Wilberforce 振子の基礎解析

中道 義之 *1*2 舟田 敏雄 *2*3 清水 啓介 *3 岩本 大 *3 船津 佑介 *3 大庭 勝久 *2*3

Fundamental Analysis of a Wilberforce Pendulum

Yoshiyuki NAKAMICHI*1*2 Toshio FUNADA*2*3 Keisuke SHIMIZU*3 Dai IWAMOTO*3
Yusuke FUNATSU*3 and Katsuhisa OOBA*2*3

Abstract: In view of various types of pendulums provided at foreign universities and colleges, some representative education materials are reexamined to show fundamental mechanical phenomena and to step up to higher level resources for PBL (Problem Based Learning). As one of such typical pendulums, Wilberforce pendulum is taken up here, whose longitudinal and torsional modes of oscillation are known to arise from the nature of coil spring and may give rise to near resonance. The spring constant of coupling mode has an upper limit over which the system becomes unstable in time. Free vibration of Wilberforce pendulum can be solved exactly and then is solved numerically to estimate the computation algorithm and numerical accuracy by checking the value of total mechanical energy to be conserved.

Keywords: Wilberforce Pendulum, Longitudinal and Torsional Mode of Oscillation, Coupling Oscillation, Near Resonance

1 はじめに

振子教材についてインターネットに提供されている情報を 国内・外のサイトを回って調べているときに、Wilberforce 振子 (Wilberforce バネ) にヒットした[1] . Wilberforce 振子 に用いられるコイルバネでは,素線をヘリカルに巻いて あるので,伸縮と捩れによる連成振動が起こる.この装置 は, 1894年に Cavendish 研究所で Wilberforce 氏がコイル バネの実験をしたことに因んで「Wilberforce 振子」と名 づけられている[2].この振子は連成振動系の代表例の一つ として振子教材 list[3] にも挙げられており,幾つかの実験 解説書や研究報告^{[4]-[13]} がある.特に, Hughey^[14] は共振 (resonance) について理論的実験的検証を行っており,共振 と準共振 (near resonance, あるいは近共振) について考察 している.この現象は伸縮と捩れの結合バネ定数 ϵ が小さ いときに起こり, $\epsilon \to 0$ の極限が共振点になる.しかし, 実際の $\epsilon = 0$ の場合には伸縮振動と捩れ振動は独立とな り,連成振動は起こらない. つまり, 小さい(弱い) けれど も $\epsilon \neq 0$ であることが本質的に重要であり,それを考慮 して準共振 (near resonance) と呼ばれるものと理解される. $\epsilon \neq 0$ の振動は , うなり (beat) と見ることもできるが , 2 自 由度の連成振動系の現象である.また,これを多自由度系 の内部共振 (internal resonance)^[15] の一種と見做すことも できるが , $\epsilon \to 0$ の極限が共振点になるので , そのままで そこに分類するにはやはり無理がある. その一方, 共振を 広義に解釈し,類似の現象も含めて共振と呼ぶ場合もある ようであり、どのような扱いが相応しいものか、最終的な 判断のためにはさらに調査を要すると思われる.

本報告では,準共振を区別する視点から,振子教材の充実・整備のために,Wilberforce 振子の連成振動解析と計算例を解説する.先ず,Wilberforce 振子の自由振動を記述する Lagrange 関数を導き,運動方程式を求める.この運動では系の力学的 energy は保存量である.その解を解析的に求めると共に数値解析を行う.

2 Wilberforce 振子の解析

Fig.1 に示すように,壁面上の原点から鉛直下方にデカルト座標系の z 軸を取り,壁面から吊り下げられた伸縮バネ定数 k_1 の線形バネの下端に取り付けられた質量 m_1 の物体の質量中心の座標を $z_p\equiv z_p(t)$ (t) 時間)と表す.線形バネは捩りのバネ定数 δ を持ち,物体は捩れ角 $\psi_1\equiv \psi_1(t)$,慣性 moment J_1 で捩れ振動する.バネの伸縮と捩れの結合バネ定数を ϵ とする.この系の運動を記述する Lagrange 関数 \mathcal{L}_1 は,次式で与えられる:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{m_1}{2}\dot{z}_p^2 + \frac{J_1}{2}\dot{\psi}_1^2 - \frac{k_1}{2}z_p^2 - \frac{\delta}{2}\psi_1^2 - \frac{\epsilon}{2}z_p\psi_1 \qquad (2.1)$$

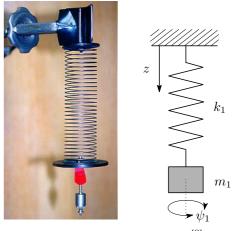


Fig.1 Wilberforce pendulum. Apparatus^[8] and the schematic of longitudinal and torsional oscillation modes.

^{*1} 総合情報センター: Information Technology Center.

^{*2} 専攻科: Advanced Engineering Course.

^{*3} 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.

(2.1) 式により, Lagrange の運動方程式は次式となる:

$$\begin{cases}
m_1 \ddot{z}_p + k_1 z_p + \frac{\epsilon}{2} \psi_1 = 0, \\
J_1 \ddot{\psi}_1 + \delta \psi_1 + \frac{\epsilon}{2} z_p = 0
\end{cases}$$
(2.2)

これらは定数係数の連立線形同次微分方程式であるから,解は,複素数sを含み,

$$z_p = Z_0 \exp(st) + c.c., \ \psi_1 = A_1 \exp(st) + c.c.$$
 (2.3)

と表されるものとする . (2.3) 式を (2.2) 式に代入して , 複素振幅 Z_0 , A_1 に対する連立線形同次代数方程式系を得る:

$$\begin{cases} (m_1 s^2 + k_1) Z_0 + \frac{\epsilon}{2} A_1 = 0, \\ \frac{\epsilon}{2} Z_0 + (J_1 s^2 + \delta) A_1 = 0 \end{cases}$$
 (2.4)

(2.4) 式の可解条件は Z_0 , A_1 に対する係数行列式が zero となることであるから , s の 4 次の代数方程式 (s^2 の 2 次の代数方程式) が導かれる:

$$s^4 + 2\alpha s^2 + \beta = 0 \tag{2.5}$$

係数 α , β は次式で定義され,根の判別式 γ を得る:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{\delta}{J_1} \right), \ \beta = \frac{k_1 \delta}{m_1 J_1} - \frac{\epsilon^2}{4m_1 J_1}$$
 (2.6)

$$\gamma = \alpha^2 - \beta = \frac{1}{4} \left(\frac{k_1}{m_1} - \frac{\delta}{J_1} \right)^2 + \frac{\epsilon^2}{4m_1 J_1}$$
 (2.7)

物理量は正 $(m_1>0,J_1>0)$ であり, γ は正の実数の和であるから, $\epsilon^2/(4m_1J_1)=\gamma_m$ が最小値となる: $\gamma_m=0$ ならば重根となる.一方, $\epsilon\to 0$ のとき,(2.2) 式は 2 つの独立な振動 mode の方程式となり,固有角振動数の値は $\omega_z=\sqrt{k_1/m_1}, \omega_\psi=\sqrt{\delta/J_1}$ となることに注意する.以上により,(2.5) 式の根 $s=\imath\omega$ は次式で表され,根号内の復号順に固有角振動数 ω_1,ω_2 と置く:

$$\omega = \pm \sqrt{\alpha \pm \sqrt{\gamma}} = \pm \omega_1, \ \pm \omega_2 \tag{2.8}$$

対応する形状関数 S_1, S_2 は次式で与えられる:

$$\begin{cases}
S_1 = \frac{-2}{\epsilon} \left(-m_1 \omega_1^2 + k_1 \right), \\
S_2 = \frac{-2}{\epsilon} \left(-m_1 \omega_2^2 + k_1 \right)
\end{cases}$$
(2.9)

(2.9), (2.8), (2.3) 式を用い, (2.2) 式の一般解が表される:

$$\begin{cases} z_p = Z_{01} \exp(i\omega_1 t) + Z_{02} \exp(i\omega_2 t) + c.c., \\ \psi_1 = S_1 Z_{01} \exp(i\omega_1 t) + S_2 Z_{02} \exp(i\omega_2 t) + c.c. \end{cases}$$
(2.10)

これは, 各基準 mode ごとに表現できる:

$$\begin{cases}
S_2 z_p - \psi_1 = (S_2 - S_1) Z_{01} \exp(i\omega_1 t) + c.c., \\
S_1 z_p - \psi_1 = (S_1 - S_2) Z_{02} \exp(i\omega_2 t) + c.c.
\end{cases}$$
(2.11)

さらに , 系の規定値 $(m_1,k_1,J_1,\delta,\epsilon)$ と初期値が与えられれば (2.10) 式の複素振幅 Z_{01},Z_{02} が決定され ,解が表現

される.この系は保存系であるから,系の全力学的 energy E_1 は保存する:

$$E_1 = \frac{m_1}{2}\dot{z}_p^2 + \frac{J_1}{2}\dot{\psi}_1^2 + \frac{k_1}{2}z_p^2 + \frac{\delta}{2}\psi_1^2 + \frac{\epsilon}{2}z_p\psi_1 \quad (2.12)$$

次節では, E_1 の値が時間的に追跡され,数値計算の妥当性の評価に用いられる.

この系の規定値 $(m_1=1,k_1=1,J_1=1,\delta=1,\epsilon=0)$ に対する 2 つの独立な振動 mode の固有角振動数の値は $\omega_z=\sqrt{k_1/m_1}=1,\omega_\psi=\sqrt{\delta/J_1}=1$ となっており,これらの値を背景に $\epsilon\neq 0$ の場合の連成振動を調べることになる.系の固有角振動数の自乗値の差は, $\omega_1^2-\omega_2^2=2\sqrt{\gamma}$ であり, $\gamma_m=\epsilon^2/(4m_1J_1)=0$ が共振を表す.

代表的な場合について, $S_1,\,S_2$ と $\omega_1,\,\omega_2$ の ϵ に関する変化は **Fig.2** に示される. $S_1<0,\,S_2>0$ が成り立っており, $0\le\omega_1\le\omega_2$ であることが分かる.特別な $J_1=\delta m_1/k_1=1$ で $\epsilon=0$ の場合に $\omega_1=\omega_2=1$ であり,共振が起こる.また $\omega_z=\omega_\psi=1$ で $\epsilon=2\sqrt{m_1J_1}=2$ (臨界値) のとき $\omega_1=0$ となり, $\epsilon>2$ のとき $s^2=-\omega^2>0$ となるから系は時間的に不安定になる.

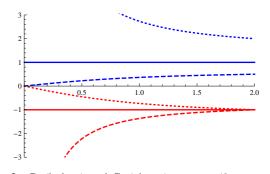


Fig.2a S_1 (below) and S_2 (above) versus ϵ ($0 \le \epsilon \le 2$). $m_1 = 1$, $k_1 = 1$ and $\delta = 1$. The solid line is for $J_1 = 1$, the dashed line for $J_1 = 2$, and the dotted line for $J_1 = 0.5$.

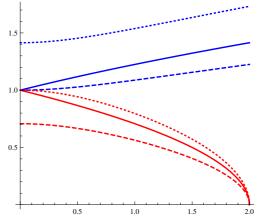


Fig.2b ω_1 (below) and ω_2 (above) versus ϵ ($0 \le \epsilon \le 2$). $m_1 = 1$, $k_1 = 1$ and $\delta = 1$. The solid line is for $J_1 = 1$, the dashed line for $J_1 = 2$, and the dotted line for $J_1 = 0.5$.

また, J_1 を変化させるときの S_1 , S_2 と ω_1 , ω_2 の変化は **Fig.3** に示される. $\epsilon=0.1$ のときの $J_1=1$ の近傍での ω_1 , ω_2 の値の接近 (**Fig.3b** の破線) と比べ, $\epsilon=0.01$ (**Fig.3b** の実線) では更に接近しており,準共振 (near resonance) が起

こることが分かる.

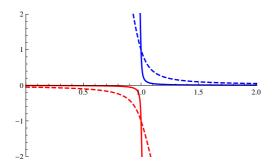


Fig.3a S_1 (below) and S_2 (above) versus J_1 ($0 \le J_1 \le 3$). $m_1 = 1, k_1 = 1$ and $\delta = 1$. The solid line is for $\epsilon = 0.01$, and the dashed line for $\epsilon = 0.1$.

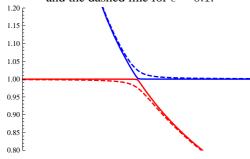


Fig.3b ω_1 (below) and ω_2 (above) versus J_1 ($0 \le J_1 \le 3$). The parameters and the curves are taken as in **Fig.3a**.

3 Wilberforce 振子の自由振動

連立線形微分方程式系 (2.2) の初期値問題を数値的に解いた結果を示す.

3.1 弱い連成振動

振子の規定値を $m_1=1$, $J_1=1$, $k_1=1$, $\delta=1$, $\epsilon=0.1$ とおき,初期値を $z_p(0)=0.1$, $\dot{z}_p(0)=0$, $\psi_1(0)=0$, $\dot{\psi}_1(0)=0$ と設定して,方程式系 (2.2) を時間 $0\leq t\leq t_e$ ($t_e=2\pi\times22$) で数値積分した結果を Fig.4a-4g に示す.位相面図 (Fig.4a, 4b) と時系列図 (Fig.4c, 4d) に見られるように,角振動数 $\omega_1+\omega_2$ の搬送波形に $\omega_1-\omega_2$ の振幅変調波形が重ね合わされており,「うなり」と同様に振幅変調がみられ,一方の振子の振動が他方に移り,最大振幅での振動と静止とが交互に見られる.2 つの角振動数は非常に近い値で,よく似た spectrum (Fig.4e, 4f) 構造である.力学的 energy (Fig.4g) は,ほぼ一定値に保存されている.

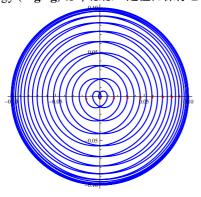


Fig.4a Phase portrait of (z_p, \dot{z}_p) in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

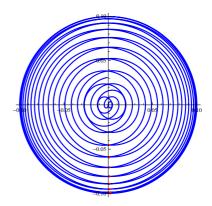


Fig.4b Phase portrait of $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

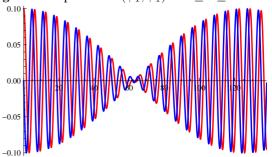


Fig.4c Time sequence of $z_p(t)$ and $\dot{z}_p(t)$ versus t

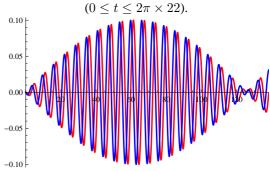


Fig.4d Time sequence of $\psi_1(t)$ and $\dot{\psi}_p(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

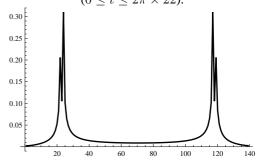


Fig.4e Spectrum of $z_p(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

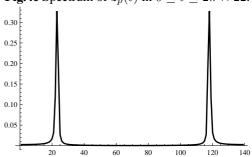


Fig.4f Spectrum of $\psi_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

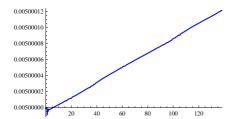


Fig.4g Mechanical energy E_1 in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

3.2 準共振

振子の規定値を $m_1=1$, $J_1=1$, $k_1=1$, $\delta=1$, $\epsilon=0.01$ とおき,初期値を $z_p(0)=0.1$, $\dot{z}_p(0)=0$, $\psi_1(0)=0$, $\dot{\psi}_1(0)=0$ と設定して,方程式系 (2.2) を時間 $0\leq t\leq t_e$ ($t_e=2\pi\times202$) で数値積分した結果を Fig.5a-5e に示す.この場合,振幅変調が起こり,一方の最大振幅時には他方は静止する (Fig.5a, 5b).spectrum はほぼ一致しており (Fig.5c, 5d),準共振が起こっている.力学的 energy は長時間計算の間ほぼ保存している (Fig.5e).

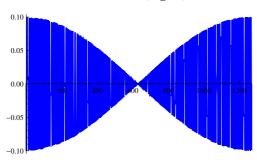


Fig.5a Time sequence of $\dot{z}_p(t)$ versus t ($0 \le t \le 2\pi \times 202$).

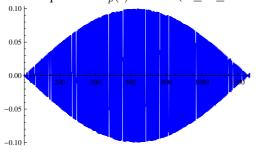


Fig.5b Time sequence of $\dot{\psi}_1(t)$ versus t ($0 \le t \le 2\pi \times 202$).

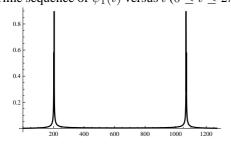


Fig.5c Spectrum of $z_p(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 202$.

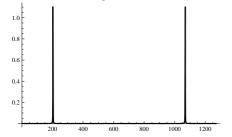


Fig.5d Spectrum of $\psi_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 202$.

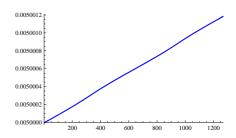


Fig.5e Mechanical energy E_1 in $0 \le t \le 2\pi \times 202$.

3.3 強い連成振動

振子の規定値を $m_1=1$, $J_1=1$, $k_1=1$, $\delta=1$, $\epsilon=1$ とおき,初期値を $z_p(0)=0.1$, $\dot{z}_p(0)=0$, $\psi_1(0)=0$, $\dot{\psi}_1(0)=0$ と設定して,方程式系 (2.2) を時間 $0\leq t\leq t_e$ ($t_e=2\pi\times 22$) で数値積分した結果を Fig.6a-6f に示す.この場合, $\omega_1=\sqrt{3/2}$, $\omega_2=1/\sqrt{2}$ であり,位相面図 (Fig.6a, 6b),時系列図 (Fig.6c, 6d) に示されるように周期性は無いが,spectrum (Fig.6e) 上に ω_1 と ω_2 の peak が現れている.力学的 energy (Fig.6f) は,ほぼ一定値に保存されている.

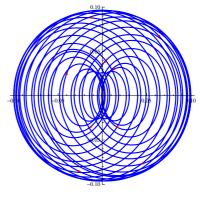


Fig.6a Phase portrait of (z_p, \dot{z}_p) in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

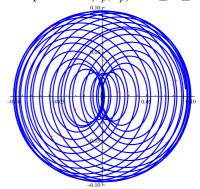


Fig.6b Phase portrait of $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

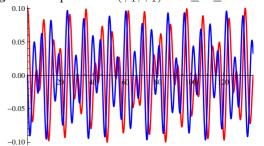


Fig.6c Time sequence of $z_p(t)$ and $\dot{z}_p(t)$ versus t $(0 < t < 2\pi \times 22)$.

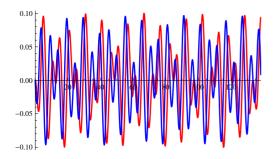


Fig.6d Time sequence of $\psi_1(t)$ and $\dot{\psi}_p(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

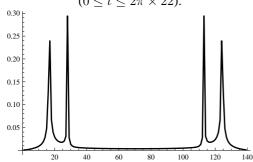


Fig.6e Spectrum of $z_p(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

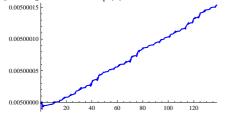


Fig.6f Mechanical energy E_1 in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

 $0.1 < \epsilon < 1$ の振動は , $\epsilon = 0.1$ (**Fig.4**) から $\epsilon = 1$ (**Fig.6**) に次第に移行するものである.つまり , **Fig.4** の振動波形の搬送波の角振動数と振幅変調波の角振動数が次第に近づき , **Fig.6** の振動に移行する.

3.4 臨界値 $\epsilon = 2\sqrt{m_1J_1} = 2$ での振動

振子の規定値を $m_1=1$, $J_1=1$, $k_1=1$, $\delta=1$, $\epsilon=2$ とおき,初期値を $z_p(0)=0.1$, $\dot{z}_p(0)=0$, $\psi_1(0)=0$, $\dot{\psi}_1(0)=0$ と設定して,方程式系 (2.2) を時間 $0\leq t\leq t_e$ ($t_e=2\pi\times 22$) で数値積分した結果を Fig.7a-7f に示す.臨界点 $\epsilon=2\sqrt{m_1J_1}=2$ では, $\omega_1=\sqrt{2}$, $\omega_2=0$ となるから, ω_1 での単一振動が位相面図 (Fig.7a, 7b),時系列図 (Fig.7c, 7d) に見られる.spectrum (Fig.7e) には単一 peak 値が示される.力学的 energy は保存している (Fig.7f).

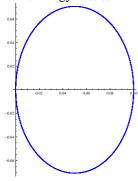


Fig.7a Phase portrait of (z_p, \dot{z}_p) in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

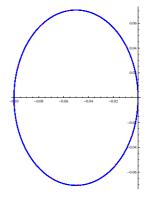


Fig.7b Phase portrait of $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

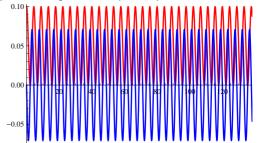


Fig.7c Time sequence of $z_p(t)$ and $\dot{z}_p(t)$ versus t

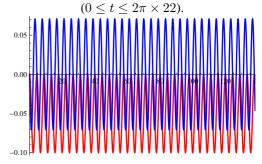


Fig.7d Time sequence of $\psi_1(t)$ and $\dot{\psi}_p(t)$ versus t $(0 \le t \le 2\pi \times 22)$.

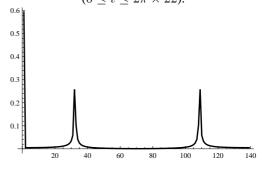


Fig.7e Spectrum of $z_p(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

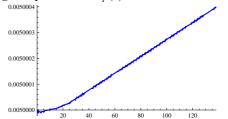


Fig.7f Mechanical energy E_1 in $0 \le t \le 2\pi \times 22$.

4 おわりに

本報告では、Wilberforce 振子の基礎解析を行い、代表的な場合について数値解析を行った.系の規定値を代表的な値に設定したときのバネの伸縮と捩れの結合バネ定数 ϵ が

小さいときに準共振が起こる.系の規定値を設定すると, $\epsilon\sim 0$ は $\omega_1\sim \omega_2$ の準共振を表すが, $\epsilon\to 0$ では 2 つの振動 mode は独立になる. $\omega_z=\omega_\psi=1$ のときの臨界点 $\epsilon=2\sqrt{m_1J_1}=2$ では $\omega_2=0$ となり,系は ω_1 で振動する. $\epsilon>2$ では系は不安定になる.以上のように, ϵ による振動の型の変化と特徴を詳しく解説した.

先行の実験解説書や研究報告^{[4]-[13]} には Wilberforce 振子の実験的理論的解説があり,諸外国の高等教育機関での教材整備が見られる.しかし,Wilberforce 振子を拡張して,様々な振動問題を解説する取組は意外に少ないようである.本報告に続き,Wilberforce 振子が揺動する場合の解析^[16],支持点の励振^[17] や外力と減衰効果^[18],Wilberforce 振子の制振問題の解析^[19] に取組む.また,準共振に関して,線形振動 model と非線形振動 model を解析して,別途報告する^[20].なお,準共振の研究報告の調査検討は,引き続き行う.振子の振動する様子の理解には動画教材が効果的であり,インターネット上に供給されている例^{[1],[6]} を挙げることができる.

ここに示した実験データや解析例は学生の自学自習の支援に提供できるのみならず,子供科学教室 $^{[1]}$ やものづくり教室,並びに出前授業等で科学技術に関心を呼び起こす展示・教材 $^{[21]}$ にも活用できるものと期待される.

参考文献

- [1] Wilberforce 振り子: http://jc.maxwell.jp/mechanics/wilberforce/index.html
- [2] G. Torzo: "The Wilberforce pendulum: a complete analysis through RTL and modelling" Proceeding Int. GIREP Sem., Udine, September 2003 http://www.padova.infm.it/torzo/WilberGIREP.pdf
- [3] C. Gauld: "Pendulums in Physics Education" http://www.arts.unsw.edu.au/pendulum/gauldBibliography.pdf
- [4] R.E. Berg & T.S. Marshall: "Wilberforce pendulum oscillations and normal modes" Am. J. Phys. 59 (1991), pp.32-38. http://faraday.physics.utoronto.ca/PHY182S/WilberforceRefBerg.pdf http://faraday.physics.utoronto.ca/PHY182S/WilberforcePendulum.pdf
- [5] M. Malenbaum & J.P. Campbell: "Wilberforce Pendulum" http://www.phy.davidson.edu/StuHome/ pecampbell/Wilberforce/Theory.htm
- [6] Demonstration list for Oscillations http://scripts.mit.edu/tsg/www/list.php?letter=C Demonstration search results: http://scripts.mit.edu/tsg/www/find.php? field=Keyword&search=Coupled%20Oscillation
- [7] M.A. Partnof & S.C. Richards: "Basic Coupled Oscillator Theory Applied to the Wilberforce Pendulum"

- http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/deproj/sp04/stevemisay/Project1.pdf
- [8] Physics Demonstration Catalog: "202-17-E6 Wilberforce pendulum with masses" Department of Physics and Astronomy, Oberlin College http://www.oberlin.edu/ physics/catalog/demonstrations/waves/wilberforce.html
- [9] PIRA 3A70.10 Coupled Oscillations: Wilberforce Pendulum http://www.ph.utexas.edu/phy-demo/demo-txt/ 3a70-10.html
- [10] W. Christian: "Ejs Wilberforce Pendulum Model" Last Modified July 5, 2008 http://www.compadre.org/osp/document/ServeFile.cfm? ID=7569&DocID=589
- [11] Wilberforce Pendulum http://www.exo.net/donr/activities/ Wilberforce_Pendulum.pdf
- [12] http://www.physics.montana.edu/demonstrations/video/ 3_oscillationandwaves/oscillations.html
- [13] Wilberforce Pendulum Model No. ME-8091 http://www.phys.vt.edu/demo/references/equipment_manuals/ wilburforce_ME-8091.pdf
- [14] B. Hughey: "Experimental Investigation of the Dynamics of a Wilberforce Pendulum" 3/6/09 http://web.mit.edu/paez/Public/mit2671/WilbReport.pdf
- [15] A.F. Vakakis: "Non-linear normal modes and their applications in vibration theory: an overview" *Mechanical Systems and Signal Processing* **11** (1997), pp.3-22.
- [16] 中道 義之, 舟田 敏雄, 清水 啓介, 岩本 大, 船津 佑介, 大庭 勝久: "揺動 Wilberforce 振子の基礎解析" 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [17] 中道 義之, 舟田 敏雄, 大庭 勝久, 川上 誠, 宮内 太積, 望月 孔二: "揺動 Wilberforce 振子の壁面からの励振の基礎解析" 沼津高専研究報告 第44号 (2010), in press.
- [18] 中道 義之, 舟田 敏雄, 大庭 勝久, 川上 誠, 宮内 太積, 望月 孔二: "揺動 Wilberforce 振子の強制振動の基礎解析" 沼津高専研究報告 第44号 (2010), in press.
- [19] 中道 義之, 舟田 敏雄, 大庭 勝久,清水 啓介,岩本大,船津佑介: "Wilberforce 振子の定点理論による制振評価" 沼津高専研究報告 第44号 (2010), in press.
- [20] 舟田 敏雄,大庭 勝久,中道 義之,清水 啓介,岩本大,船津 佑介: "準共振の理論モデル例" 沼津高専研究報告第44号(2010), in press.
- [21] 舟田 敏雄,岩本大,清水 啓介,船津 佑介,石本 拓也,中道義之,大庭 勝久,宮内 太積,川上誠,望月 孔二: "出前授業のための「振子」教材の整備" 沼津高 専研究報告 第 44 号 (2010), in press.