揺動 Wilberforce 振子の基礎解析

中道 義之[*1*2] 舟田 敏雄[*2*3] 清水 啓介[*3] 岩本 大[*3] 船津 佑介[*3] 大庭 勝久[*2*3]

Fundamental Analysis of a Swinging Wilberforce Pendulum

Yoshiyuki NAKAMICHI[*1*2] Toshio FUNADA[*2*3] Keisuke SHIMIZU[*3] Dai IWAMOTO[*3]
Yusuke FUNATSU[*3] and Katsuhisa OOBA[*2*3]

Abstract: In view of various types of pendulums provided at foreign universities and colleges, some representative education materials are reexamined to show fundamental mechanical phenomena and to step up to higher level of PBL (Problem Based Learning) resources. As one of such typical pendulums, Wilberforce pendulum is taken up here, whose longitudinal and torsional modes of oscillation are known to arise from the nature of coil spring and may give rise to near resonance. The pendulum is allowed to swing around a suspension point in a vertical plane to lead the nonlinear system to three degrees of freedom. The free oscillation is simulated at near resonance and near the critical. It is found that initial values of the swinging causes the coupling oscillation among the three oscillation modes and the near resonance is modified in the three modes.

Keywords: Wilberforce Pendulum, Longitudinal and Torsional Mode of Oscillation, Coupling Oscillation, Near Resonance

1 はじめに

Wilberforce 振子[1]に用いられるコイルバネでは，素線をヘリカルに巻いてあるので，伸縮と捩れによる連成振動が起こる．この振子は，連成振動系の代表例の一つとして振子教材 list[2] にも挙げられており，幾つかの実験解説書や研究報告[3]–[9] がある．特に，Hughey[10] は共振 (resonance) について理論的実験的検証を行っており，共振と準共振 (near resonance，あるいは近共振) について考察している．この現象は伸縮と捩れの結合バネ定数 ϵ が小さいときに起こり，$\epsilon \to 0$ の極限が共振点になる．

本報告では，準共振を区別する視点から，振子教材の充実・整備のために，Wilberforce 振子が揺動する場合の連成振動を解析し，計算例を示す．これは，Wilberforce 振子の拡張であるが，他方，バネの伸縮と鉛直面内での振子の揺動の連成振動系がバネ振子であるので，コイルバネの捩れを考慮するようバネ振子が拡張されたとも言える．先ず，揺動 Wilberforce 振子の自由振動を記述する Lagrange 関数を導き，運動方程式を求める．この運動では系の力学的 energy は保存量である．自由振動の運動方程式の初期値問題の数値解析を行い，非線形振動の特性を調べる．

2 揺動 Wilberforce 振子の解析

Fig.1 に示すように，壁面上の原点から水平方向に x 軸，鉛直下方を z 軸とする 2 次元のデカルト座標系 (x, z) を取り，平面極座標系 (r, θ) を併用して，壁面から吊り下げられた自然長 r_0 で伸縮のバネ定数 k_1 の線形バネの下端に取り付けられた質量 m_1 の物体 (錘) の質量中心までの距離を $r_1 \equiv r_1(t)$ (t: 時間) と表し，鉛直軸から測るバネの傾き角を $\theta_1 \equiv \theta_1(t)$ と表す．線形バネの捩りのバネ定数を δ とし，バネの捩れ角を $\psi_1 \equiv \psi_1(t)$ と表し，バネの伸縮と捩れの結合バネ定数を ϵ とする．錘は，質量 m_1 で捩れの慣性 moment J_1 を持ち，鉛直面内で r 方向に伸縮運動し，θ 方向に揺動 (swing) し，ψ 方向に捩れ振動する．この揺動による重力 potential energy の変化が非線形効果をもたらす．錘の座標 (x_p, z_p) は，支持点 (x_0, z_0) を一定値として，次のように表される:

$$x_p = x_0 + r_1 \sin(\theta_1), \quad z_p = z_0 + r_1 \cos(\theta_1) \tag{2.1}$$

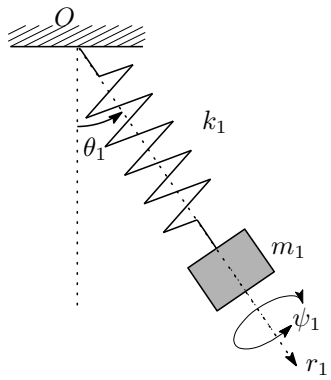

Fig.1 Swinging Wilberforce pendulum.

(2.1) 式により，揺動 Wilberforce 振子の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_2$ は，次のように表される：

$$\mathcal{L}_2 = \frac{m_1}{2}\left(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}_1^2\right) + \frac{J_1}{2}\dot{\psi}_1^2 - \frac{k_1}{2}(r_1 - r_0)^2 - \frac{\delta}{2}\psi_1^2 - \frac{\epsilon}{2}(r_1 - r_0)\psi_1 + m_1 g\left[r_1(\cos(\theta_1) - 1) + z_0\right] \tag{2.2}$$

これにより, Lagrange の運動方程式は, 次式で与えられる：

$$m_1\ddot{r}_1 + k_1(r_1 - r_0) + \frac{\epsilon}{2}\psi_1 - m_1 g(\cos(\theta_1) - 1) - m_1 r_1 \dot{\theta}_1^2 = 0, \tag{2.3}$$

$$m_1 r_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 r_1 g \sin(\theta_1) + 2 m_1 r_1 \dot{r}_1 \dot{\theta}_1 = 0, \tag{2.4}$$

$$J_1 \ddot{\psi}_1 + \delta\psi_1 + \frac{\epsilon}{2}(r_1 - r_0) = 0 \tag{2.5}$$

[*1] 総合情報センター: Information Technology Center.
[*2] 専攻科: Advanced Engineering Course.
[*3] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.

静止壁面のとき ((x_0, z_0) は一定値)，揺動 Wilberforce 振子は自由振動し，系の全力学的 energy E_1 は保存する:

$$E_1 = \frac{m_1}{2}\left(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\theta}_1^2\right) + \frac{J_1}{2}\dot{\psi}_1^2 + \frac{k_1}{2}\left(r_1 - r_0\right)^2 + \frac{\delta}{2}\psi_1^2 + \frac{\epsilon}{2}\left(r_1 - r_0\right)\psi_1 - m_1 r_1 g\left(\cos(\theta_1) - 1\right) \quad (2.6)$$

E_1 の値の保存状態は数値計算の精度保証に用いられる．

3 揺動 Wilberforce 振子の自由振動

揺動 Wilberforce 振子の規定値を $m_1 = 1$, $J_1 = 1$, $k_1 = 1$, $\delta = 1$, $\epsilon = 0.3$, $g = 1$, $r_0 = 1$ とおく．微分方程式系 (2.3)-(2.5) の初期値を $r_1(0) = r_0 = 1$, $\dot{r}_1(0) = 0$, $\theta_1(0) = 0$, $\dot{\theta}_1(0) = 0$, $\psi_1(0) = 0.1$, $\dot{\psi}_1(0) = 0$ と平衡点の近傍に設定して，(2.3)-(2.5) を時間 $0 \le t \le t_e$ ($t_e = 2\pi \times 22$) で数値積分した結果を **Fig.2a-2e** に示す．つまり，Wilberforce 振子の連成振動により $r_1(t)$, $\psi_1(t)$ は振動する (**Fig.2a-2e**) が，θ 方向には振動は発生せずに，$\theta(t)$ は平衡点 $\theta(t) = 0$ に留まることが分かる．先の Wilberforce 振子の解析[11] に拠ると，この場合の固有角振動数は $\omega_1 = \sqrt{1 + \sqrt{\epsilon}/2}$, $\omega_2 = \sqrt{1 - \sqrt{\epsilon}/2}$ である．

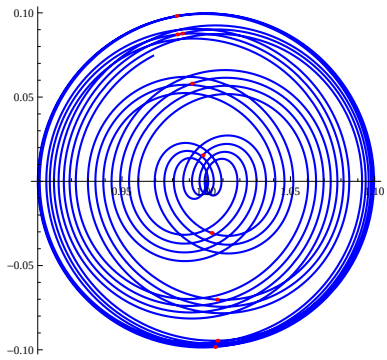

Fig.2a Phase portrait of $(r_1, \dot{r}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

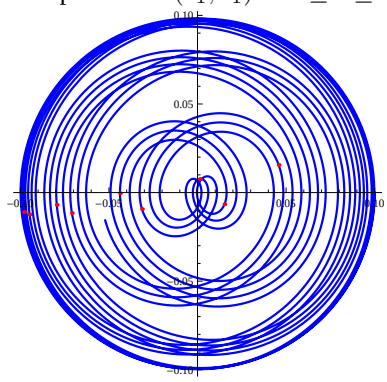

Fig.2b Phase portrait of $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

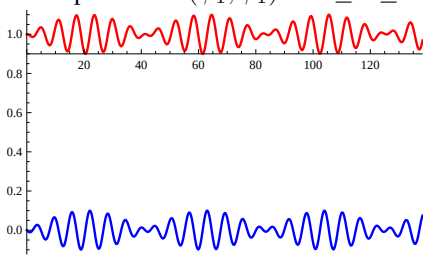

Fig.2c Time sequence of $r_1(t)$ and $\dot{r}_1(t)$ versus t ($0 \le t \le 2\pi \times 22$).

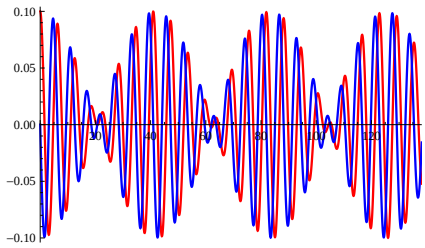

Fig.2d Time sequence of $\psi_1(t)$ and $\dot{\psi}_1(t)$ versus t ($0 \le t \le 2\pi \times 22$).

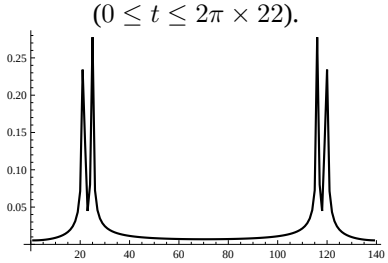

Fig.2e Spectrum of $\psi_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

系の規定値は同様とし，初期値を $r_1(0) = 1$, $\dot{r}_1(0) = 0$, $\theta_1(0) = 0.1$, $\dot{\theta}_1(0) = 0$, $\psi_1(0) = 0$, $\dot{\psi}_1(0) = 0$ と設定し，方程式系 (2.3)-(2.5) を時間 $0 \le t \le t_e$ ($t_e = 2\pi \times 22$) で数値積分した結果を **Fig.3a-3h** に示す．$\theta_1(t)$ が r 方向に非線形性による $O(\theta_1^2)$ の振動を誘起し，r 方向の振動が Wilberforce 振子の連成振動を引き起こしている．しかし，θ 方向の振動はほぼ固有振動であり，伸縮と回転振動から揺れへの影響は小さいことが分かる．

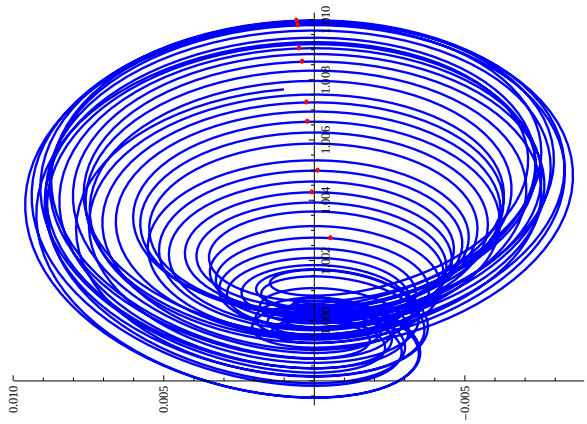

Fig.3a Phase portrait of $(r_1, \dot{r}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$. The figure is rotated by 90°.

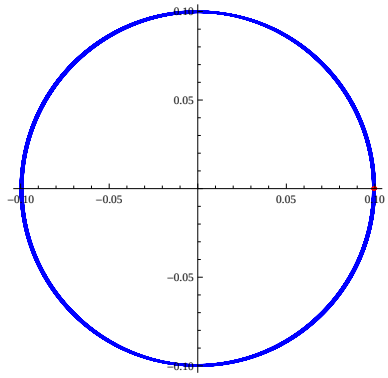

Fig.3b Phase portrait of $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

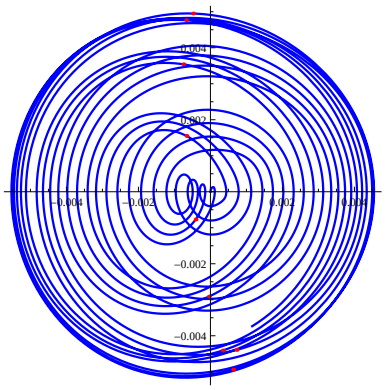

Fig.3c Phase portrait of $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

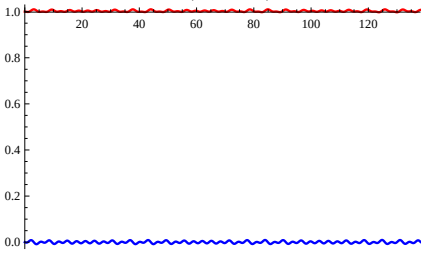

Fig.3d Time sequence of $r_1(t)$ and $\dot{r}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

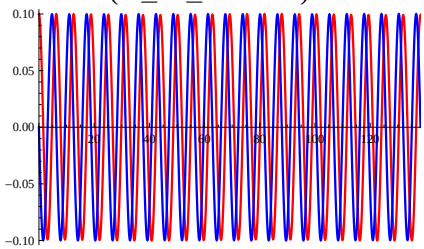

Fig.3e Time sequence of $\theta_1(t)$ and $\dot{\theta}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

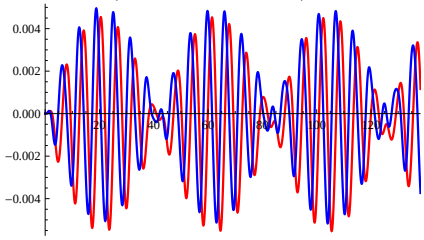

Fig.3f Time sequence of $\psi_1(t)$ and $\dot{\psi}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

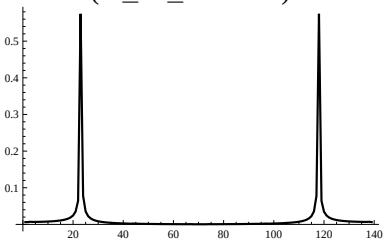

Fig.3g Spectrum of $\theta_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

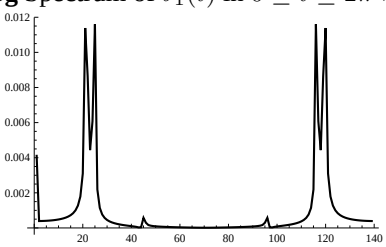

Fig.3h Spectrum of $\psi_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

系の規定値は同様とし，初期値を $r_1(0) = 1, \dot{r}_1(0) = 0, \theta_1(0) = 1, \dot{\theta}_1(0) = 0, \psi_1(0) = 0, \dot{\psi}_1(0) = 0$ と設定して，方程式系 (2.3)-(2.5) を時間 $0 \le t \le t_e$ ($t_e = 2\pi \times 22$) で数値積分した結果を **Fig.4a-4i** に示す．初期の角度が大きいので，伸縮・回転振動への影響が大きく且つそれらの mode から揺れの mode への影響が大きくなって，3 つの mode 間の相互作用が起こっていることが，**Fig.4g-4i** に示される．

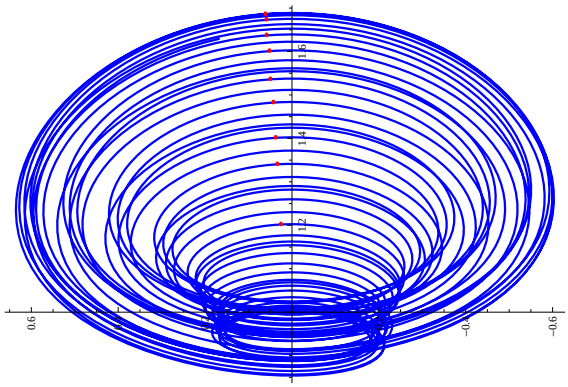

Fig.4a Phase portrait of $(r_1, \dot{r}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$. The figure is rotated by 90°.

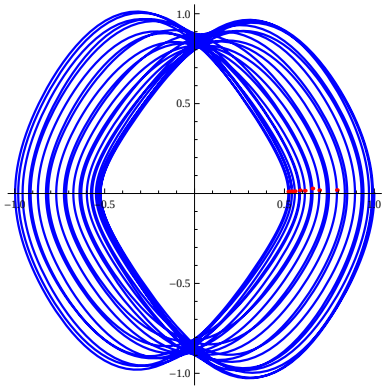

Fig.4b Phase portrait of $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

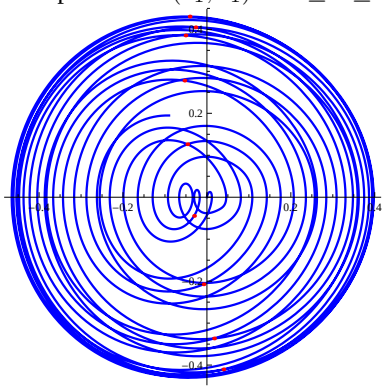

Fig.4c Phase portrait of $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

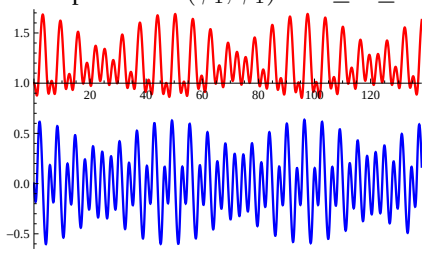

Fig.4d Time sequence of $r_1(t)$ and $\dot{r}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

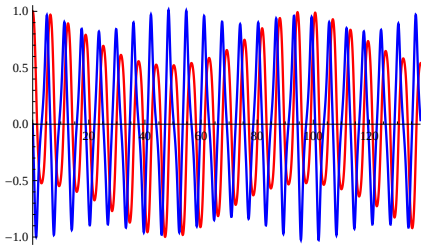

Fig.4e Time sequence of $\theta_1(t)$ and $\dot{\theta}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

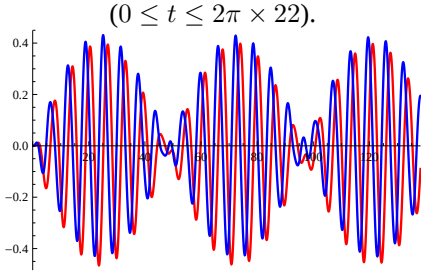

Fig.4f Time sequence of $\psi_1(t)$ and $\dot{\psi}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

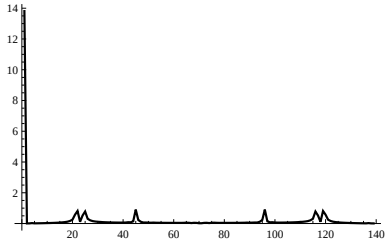

Fig.4g Spectrum of $r_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

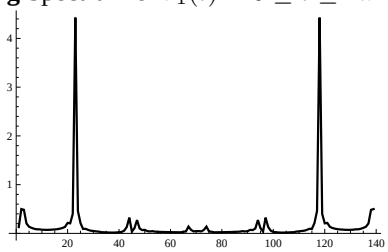

Fig.4h Spectrum of $\theta_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

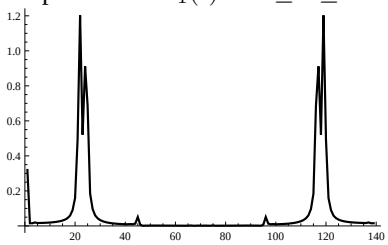

Fig.4i Spectrum of $\psi_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

揺動 Wilberforce 振子の規定値を $m_1 = 1$, $J_1 = 1$, $k_1 = 1$, $\delta = 1$, $\epsilon = 0.01$, $g = 1$, $r_0 = 1$ とおく．微分方程式系 (2.3)-(2.5) の初期値を $r_1(0) = r_0 = 1$, $\dot{r}_1(0) = 0$, $\theta_1(0) = 1$, $\dot{\theta}_1(0) = 0$, $\psi_1(0) = 0$, $\dot{\psi}_1(0) = 0$ と設定して，(2.3)-(2.5) を時間 $0 \le t \le t_e$ ($t_e = 2\pi \times 302$) で数値積分した結果を **Fig.5a-5f** に示す．揺動が無い場合には伸縮と回転の near resonance が非常に強く相関して起ったが，この場合には 3 つの mode 間で相互作用しており，伸縮と揺れは同位相で，2 つの spectrum peak が見える (**Fig.5d**, **5e**). 回転は位相ずれしており，単一の spectrum peak が見える (**Fig.5f**). near resonance の peak 値と異なる相互作用を励起しているものと思われる．

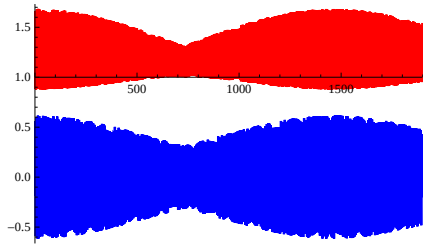

Fig.5a Time sequence of $r_1(t)$ and $\dot{r}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 302)$.

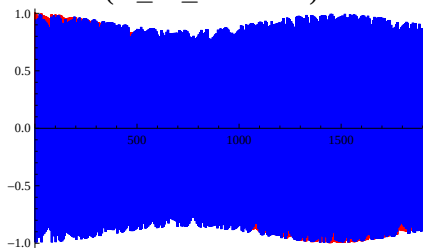

Fig.5b Time sequence of $\theta_1(t)$ and $\dot{\theta}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 302)$.

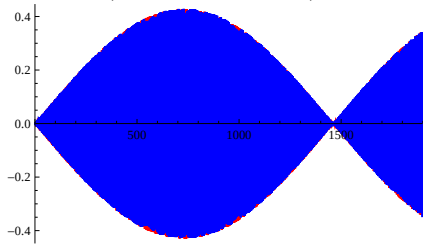

Fig.5c Time sequence of $\psi_1(t)$ and $\dot{\psi}_1(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 302)$.

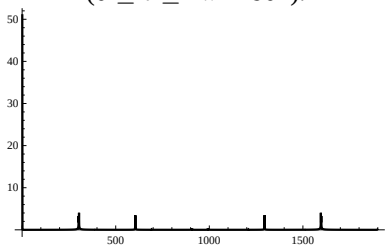

Fig.5d Spectrum of $r_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 302$.

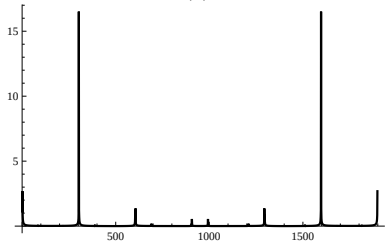

Fig.5e Spectrum of $\theta_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 302$.

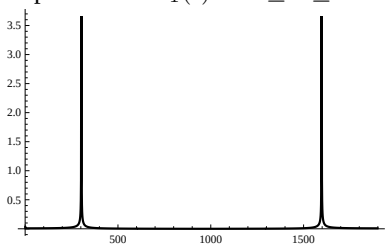

Fig.5f Spectrum of $\psi_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 302$.

4　臨界点近傍 $\epsilon \sim 2\sqrt{m_1 J_1}$ の非線形自由振動

$\epsilon = 1.98$ と取り，系の規定値は同様とし，初期値を $r_1(0) = 1, \dot{r}_1(0) = 0, \theta_1(0) = 0.01, \dot{\theta}_1(0) = 0, \psi_1(0) = 0, \dot{\psi}_1(0) = 0$ と設定して，(2.3)-(2.5) を時間 $0 \le t \le t_e$ $(t_e = 2\pi \times 32)$ で数値積分した結果を **Fig.6a-6g** に示す．

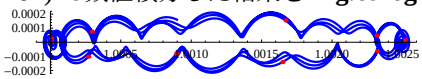

Fig.6a Phase portrait of $(r_1, \dot{r}_1)$ in $2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 32$.

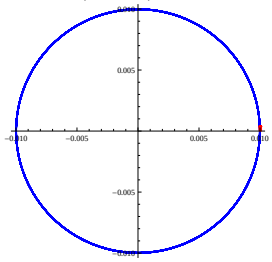

Fig.6b Phase portrait of $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ in $2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 32$.

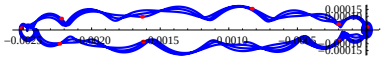

Fig.6c Phase portrait of $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$ in $2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 32$.

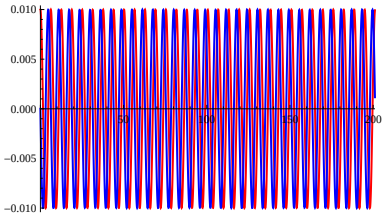

Fig.6d Time sequence of $\theta_1(t)$ and $\dot{\theta}_1(t)$ versus t $(2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 32)$.

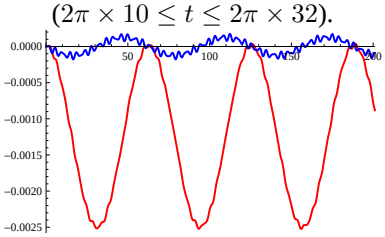

Fig.6e Time sequence of $\psi_1(t)$ and $\dot{\psi}_1(t)$ versus t $(2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 32)$.

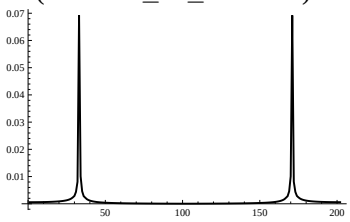

Fig.6f Spectrum of $\theta_1(t)$ in $2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 32$.

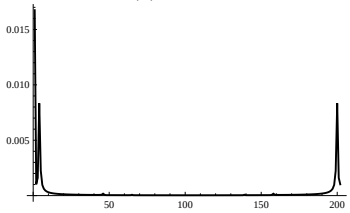

Fig.6g Spectrum of $\psi_1(t)$ in $2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 32$.

系の規定値は同様とし，微分方程式系 (2.3)-(2.5) の初期値を $r_1(0) = r_0 = 1, \dot{r}_1(0) = 0, \theta_1(0) = 1, \dot{\theta}_1(0) = 0, \psi_1(0) = 0, \dot{\psi}_1(0) = 0$ と設定して，(2.3)-(2.5) を時間 $t_s \le t \le t_e$ $(t_s = 2\pi \times 10, t_e = 2\pi \times 32)$ で数値積分した結果を **Fig.7a-7i** に示す．spectrum の連続化により，カオス的挙動が見られる．

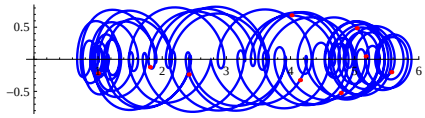

Fig.7a Phase portrait of $(r_1, \dot{r}_1)$ in $t_s \le t \le t_e$.

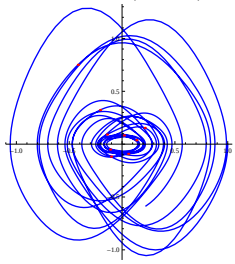

Fig.7b Phase portrait of $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ in $t_s \le t \le t_e$.

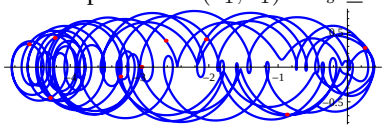

Fig.7c Phase portrait of $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$ in $t_s \le t \le t_e$.

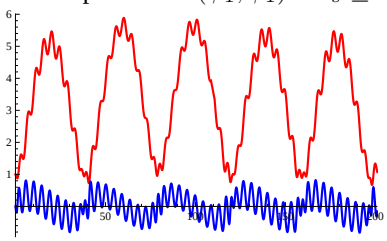

Fig.7d Time sequence of $r_1(t)$ and $\dot{r}_1(t)$ versus t $(t_s \le t \le t_e)$.

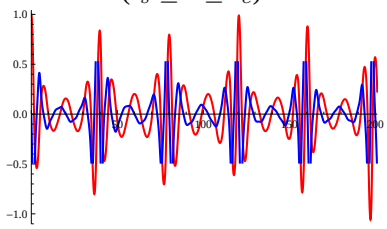

Fig.7e Time sequence of $\theta_1(t)$ and $\dot{\theta}_1(t)$ versus t $(t_s \le t \le t_e)$.

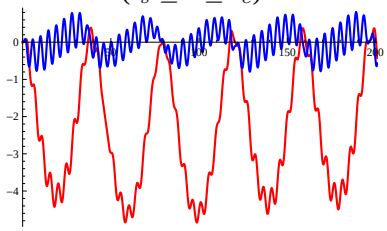

Fig.7f Time sequence of $\psi_1(t)$ and $\dot{\psi}_1(t)$ versus t $(t_s \le t \le t_e)$.

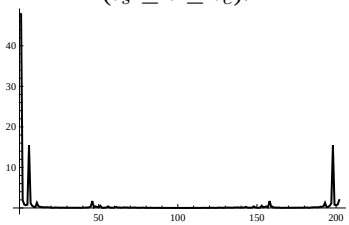

Fig.7g Spectrum of $r_1(t)$ in $t_s \le t \le t_e$.

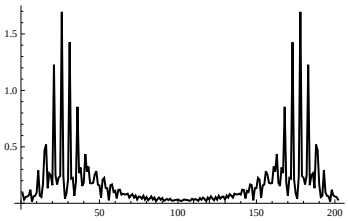

Fig.7h Spectrum of $\theta_1(t)$ in $t_s \leq t \leq t_e$.

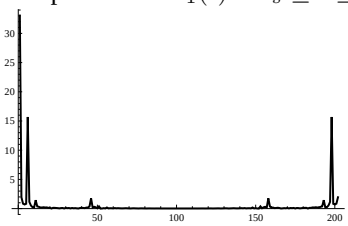

Fig.7i Spectrum of $\psi_1(t)$ in $t_s \leq t \leq t_e$.

5 おわりに

本報告では，揺動 Wilberforce 振子の基礎解析を行い，代表的な場合について数値解析を行った．この系では，バネの伸縮と捩れに加えて，揺動の非線形効果があるため，規則的振動や準共振のみならず，カオス的挙動も可能である．系の規定値を代表的な値に設定したときのバネの伸縮と捩れの結合バネ定数 ϵ が小さいときに準共振が起こる．系の規定値を設定すると，$\epsilon \sim 0$ は $\omega_1 \sim \omega_2$ の準共振を表すが，$\epsilon \to 0$ では 2 つの振動 mode は独立になる．Wilberforce 振子の臨界点 $\epsilon = 2\sqrt{m_1 J_1} = 2$ では $\omega_2 = 0$ となり，系は ω_1 で振動する．$\epsilon > 2$ では系は不安定になる．この近傍は，揺動 Wilberforce 振子の数値解ではカオス的振舞を示すことが解明された．

先行の実験解説書や研究報告[3]–[9] には Wilberforce 振子の実験的理論的解説があり，諸国の高等教育での教材整備が見られる．しかし，Wilberforce 振子を拡張して，様々な振動問題を解説する取組は意外に少ないようである．前報告[11] や本報告に続き，揺動を考慮した支持点の励振[12] や外力と減衰効果[13]，球面上の揺動 Wilberforce 振子の振動問題の解析に取組む．また，準共振に関して，線形振動 model と非線形振動 model を解析して，別途報告する[14]．なお，準共振の研究報告の調査検討は，引き続き行う．振子の振動する様子の理解には動画教材が効果的である．

ここに示した実験データや解析例は学生の自学自習の支援に提供できるのみならず，子供科学教室やものづくり教室，並びに出前授業[15] 等で科学技術に関心を呼び起こす展示・教材にも活用できるものと期待される．

本研究遂行にあたり，本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して，柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] G. Torzo: “The Wilberforce pendulum: a complete analysis through RTL and modelling” Proceeding Int. GIREP Sem., Udine, September 2003 http://www.padova.infm.it/torzo/WilberGIREP.pdf

[2] C. Gauld: “Pendulums in Physics Education” http://www.arts.unsw.edu.au/pendulum/gauldBibliography.pdf

[3] R.E. Berg & T.S. Marshall: “Wilberforce pendulum oscillations and normal modes” *Am. J. Phys.* **59** (1991), pp.32-38. http://faraday.physics.utoronto.ca/PHY182S/WilberforceRefBerg.pdf http://faraday.physics.utoronto.ca/PHY182S/WilberforcePendulum.pdf

[4] M. Malenbaum & J.P. Campbell: “Wilberforce Pendulum” http://www.phy.davidson.edu/StuHome/pecampbell/Wilberforce/Theory.htm

[5] M.A. Partnof & S.C. Richards: “Basic Coupled Oscillator Theory Applied to the Wilberforce Pendulum” http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/deproj/sp04/stevemisay/Project1.pdf

[6] PIRA 3A70.10 - Coupled Oscillations: Wilberforce Pendulum http://www.ph.utexas.edu/~phy-demo/demo-txt/3a70-10.html

[7] W. Christian: “Ejs Wilberforce Pendulum Model” Last Modified July 5, 2008 http://www.compadre.org/osp/document/ServeFile.cfm?ID=7569&DocID=589

[8] Wilberforce Pendulum http://www.exo.net/~donr/activities/Wilberforce_Pendulum.pdf

[9] Wilberforce Pendulum Model No. ME-8091 http://www.phys.vt.edu/~demo/references/equipment_manuals/wilburforce_ME-8091.pdf

[10] B. Hughey: “Experimental Investigation of the Dynamics of a Wilberforce Pendulum” 3/6/09 http://web.mit.edu/paez/Public/mit2671/WilbReport.pdf

[11] 中道 義之，舟田 敏雄，清水 啓介，岩本 大，船津 佑介，大庭 勝久: “Wilberforce 振子の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[12] 中道 義之，舟田 敏雄，大庭 勝久，川上 誠，宮内 太積，望月 孔二: “揺動 Wilberforce 振子の壁面からの励振の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[13] 中道 義之，舟田 敏雄，大庭 勝久，川上 誠，宮内 太積，望月 孔二: “揺動 Wilberforce 振子の強制振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[14] 舟田 敏雄，大庭 勝久，中道 義之，清水 啓介，岩本 大，船津 佑介: “準共振の理論モデル例” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[15] 舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介，石本 拓也，中道 義之，大庭 勝久，宮内 太積，川上 誠，望月 孔二: “出前授業のための「振子」教材の整備” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.