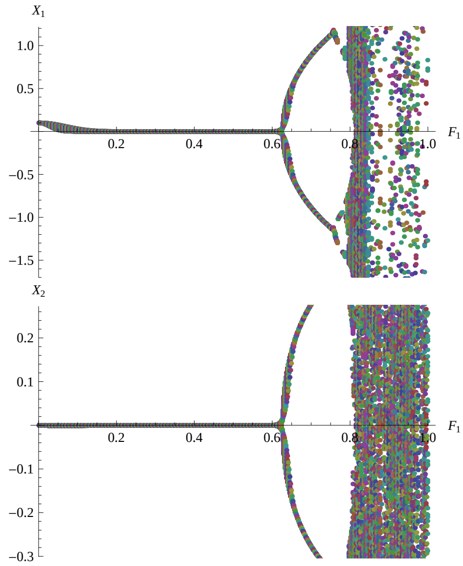


Fig.5f Time sequence. $c_2 = 0.44$

5 おわりに

本報告では，Wilberforce 振子の基礎解析を行い，代表的な場合について数値解析を行った．系の規定値を代表的な値に設定したときのバネの伸縮と捩れの結合バネ定数 ϵ が小さいときに準共振が起こる．系の規定値を設定すると，$\epsilon \sim 0$ は $\omega_1 \sim \omega_2$ の準共振を表すが，$\epsilon \to 0$ では 2 つの振動 mode は独立になる．臨界点 $\epsilon = 2\sqrt{m_1 J_1} = 2$ では $\omega_2 = 0$ となり，系は ω_1 で振動する．$\epsilon > 2$ では系は不安定になる．以上のように，ϵ による振動の型の変化と特徴を詳しく解説した．

先行の実験解説書や研究報告[3]–[12] には Wilberforce 振子の実験的理論的解説があり，諸国の高等教育での教材整備が見られる．しかし，Wilberforce 振子を拡張して，様々な振動問題を解説する取組は意外に少ないようである．先の Wilberforce 振子が揺動する場合の解析[15] と本報告に続き，外力と減衰効果[25] に取組む．また，準共振に関して，線形振動 model と非線形振動 model を解析して，別途報告する[26]．なお，準共振の研究報告の調査検討は，引き続き行う．

本研究遂行にあたり，本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して，柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] G. Torzo: “The Wilberforce pendulum: a complete analysis through RTL and modelling” Proceeding Int. GIREP Sem., Udine, September 2003 http://www.padova.infm.it/torzo/WilberGIREP.pdf

[2] C. Gauld: “Pendulums in Physics Education” http://www.arts.unsw.edu.au/pendulum/gauldBibliography.pdf

[3] R.E. Berg & T.S. Marshall: “Wilberforce pendulum oscillations and normal modes” *Am. J. Phys.* **59** (1991), pp.32-38. http://faraday.physics.utoronto.ca/PHY182S/WilberforceRefBerg.pdf http://faraday.physics.utoronto.ca/PHY182S/WilberforcePendulum.pdf

[4] M. Malenbaum & J.P. Campbell: “Wilberforce Pendulum” http://www.phy.davidson.edu/StuHome/pecampbell/Wilberforce/Theory.htm

[5] Demonstration list for Oscillations http://scripts.mit.edu/~tsg/www/list.php?letter=C Demonstration search results: http://scripts.mit.edu/~tsg/www/find.php?field=Keyword&search=Coupled%20Oscillation

[6] M.A. Partnof & S.C. Richards: “Basic Coupled Oscillator Theory Applied to the Wilberforce Pendulum” http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/deproj/sp04/stevemisay/Project1.pdf

[7] Physics Demonstration Catalog: “202-17-E6 Wilberforce pendulum with masses” Department of Physics and Astronomy, Oberlin College http://www.oberlin.edu/physics/catalog/demonstrations/waves/wilberforce.html

[8] PIRA 3A70.10 - Coupled Oscillations: Wilberforce Pendulum http://www.ph.utexas.edu/ phy-demo/demo-txt/3a70-10.html

[9] W. Christian: “Ejs Wilberforce Pendulum Model” Last Modified July 5, 2008 http://www.compadre.org/osp/document/ServeFile.cfm?ID=7569&DocID=589

[10] Wilberforce Pendulum http://www.exo.net/~donr/activities/Wilberforce_Pendulum.pdf

[11] http://www.physics.montana.edu/demonstrations/video/3_oscillationandwaves/oscillations.html

[12] Wilberforce Pendulum Model No. ME-8091 http://www.phys.vt.edu/~demo/references/equipment_manuals/wilburforce_ME-8091.pdf

[13] B. Hughey: “Experimental Investigation of the Dynamics of a Wilberforce Pendulum” 3/6/09 http://web.mit.edu/paez/Public/mit2671/WilbReport.pdf

[14] 中道 義之，舟田 敏雄，清水 啓介，岩本 大，船津 佑介，大庭 勝久: “Wilberforce 振子の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[15] 中道 義之，舟田 敏雄，清水 啓介，岩本 大，船津 佑介，大庭 勝久: “揺動 Wilberforce 振子の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[16] 北川 隆明: “強制非線形化 Mathieu 方程式の共存性カオス解” 八代高専紀要 28 pp.11-16 20060301

[17] 北川 隆明: “強制非線形化 Mathieu 方程式のカオス解と分岐現象について” 八代高専紀要 26 pp.47-51 20040301.

[18] 原田 晃 , 吉武 裕 , 福島 明寿 , 坂口 欣也 , 石橋 司: “622 水平面内におけるフラフープの運動：周期解とカオス (非線形振動関連,OS-8 振動基礎 (2))” Dynamics & Design Conference 2004, pp.622-1-622-6.

[19] 吉武 裕 , 原田 晃 , 福島 明寿 , 坂口 欣也 , 石橋 司: “水平面内におけるフラフープの運動 : 周期解とカオス (機械力学, 計測, 自動制御)” 日本機械学會論文集 C 編 71(707) (2005), pp.2172-2179.

[20] 原田 晃 , 吉武 裕 , 福島 明寿 , 坂口 欣也 , 石橋 司: “222 鉛直面内におけるフラフープの運動：周期解とカオス” Dynamics & Design Conference 2005, pp.222-1-222-6.

[21] 原田 晃 , 吉武 裕 , 福島 明寿 , 坂口 欣也 , 石橋 司: “鉛直面内におけるフラフープの運動：周期解とカオス (機械力学, 計測, 自動制御)” 日本機械学會論文集. C 編 72(721) (2006), pp.2884-2892.

[22] 吉武 裕、山脇 勝也、福島 明寿: “フラフープの各種運動形態と防振・発電装置としての利用” http://www.jsme.or.jp/monograph/dmc/1998/700/759.pdf

[23] 金丸隆志: “カオス & 非線形力学入門”「パラメトリック振り子」(2008.4.28) http://brain.cc.kogakuin.ac.jp/~kanamaru/Chaos/PP/

[24] 舟田 敏雄，田代 直人，園田 泰之，藤田 邦彦，齋藤 学，小山 雅弘，村田 裕也，今村 昌幸，許 鼎昌，佐藤 基: “技術者教育のための工学数理の力学教材の改定:

ブランコの運動と Mathieu 方程式” 沼津高専研究報告 **40** (2006), pp.23-32.

[25] 中道 義之, 舟田 敏雄, 大庭 勝久, 川上 誠, 宮内 太積, 望月 孔二: “揺動 Wilberforce 振子の強制振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[26] 舟田 敏雄, 大庭 勝久, 中道 義之, 清水 啓介, 岩本 大, 船津 佑介: “準共振の理論モデル例” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[27] 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 石本 拓也, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠, 望月 孔二: “出前授業のための「振子」教材の整備” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

目次