

出前授業のための「振り子」教材の整備: Pendulum Snake と 2 点吊り振り子

望月 孔二^{*1*2} 舟田 敏雄^{*2*3} 船津 佑介^{*3} 岩本 大^{*3} 清水 啓介^{*3} 石本 拓也^{*4}
中道 義之^{*2*5} 大庭 勝久^{*2*3} 宮内 太積^{*2*6} 川上 誠^{*2*3}

Preparation and Arrangement of Education Materials of Pendulums for Service Seminar: Pendulum Snake and Bifilar Suspension Pendulum

Kouji MOCHIZUKI^{*1*2} Toshio FUNADA^{*2*3} Yusuke FUNATSU^{*3} Dai IWAMOTO^{*3}
Keisuke SHIMIZU^{*3} Takuya ISHIMOTO^{*4} Yoshiyuki NAKAMICHI^{*2*5} Katsuhisa OOBA^{*2*3}
Tatsumi MIYAUCHI^{*2*6} and Makoto KAWAKAMI^{*2*3}

Abstract: Education materials of pendulums are reexamined as a candidate for the service seminar to be held at secondary and elementary schools. A simple pendulum will be taught to the fifth grade students at elementary schools as a major subject of science, thus new feasibility studies on the teaching plans are much made in the 2009 academic year. Pendulum snake, which consists of ten simple pendulums of prescribed length and was recently provided by Prof.Doherty, is now adopted as a very nice device for various experiments in the service seminar. Before opening the seminar, some apparatuses of snake pendulum were made up with various parts and are tested in detail on account of theoretical results and with numerical simulations, which is reported in the fore part of the present paper. In the latter part, three oscillation modes of a bifilar pendulum are experimentally checked in comparison with the periods estimated theoretically by the linear oscillation theory. The agreement is sufficient in demonstrations, but the device will be improved to hold higher resolution which is available for the service seminar.

Keywords: Education Materials for Service Seminar, Pendulum Snake, Device for Multimedia Education Tool, Periodic and Chaotic Motion, Bifilar Suspension Pendulum

1 はじめに

小・中学校への出前授業の題材の一つとして「振り子」に取り組んでいる^[1]。振り子は、身近で観察・実験できる力学現象であり、以前から小学校の教材に組込まれている。特に 2009 年 4 月 1 日より小学校の「新しい学習指導要領^[2]の先行実施」が始まっており、その理科の実態を調査・研究して、その振り子の教程に出前授業を適合させる必要がある。また、小学校の教程が中学校でどのように展開され、高専の教程に繋がるのか、さらに高専の専門基礎教育との関わりをいま分析することも大きな教育改革の流れの中で重要なものと思われる。他方で、振り子は簡単に実現できる非線形現象であり、非線形力学・カオス工学の基礎教材としてむしろ新たに評価されている。その意味では、高専高学年・専攻科の専門教育の教程の高度化の一つとして、また国際的技術者教育推進の視点から、さらに学科や専門枠を越えた共同教育研究の課題として様々な工学分野の総合的視点から取り組むことが求められる。以上の観点に立ち、振り子に関する教材・教程を様々に調査し、前報^[1]でまとめた。そこで

は、特に Paul Doherty 教授の pendulum snake^{[3],[4]} が教材として非常に優れていると評価できる。それ故、小・中学校での出前教材の候補として pendulum snake への取組を提案した。それは、振り子の等時性の実験で、振り子の糸の長さ並びに初期角度による振動周期の差異を一目瞭然に理解できると思われるからである。その具体化に向け、本報告の前半では、pendulum snake を試作して実験を行い、教材の運用や教育効果を上げるための計画の進捗状況を報告する。本報告の後半では、長い円柱状の円木を用いて 2 点吊り振り子を構成し、その振動 mode 1, 2, 3 の周期を目視と簡易計測システム^[5]で測定したので、3 つの振動 mode の線形理論解析と比較し、出前授業での教材整備を検討する。

2 振り子教材 Pendulum snake^{[3],[4]}

10 個の振り子からなる実験装置 (Fig.1) の右端の振り子は糸の長さが一番長く、左側の振り子の糸は順次短くなっている。



Fig.1 Pendulum snake.^{[3],[4]}

^{*1} 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.

^{*2} 専攻科: Advanced Engineering Course.

^{*3} 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.

^{*4} 東芝テック株式会社, オート ID・プリンタ事業本部, 技術統括部, 第三技術部, TOSHIBA TEC CORPORATION, Hardware Design Group, Engineering Dept.III.

^{*5} 総合情報センター: Information Technology Center.

^{*6} 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.

右端の振子は 30 秒間に 15 回振動し，そこから左隣の振子は 30 秒間に 16 回振動し，左端の振子は 30 秒間に 24 回振動するように，単振子の周期の式 $T_1 = 2\pi\sqrt{L/g}$ に基づいて糸の長さを調整する．初期に錘を一斉に上げて静かに放すと，各錘は振子の固有周期で振動する．周期が互いに最小公倍数となる振子同士は位相が揃う時がある．また，全く揃わずカオス的に見える時もある．

i 番目の質量 m_i の錘を長さ L_i の糸の先に取り付け，支持点から吊り下げる． $\omega_i = \sqrt{g/L_i}$ ($g = 9.80665 \text{ m/sec}^2$ は重力加速度の国際標準値) とおき，鉛直軸と糸のなす角度を $\theta_i \equiv \theta_i(t)$ と表わすと，単振子の自由振動の運動方程式は次式で表わされる：

$$\ddot{\theta}_i + \omega_i^2 \sin(\theta_i) = 0 \quad (2.1)$$

この非線形微分方程式は解析的に解ける．(2.1) 式に $\dot{\theta}_i$ を掛けて，時間 t で積分すると，力学的 energy E_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) の保存則が導かれる：

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}_i^2 + \omega_i^2 [1 - \cos(\theta_i)] = \frac{E_i}{m_i} \quad (2.2)$$

10 個の振子の運動方程式は互いに独立で，個々に力学的 energy E_i が保存する．

上述のように，微小振動の周期 T_i を「30 sec で 15 回振動」から「30 sec で 24 回振動」までとし，次の計算式から角振動数 ω_i と糸の長さ L_i が求められる：

$$T_i = \frac{30}{14+i}, \quad \omega_i = \frac{2\pi}{T_i}, \quad L_i = \left(\frac{T_i}{2\pi}\right)^2 g \quad (2.3)$$

よって，10 個の振子について (2.3) 式の値は Table 1 に示され，Fig.4 の右側の pendulum snake として実装される．糸の長さは $L_1 = g/\pi^2 \sim 1 \text{ m}$ から $L_{10} \sim 0.39 \text{ m}$ となる．

Table 1 For the infinitesimal amplitude oscillation of a simple pendulum, the period $T_{L,i}$, angular frequency

$$\omega_i = 2\pi/T_{L,i} = \sqrt{g/L_i} \text{ and the length}$$

$$L_i = (T_{L,i}/(2\pi))^2 g, \text{ for } i = 1 \text{ to } 10.$$

$T_{L,i}$	ω_i	L_i	$T_{L,i}$	ω_i	L_i
$\frac{30}{15}$	π	$\frac{g}{\pi^2}$	$\frac{30}{16}$	$\frac{16\pi}{15}$	$\frac{225g}{256\pi^2}$
$\frac{30}{17}$	$\frac{17\pi}{15}$	$\frac{225g}{289\pi^2}$	$\frac{30}{18}$	6π	$\frac{25g}{36\pi^2}$
$\frac{30}{19}$	$\frac{19\pi}{15}$	$\frac{225g}{361\pi^2}$	$\frac{30}{20}$	4π	$\frac{9g}{16\pi^2}$
$\frac{30}{21}$	$\frac{7\pi}{5}$	$\frac{25g}{49\pi^2}$	$\frac{30}{22}$	$\frac{22\pi}{15}$	$\frac{225g}{484\pi^2}$
$\frac{30}{23}$	$\frac{23\pi}{15}$	$\frac{225g}{529\pi^2}$	$\frac{30}{24}$	8π	$\frac{25g}{64\pi^2}$

(2.1) 式の初期値を $\theta_i(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}_i(0) = 0$ と取ると，(2.2) 式を書き換えて，非線形振動の場合の半周期 $T_i/2$ を解析的に求めることができる：

$$\frac{T_i}{2} = \int_0^{\theta_0} \frac{\sqrt{2L_i/g}}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} d\theta \quad (2.4)$$

非線形振動の半周期 $T_i/2$ は，Table 2 に示され，線形振動の半周期 $T_{L,i}/2$ よりも長くなる．

Table 2 Half period $T_i/2$ given by (2.4), where the initial angle is taken as $\theta_i(0) = \pi/12, \pi/6$ and $\pi/3$. $T_{L,i}$ in the first column is the period predicted by the linear theory.

$T_{L,i}$	L_i/g	$T_i/2$ for $\pi/12$	$T_i/2$ for $\pi/6$	$T_i/2$ for $\pi/3$
$\frac{30}{15}$	$\frac{1}{\pi^2}$	1.0043006	1.0174088	1.0731820
$\frac{30}{16}$	$\frac{225}{256\pi^2}$	0.9415318	0.9538207	1.0061081
$\frac{30}{17}$	$\frac{225}{289\pi^2}$	0.8861476	0.8977136	0.9469253
$\frac{30}{18}$	$\frac{25}{36\pi^2}$	0.8369171	0.8478407	0.8943183
$\frac{30}{19}$	$\frac{225}{361\pi^2}$	0.7928689	0.8032174	0.847249
$\frac{30}{20}$	$\frac{9}{16\pi^2}$	0.7532254	0.7630566	0.8048865
$\frac{30}{21}$	$\frac{25}{49\pi^2}$	0.7173576	0.7267206	0.7665586
$\frac{30}{22}$	$\frac{225}{484\pi^2}$	0.6847504	0.6936878	0.7317150
$\frac{30}{23}$	$\frac{225}{529\pi^2}$	0.6549786	0.6635275	0.6999013
$\frac{30}{24}$	$\frac{25}{64\pi^2}$	0.6276879	0.6358805	0.6707388

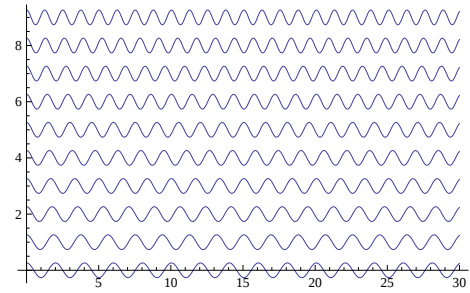


Fig.2a Time sequence of $\theta_i(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 30$.

$$\theta_i(0) = \pi/12 \text{ for } i = 1 \text{ to } 10.$$

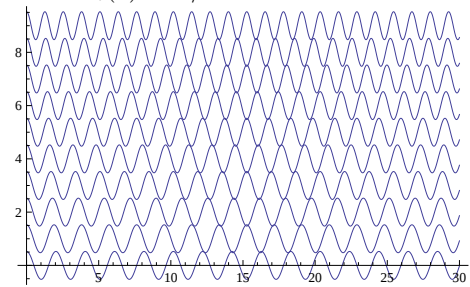


Fig.2b Time sequence of $\theta_i(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 30$.

$$\theta_i(0) = \pi/6 \text{ for } i = 1 \text{ to } 10.$$

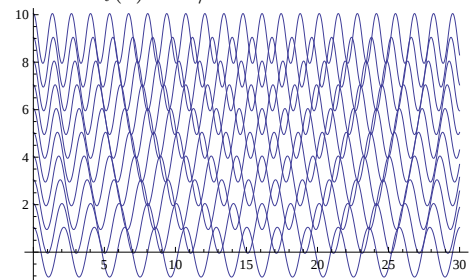


Fig.2c Time sequence of $\theta_i(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 30$.

$$\theta_i(0) = \pi/3 \text{ for } i = 1 \text{ to } 10.$$

振動波形は初期値ごとに Fig.2 に示され，周期の最小公倍数で振動の位相が揃うことが分かる．

Pendulum snake の解説書^[4] には，30 sec 間に 25 回振動する最長の振子から，30 sec 間に 34 回振動する最短の振子までの合計 10 個の振子により Pendulum snake の実験装置の作製が示されている (Table 3, Fig.3, Table 4, Fig.4 の左側の pendulum snake) ．

Table 3 For the infinitesimal amplitude oscillation of a simple pendulum, the period $T_{L,i}$, angular frequency

$$\omega_i = 2\pi/T_{L,i} = \sqrt{g/L_i} \text{ and the length}$$

$$L_i = (T_{L,i}/(2\pi))^2 g, \text{ for } i = 11 \text{ to } 20.$$

$T_{L,i}$	ω_i	L_i	$T_{L,i}$	ω_i	L_i
30	5π	$9g$	30	26π	$225g$
25	3	$25\pi^2$	26	15	$676\pi^2$
30	9π	$25g$	30	28π	$225g$
27	5	$81\pi^2$	28	15	$784\pi^2$
30	29π	$225g$	30	30π	g
29	15	$841\pi^2$	30	15π	$4\pi^2$
30	31π	$225g$	30	32π	$225g$
31	15	$961\pi^2$	32	15	$1024\pi^2$
30	11π	$25g$	30	34π	$225g$
33	5	$121\pi^2$	34	15	$1156\pi^2$

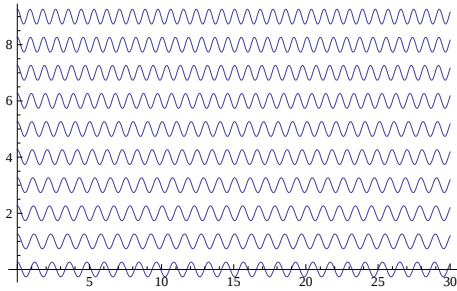


Fig.3a Time sequence of $\theta_i(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 30$.

$$\theta_i(0) = \pi/12 \text{ for } i = 11 \text{ to } 20.$$

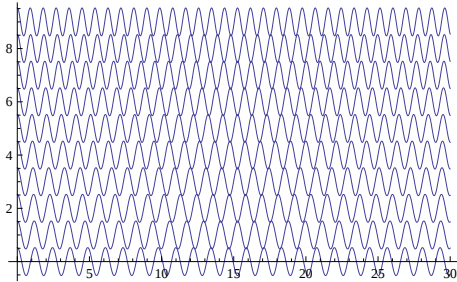


Fig.3b Time sequence of $\theta_i(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 30$.

$$\theta_i(0) = \pi/6 \text{ for } i = 11 \text{ to } 20.$$

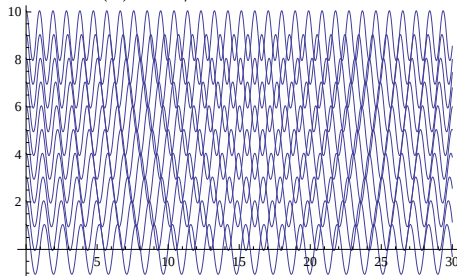


Fig.3c Time sequence of $\theta_i(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 30$.

$$\theta_i(0) = \pi/3 \text{ for } i = 11 \text{ to } 20.$$

Table 4 Half period $T_i/2$ given by (2.4), where the initial angle is taken as $\theta_i(0) = \pi/12, \pi/6$ and $\pi/3$. $T_{L,i}$ in the first column is the period predicted by the linear theory.

$T_{L,i}$	L_i/g	$T_i/2$ for $\pi/12$	$T_i/2$ for $\pi/6$	$T_i/2$ for $\pi/3$
30	9	0.6025803	0.6104453	0.6439092
25	$25\pi^2$			
30	225	0.5794042	0.5869666	0.6191435
26	$676\pi^2$			
30	25	0.5579448	0.5652271	0.5962122
27	$81\pi^2$			
30	225	0.5380182	0.5450404	0.5749189
28	$784\pi^2$			
30	225	0.5194658	0.5262459	0.5550941
29	$841\pi^2$			
30	1	0.5021503	0.5087044	0.5365910
30	$4\pi^2$			
30	225	0.4859519	0.4922946	0.5192816
31	$961\pi^2$			
30	225	0.4707659	0.4769104	0.5030541
32	$1024\pi^2$			
30	25	0.4565003	0.4624585	0.4878100
33	$121\pi^2$			
30	225	0.4430738	0.4488568	0.4734627
34	$1156\pi^2$			

先の Table 1, Fig.2, Table 2 の系 (系 A と呼ぶ) と後の Table 3, Fig.3, Table 4 の系 (系 B) の仕様に基づき，試作した pendulum snake を Fig.4 に示す．



Fig.4 Test apparatus of two pendulum snakes.

この装置 (Fig.4) で実験し，次の点が明らかになった：

- ◇ 初期角度が $\theta(0) = \pi/12$ (Fig.2(a), Fig.3(a)) の場合には，30 sec 後にほぼ規定回数の振動を行っている．しかし，厳密には線形振動理論での予測とは異なる．
- ◇ $\theta(0) = \pi/6$ (Fig.2(b), Fig.3(b)) と $\theta(0) = \pi/3$ (Fig.2(c), Fig.3(c)) に示されるように 30 sec 後の振子の振動回数も角度も異なる．つまり，有限な初期角度を与えて振動させると，線形理論の「振子の等時性」は成り立たず，初期角度に依存して振動回数も角度も異なることが Fig.2, Fig.3 から分かる．換言すれば，Fig.2, Fig.3 は振動の時間的記録であり，人間の記憶の補助に有効である．実験を体験することと共に実験で得られた情報を分析する tool として video は有効である．
- ◇ 系 A では，個々の振子の振動 (揺動) の振舞は理解し易いが，pendulum snake のイメージが冗長で掴み難い．

- ◇ 系 B では速く振動するので、個々の振子の振動は把握し難いが、振子が連なって蛇行する様子は観察し易い。
- ◇ 振子の振動の経過時間を振動回数で除して「平均周期を求める方法」は、簡単で且つ適当である。
- ◇ 長時間の測定の場合、振動の方向がずれたり、振幅の減衰が起こる。
- ◇ pendulum snake の実験中に隣り合う振子の糸が絡み合ったり、錘がぶつかることがある。糸を V 字型に張って横揺れを抑え、これらの問題が起き難くなるよう、実験装置の改良が求められる。

上述の「振子の長さ」と「初期角度」による振子の振動の特性は非常に理解し易い。しかし、「振子の長さは同じで、錘の質量が異なる場合の同時実験」は、さらに別個に装置を作製する必要がある。さらに、振子を吊るす支持棒は木製であるが、隣接する振子の振動が相互作用するような支持棒材に換えれば、pendulum snake は連成振動系となり、先に解析した問題を検証するために活用できる。

3 2点吊り振子の実験と理論解析の対応

2点吊り振子の PSD (Position Sensitive Detector) による簡易計測システム (Fig.5) と2点吊り振子の模式図 (Fig.6) に振動の3つの mode が示されている^[6]。2点吊り振子の左右の糸の長さ L_1, L_2 が等しい対称な場合には、糸の支持点間の間隔 $2c = 0 \sim 0.5$ m, 糸の結び目の間隔 $2a = 0.3$ m, 円木 (金属棒) の全長 $2b = 0.5$ m について、静止平衡状態での糸の傾き角 α について $\sin(\alpha) = (c - a)/L$ ($L = L_1 = L_2 = 0.3 \sim 0.5$ m) が成り立つ。この静止平衡の回りでの振動を記述するデカルト座標系 (x, y, z) と角度変数の取り方が Fig.6 に示されている。水平方向に x , 鉛直下方に z 軸として、支持点の位置 (x_0, z_0) は、ここでは一定値とする。糸の結び目の A, B 点の座標を表現し、一様密度の円木であるから、重心の位置 (x_G, z_G) が求められる。それを用いて、静止平衡状態の回りで、Fig.6(a) の mode 1 (遊動円木 mode), (b) mode 2 (ブランコ mode), (c) mode 3 (捩れ mode) が記述される。それぞれの振動 mode の固有角振動数は次の各小節に示される。

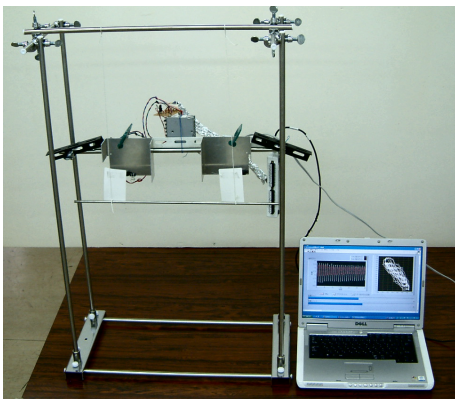


Fig.5 Measurement system with PSD (Position Sensitive Detector) for a bifilar suspension pendulum.

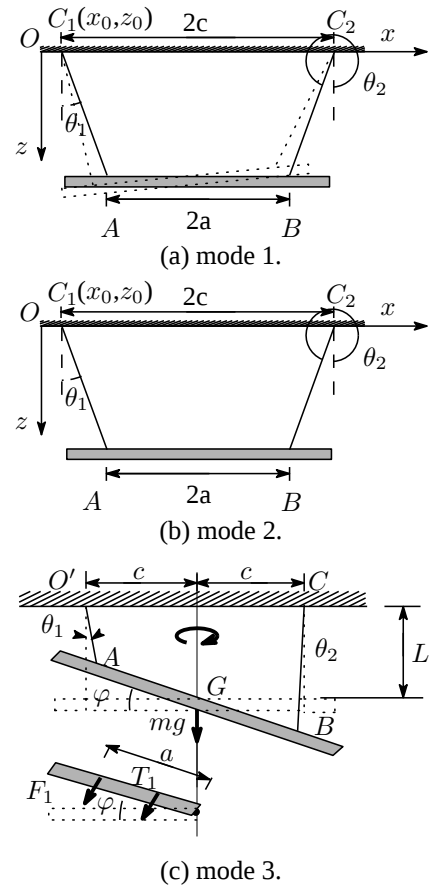


Fig.6 Three oscillation modes of bifilar suspension pendulum.

3.1 mode 1 (遊動円木 mode)^{[6],[7]}

Fig.6(a) に示される質量 m_1 , 慣性 moment $J = m_1 b^2/3$ の円木の重心の座標値の近似表現は、 x 座標は θ_{11} の1次の項まで、 z 座標は2次の項まで取り、次のようになる:

$$\begin{cases} x_G = x_0 + a\beta + h\theta_{11}, \\ z_G = z_0 + h - \frac{1}{2}(h - a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

これらにより、円木の運動は θ_{11} で記述される。

円木の線形化運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_{11}$ は次のように表される:

$$\mathcal{L}_{11} = \frac{m_1}{2} \dot{x}_G^2 + \frac{J}{2} \dot{\theta}_{11}^2 + m_1 g z_G \quad (3.2)$$

この重心の座標 (x_G, z_G) に (3.1) を代入し、 φ は θ_{11} , $\theta_{21} \equiv \theta_{21}(\theta_{11})$ で表されるので θ_{11} の1次の項まで取って回転運動の energy を表し、静止平衡解周りの攪乱 θ_{11} , $\theta_{21}(\theta_{11})$, φ_2 に対する Lagrange 関数が導かれる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11} = & \frac{m_1}{2} h^2 \dot{\theta}_{11}^2 + \frac{J}{2} \beta_1^2 \dot{\theta}_{11}^2 + m_1 g (h + z_0) \\ & + \frac{1}{2} m_1 g (a\theta_{222}\beta_1 - h) \theta_{11}^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

これにより、Lagrange の運動方程式が導かれる:

$$(m_1 h^2 + J \beta_1^2) \ddot{\theta}_{11} = -m_1 g (h - a\theta_{222}\beta_1) \theta_{11} \quad (3.4)$$

静止壁面の場合，円木は自由振動し，その複素固有角振動数 ω は次式で与えられる：

$$\omega^2 = \frac{m_1 g (h - a \theta_{222} \beta_1)}{m_1 h^2 + J \beta_1^2} \quad (3.5)$$

この $\omega^2 \geq 0$ は， h, θ_{222} が β の関数であるので， β を横軸に取り，慣性 moment J を parameter として，Fig.7 に図示される．並進振子 ($\beta = 1$) のときの固有角振動数は $\omega^2 = m_1 g L_1 / (m_1 L_1^2) = g / L_1 \equiv \omega_0^2$ となるので，これを基準に ω^2 / ω_0^2 と無次元表示されている． $J = 1, 2$ (無次元では $J / (m_1 L_1^2)$) では β と共に ω^2 は単調に増加する． $J < 1$ の場合， $\beta < 1$ では ω^2 の極大値， $\beta \geq 1$ では ω^2 の極小値が現れる． $J = 1/3$ は，一様な密度の円木の場合である．しかし， $J = 10$ では $\beta = 1$ で極大値 $\omega^2 / \omega_0^2 = 1$ を取る．なお，本実験装置 (Fig.5) では $J = m_1 / 48$ である．

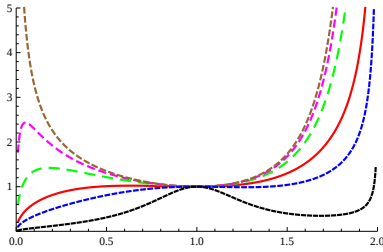


Fig.7 ω^2 / ω_0^2 versus β for $J = 1$ (solid), $1/3$ (dashed 1), 0.1 (dashed 2), 0 (dashed 3), 2 (dashed 4), 10 (dotted), with $m_1 = 1$.^[7]

3.2 mode 2 (ブランコ mode)

Fig.6(b) に示される系について， $h = L \cos(\alpha)$ と表し，Lagrange の運動方程式が導かれる：

$$m_1 h^2 \ddot{\theta}_{11} = -m_1 g h \theta_{11} \quad (3.6)$$

静止壁面の場合，円木は自由振動し，その複素固有角振動数 ω は次式で与えられる：

$$\omega^2 = \frac{g}{h} = \frac{g}{L \cos(\alpha)} \quad (3.7)$$

この mode 2 は単振子の振動と同じであり，単振子の振動に関しては先に理論的実験的に検討した^{[8], [9]} ので，それらを参照されたい．

3.3 mode 3 (捩れ mode)^[10]

Fig.6(c) に示される静止平衡状態から棒が捩れ振動する．鉛直面内の平面極座標系と共に，重心を含む水平面内にとった平面極座標系 (r, φ) (重心を通る鉛直軸を中心軸とする円柱座標 (r, φ, z)) を用いる．この場合は棒の重心の並進運動は，水平面内には生じず，高さ方向 (z 方向) に $z_G = L \cos(\theta)$ と表され，重心の位置 (x_G, y_G, z_G) は次式で表される： $(x_G, y_G, z_G) = (c, 0, L \cos(\theta))$ ．棒の重心を通る鉛直軸回りの回転運動 (捩れ運動) は水平面内で起こり，角度 $\varphi \equiv \varphi(t)$ で記述される．重心回りの棒の慣性 moment J は $J = 2\rho b^3/3 = mb^2/3$ と求められるので，回

転の運動 energy は $J\dot{\varphi}^2/2$ となる．ここで，重心回りに捩れた棒を上から観ると (Fig.6(c))，線分 $O'A, AG, GO$ が成す三角形に対する余弦定理が次式で表され， θ は φ の関数で表される：

$$L \sin(\theta) = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca \cos(\varphi)} \quad (3.8)$$

これは， θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) と φ ($-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$) の間の関係を与える． $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$ の場合，根号の前に負号を付ける．(3.8) 式を考慮して，重心回りの棒の捩れ運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_1$ は，運動 energy K_1 ，重力 potential energy U を用いて，次のように表される：

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 = K_1 - U, & E_1 = K_1 + U, & K_1 = \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2, \\ U = -mgz_G = -mgL \cos(\theta) \\ = -mg\sqrt{L^2 - (c^2 + a^2 - 2ca \cos(\varphi))} \end{cases} \quad (3.9)$$

ここで，potential energy U を静止平衡状態の回りで展開して 2 次まで取ると，線形理論の運動方程式が導かれる：

$$J\ddot{\varphi} = -\frac{mgca}{L \cos(\alpha)} \varphi \rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{3gca}{b^2 L \cos(\alpha)} \varphi \quad (3.10)$$

この運動方程式により，捩れ振動の固有角振動数は $\omega_{03}^2 = mgca / (JL \cos(\alpha)) = 3gca / (b^2 L \cos(\alpha))$ である．

4 実験結果の分析

2 点吊り振子の実験を行い，目視と data logger により mode 1, 2 の振動について，20 sec 間の振動回数を測定した (Table 5, 6)．これらより，周期等が算出できる．

Table 5 Data of oscillation times per 20 sec for mode 1 with

$2a = 0.3 \text{ m}, L = 0.3 \text{ m}$			
(i) $2c = 0.15 \text{ m}$	18.9	19	18.8
(ii) $2c = 0.30 \text{ m}$	18.7	19	19
(iii) $2c = 0.45 \text{ m}$	20	20	19.6

Table 6 Data of oscillation times per 20 sec for mode 1 and 2 with $2a = 0.3 \text{ m}, L = 0.4 \text{ m}$.

(i) $2c = 0.15 \text{ m}$					
(1)	16	16.3	16.3	16.5	16.4
(2)	16.1	16	16.2		
(ii) $2c = 0.30 \text{ m}$					
(1)	16.5	16	16.3	16.2	16.4
(2)	16	16.2	16.2		
(iii) $2c = 0.45 \text{ m}$					
(1)	16.7	17	16.5	16.8	17
(2)	16	16	16.3		

円木の静止平衡状態に mode 1 の攪乱を加え，左側の系の傾きの角度攪乱を θ_{11} と表すと，右側の系の傾き角度攪乱 θ_{22} は静止平衡解の回りで展開して，各場合ごとに次の

ように表わされ、 θ_{11}^2 の係数が θ_{22}^2 である:

Table5(i) : $\alpha = -0.25268$, $\theta_{22} = \theta_{11} + 0.129099\theta_{11}^2$,

Table5(ii) : $\alpha = 0$, $\theta_{22} = \theta_{11}$,

Table5(iii) : $\alpha = 0.25268$, $\theta_{22} = \theta_{11} - 0.387298\theta_{11}^2$,

Table6(i) : $\alpha = -0.188616$, $\theta_{22} = \theta_{11} + 0.0954427\theta_{11}^2$,

Table6(ii) : $\alpha = 0$, $\theta_{22} = \theta_{11}$,

Table6(iii) : $\alpha = 0.188616$, $\theta_{22} = \theta_{11} - 0.286328\theta_{11}^2$

Table 5(i)-(iii), 6(i)-(iii) の data を用い, mode 1, 2, 3 の固有角振動数, 周期, 振動数 ($\omega, T, 1/T$) を計算できる:

Table5(i) :	(1) 5.73219, 1.09612, 0.912306,
	(2) 5.81041, 1.08137, 0.924756,
	(3) 4.26976, 1.47155, 0.679554,
Table5(ii) :	(1) 5.71741, 1.09896, 0.909955,
	(2) 5.71741, 1.09896, 0.909955,
	(3) 5.94171, 1.05747, 0.945653,
Table5(iii) :	(1) 5.91421, 1.06239, 0.941275,
	(2) 5.81041, 1.08137, 0.924756,
	(3) 7.39545, 0.849602, 1.17702,
Table6(i) :	(1) 4.95828, 1.26721, 0.789135,
	(2) 4.99593, 1.25766, 0.795126,
	(3) 3.67124, 1.71146, 0.584296,
Table6(ii) :	(1) 4.95143, 1.26896, 0.788044,
	(2) 4.95143, 1.26896, 0.788044,
	(3) 5.14567, 1.22106, 0.818959,
Table6(iii) :	(1) 5.04622, 1.24513, 0.803131,
	(2) 4.99593, 1.25766, 0.795126,
	(3) 6.35878, 0.988112, 1.01203

$L = 0.3 \text{ m}, 0.4 \text{ m}$ による mode 1, 2 の振動数の値は, ここに示した線形理論値でも実験値 (Table 5, 6) でも有意な差異が確認できている. しかし, Table 5 内での c の値の変化による振動数の変化は実験値では明確には確認できず, 上掲の理論値でも差異が小さいことが分かる. 従って, 測定の有効性に期待が持てるが, 正確な評価のためには実験条件の工夫と再実験が望まれる.

5 おわりに

今回の「出前授業のための「振り子」教材の調査と整備」は, 各卒業研究で取組み, 実験, 計測, 理論解析, simulation を分担して, 言わば「共同技術者教育」を目指した取組であることは特に意義深い. pendulum snake と 2 点吊り振子の実験と simulation により卒業研究の進捗状況に応じて, 異分野の学問交流, 共同作業・資源利用や研究情報・成果の共有あるいは共著論文作成等を進め, 将来的な「共同技術者教育」の在り方を探り積み上げて行きたい. 出前授業に関する調査・研究は, さらに次報^[11]で扱う. 本報告の一部は, 先に講演発表したもの^[12]であることを付記する. 本研究遂行にあたり, 本校の校長リーダーシップ経費によ

る支援を受けたことをここに記して, 柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます.

参考文献

- [1] 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 石本 拓也, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠, 望月 孔二: “出前授業のための「振り子」教材の整備” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [2] 文部科学省: “新しい学習指導要領 第 2 章 各教科 第 4 節 理科” http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/syo/ri.htm
- [3] P. Doherty: “Pendulum snake – From order to chaos and back again –” <http://www.exo.net/~pauld/activities/pendulums/pendulumsnake.html>
- [4] Pendulum snake: http://www.exo.net/~donr/activities/Pendulum_Snake.pdf
- [5] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振り運動の基礎解析 (5): 2 点吊り振子の捩れ振動” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [6] 望月 孔二, 宮内 太積, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 川船 雄一郎, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子の基礎運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [7] 望月 孔二, 宮内 太積, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 川船 雄一郎, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [8] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 石本 拓也, 鈴木 健宏, 鈴木 寛里: “PSD による簡易計測システム試作のための振り運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 42 号 (2008), pp.57-66.
- [9] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 石本 拓也, 鈴木 健宏, 小代田 和己, 鈴木 寛里, 川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振り運動の基礎解析 (2): 数値解析” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.55-62.
- [10] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 中道 義之: “2 点吊り振子の捩り振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [11] 川上 誠, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 石本 拓也, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 望月 孔二: “出前授業のための「振り子」教材の整備: 工学的拡張と応用” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [12] 中道 義之, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠, 望月 孔二: “出前授業のための「振り子」教材の調査と整備” 第 29 回高専情報処理教育研究発表会 論文集第 29 号, pp.12-15.