

## 支持点の励振による球面振子の数値解析

中道 義之<sup>\*1\*2</sup> 大庭 勝久<sup>\*2\*3</sup> 舟田 敏雄<sup>\*2\*3</sup> 岩本 大<sup>\*3</sup> 清水 啓介<sup>\*3</sup> 船津 佑介<sup>\*3</sup>

### Numerical Analysis of a Spherical Pendulum Excited from Suspension Point

Yoshiyuki NAKAMICHI<sup>\*1\*2</sup> Katsuhisa OOBA<sup>\*2\*3</sup> Toshio FUNADA<sup>\*2\*3</sup>

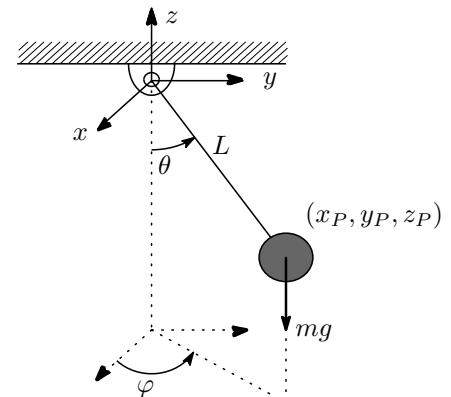
Dai IWAMOTO<sup>\*3</sup> Keisuke SHIMIZU<sup>\*3</sup> and Yusuke FUNATSU<sup>\*3</sup>

**Abstract:** A spherical pendulum may be addressed as a next step following after a simple pendulum in the study of mechanics, which is arranged for higher grade students to study education materials of PBL (Problem Based Learning). The bob position of the spherical pendulum given in Cartesian coordinates is converted in spherical coordinates, and the Lagrange function is computed symbolically to lead to the equations of motion, which can then be solved numerically. Based on the conservation of mechanical energy and angular momentum, discussed are the typical mechanical features in the results numerically obtained.

**Keywords:** Spherical Pendulum, Excitation from Suspension Point, Parametric Excitation

標  $(x_p, y_p, z_p)$  は次のように表わされる:

$$\begin{cases} x_p = x_0 + L_1 \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y_p = y_0 + L_1 \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z_p = -z_0 - L_1 \cos(\theta) \end{cases} \quad (2.1)$$



**Fig.1** Spherical pendulum.

(2.1) 式により, Lagrange 関数  $\mathcal{L}$  は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2) - mgz_p \\ &= \frac{m}{2} L_1^2 \dot{\theta}^2 + mg(L_1 \cos(\theta) + z_0) + \frac{m}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) \\ &\quad + mL_1 [\cos(\theta) (\cos(\varphi)\dot{x}_0 + \sin(\varphi)\dot{y}_0) - \sin(\theta)\dot{z}_0] \dot{\theta} \\ &\quad + mL_1 (-\sin(\theta) \sin(\varphi)\dot{x}_0 + \cos(\varphi) \sin(\theta)\dot{y}_0) \dot{\varphi} \\ &\quad + \frac{m}{2} L_1^2 \sin^2(\theta) \ddot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.2) 式より, Lagrange の運動方程式が求められる:

$$\begin{aligned} &- mL_1^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\varphi}^2 \\ &+ m(gL_1 \sin(\theta) + L_1 (\cos(\theta) \cos(\varphi) \ddot{x}_0 \\ &\quad + \cos(\theta) \sin(\varphi) \ddot{y}_0 - \sin(\theta) \ddot{z}_0)) + mL_1^2 \ddot{\theta} = 0, \quad (2.3) \\ &2mL_1^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta} \dot{\varphi} \\ &+ mL_1 (-\sin(\theta) \sin(\varphi) \ddot{x}_0 + \cos(\varphi) \sin(\theta) \ddot{y}_0) \\ &+ mL_1^2 \sin^2(\theta) \ddot{\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

支持点が  $x$  方向に周期的に励振される場合, 支持点の座

## 2 支持点の励振

質量  $m$  の質点が長さ  $L$  (=一定) の糸により支持点に繋がれている (Fig.1)。重力は下向きに作用し, 重力加速度は  $g$  である。支持点を原点とし,  $z$  軸を鉛直上向き, 水平面を  $(x, y)$  面とするデカルト座標系  $(x, y, z)$  を取り, 質点の位置を  $(x_p, y_p, z_p)$  ( $x_p \equiv x_p(t)$ ,  $y_p \equiv y_p(t)$ ,  $z_p \equiv z_p(t)$ ,  $t$ : 時間) とする。鉛直軸と糸のなす角度  $\theta$  ( $\theta \equiv \theta(t)$ ), 水平面内で  $x$  軸から取った角度  $\varphi$  ( $\varphi \equiv \varphi(t)$ ) を用いて球座標系  $(r, \theta, \varphi)$  に座標変換される。そして、支持点の座標  $(x_0, y_0, -z_0)$  が時間の関数として与えられる場合, 錘の座

<sup>\*1</sup> 総合情報センター: Information Technology Center.

<sup>\*2</sup> 専攻科: Advanced Engineering Course.

<sup>\*3</sup> 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.

標は次式で表わされる:

$$x_0 = X_0 \sin(\omega t), \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0 \quad (2.5)$$

(2.5), (2.4), (2.3) 式により, この場合の運動方程式は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} m(-L_1 X_0 \omega^2 \cos(\theta) \cos(\varphi) \sin(\omega t) + g L_1 \sin(\theta)) \\ -m L_1^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\varphi}^2 + m L_1^2 \ddot{\theta} = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} m L_1 X_0 \omega^2 \sin(\omega t) \sin(\theta) \sin(\varphi) + 2 m L_1^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta} \dot{\varphi} \\ + m L_1^2 \sin^2(\theta) \ddot{\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

支持点が  $y$  方向に周期的に励振される場合, 支持点の座標は次式で表わされる:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = Y_0 \sin(\omega t), \quad z_0 = 0 \quad (2.8)$$

(2.8), (2.4), (2.3) 式により, この場合の運動方程式は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} m(g L_1 \sin(\theta) - L_1 Y_0 \omega^2 \cos(\theta) \sin(\omega t) \sin(\varphi)) \\ -m L_1^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\varphi}^2 + m L_1^2 \ddot{\theta} = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} -m L_1 Y_0 \omega^2 \cos(\varphi) \sin(\omega t) \sin(\theta) + 2 m L_1^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta} \dot{\varphi} \\ + m L_1^2 \sin^2(\theta) \ddot{\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

支持点が  $z$  方向に周期的に励振される場合, 支持点の座標は次式で表わされる:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = Z_0 \sin(\omega t) \quad (2.11)$$

(2.11), (2.4), (2.3) 式により, この場合の運動方程式は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} m(g L_1 \sin(\theta) + L_1 Z_0 \omega^2 \sin(\omega t) \sin(\theta)) \\ -m L_1^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\varphi}^2 + m L_1^2 \ddot{\theta} = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$2 m L_1^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta} \dot{\varphi} + m L_1^2 \sin^2(\theta) \ddot{\varphi} = 0 \quad (2.13)$$

支持点が鉛直面内で周期的に励振される場合, 支持点の座標は次式で表わされる:

$$x_0 = R_0 \sin(\omega t), \quad y_0 = 0, \quad z_0 = R_0 \cos(\omega t) \quad (2.14)$$

(2.14), (2.4), (2.3) 式により, この場合の運動方程式は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} m\left(g L_1 \sin(\theta) + \frac{1}{4} L_1 (-2 R_0 \omega^2 \sin(\omega t - \theta) \right. \\ \left. + 2 R_0 \omega^2 \sin(\omega t + \theta) \right. \\ \left. - R_0 \omega^2 \sin(\omega t - \theta - \varphi) - R_0 \omega^2 \sin(\omega t + \theta - \varphi) \right. \\ \left. - R_0 \omega^2 \sin(\omega t - \theta + \varphi) - R_0 \omega^2 \sin(\omega t + \theta + \varphi))) \right. \\ \left. - \frac{m}{2} L_1^2 \sin(2\theta) \dot{\varphi}^2 + m L_1^2 \ddot{\theta} = 0, \right. \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} m L_1 R_0 \omega^2 \sin(\omega t) \sin(\theta) \sin(\varphi) + 2 m L_1^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \dot{\theta} \dot{\varphi} \\ + m L_1^2 \sin^2(\theta) \ddot{\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

支持点が水平面内で周期的に励振される場合, 支持点の座標は次式で表わされる:

$$x_0 = R_1 \cos(\omega t), \quad y_0 = R_1 \sin(\omega t), \quad z_0 = 0 \quad (2.17)$$

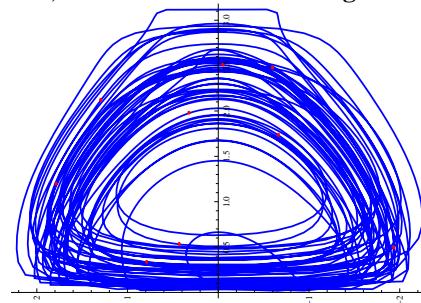
(2.17), (2.4), (2.3) 式により, この場合の運動方程式は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} m\left(\frac{1}{2} L_1 (-R_1 \omega^2 \cos(\omega t - \theta - \varphi) \right. \\ \left. - R_1 \omega^2 \cos(\omega t + \theta - \varphi)) + g L_1 \sin(\theta) \right. \\ \left. - \frac{m}{2} L_1^2 \sin(2\theta) \dot{\varphi}^2 + m L_1^2 \ddot{\theta} = 0, \right. \end{aligned} \quad (2.18)$$

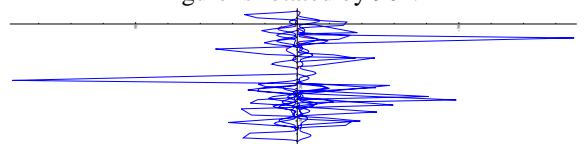
$$\begin{aligned} \frac{m}{2} L_1 (-R_1 \omega^2 \cos(\omega t - \theta - \varphi) \\ + R_1 \omega^2 \cos(\omega t + \theta - \varphi)) + m L_1^2 \sin(2\theta) \dot{\theta} \dot{\varphi} \\ + m L_1^2 \sin^2(\theta) \ddot{\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

## 2.1 Exciting in the $x$ -direction

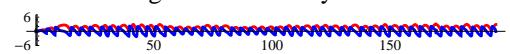
球面振子の規定値を  $g = 1, m = 1, L_1 = 1, X_0 = 0.5, \omega = 1$  とおく。微分方程式系 (2.6), (2.7) 式の初期値を  $\theta(0) = 0.1, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0.1$  と平衡点の近傍に設定して, (2.6), (2.7) 式を時間  $0 \leq t \leq t_e$  ( $t_e = 2\pi \times 31$ ) で数値積分した結果を Fig.2a-2f に示す。



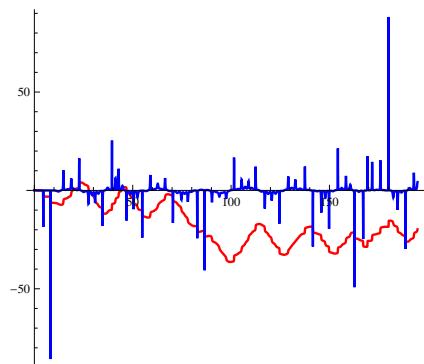
**Fig.2a** Phase portrait of  $(\theta, \dot{\theta})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The figure is rotated by  $90^\circ$ .



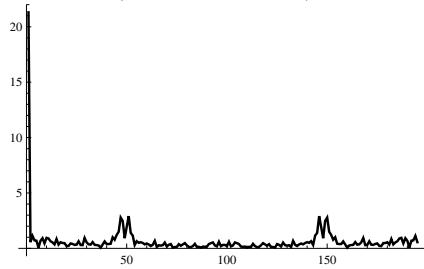
**Fig.2b** Phase portrait of  $(\varphi, \dot{\varphi})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The figure is rotated by  $90^\circ$ .



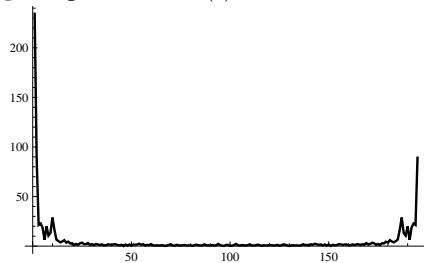
**Fig.2c** Time sequence of  $\theta(t)$  and  $\dot{\theta}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).



**Fig.2d** Time sequence of  $\varphi$  and  $\dot{\varphi}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).

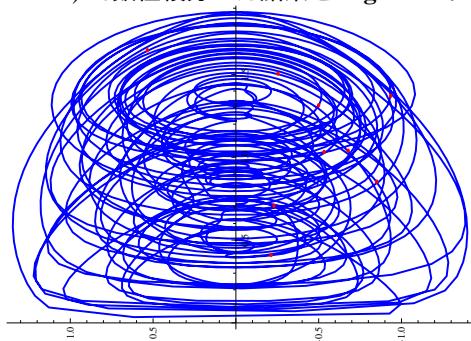


**Fig.2e** Spectrum of  $\theta(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

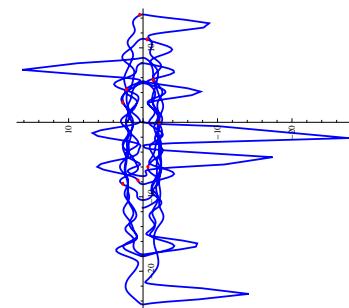


**Fig.2f** Spectrum of  $\varphi(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

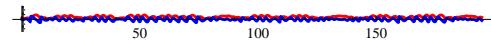
球面振子の規定値を  $g = 1, m = 1, L_1 = 1, X = 0.5, \omega = 1.32$  とおく。微分方程式系 (2.18), (2.19) 式の初期値を  $\theta(0) = 0.5, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0.1$  と平衡点の近傍に設定して、(2.18), (2.19) 式を時間  $0 \leq t \leq t_e$  ( $t_e = 2\pi \times 31$ ) で数値積分した結果を Fig.4a-4f に示す。



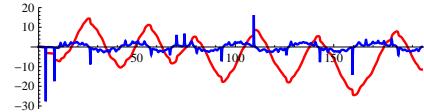
**Fig.4a** Phase portrait of  $(\theta, \dot{\theta})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The figure is rotated by  $90^\circ$ .



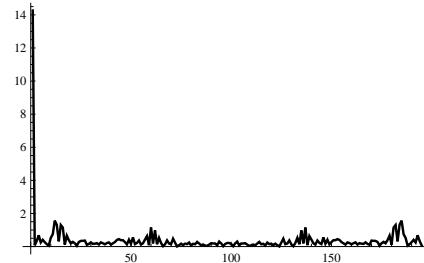
**Fig.4b** Phase portrait of  $(\varphi, \dot{\varphi})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The figure is rotated by  $90^\circ$ .



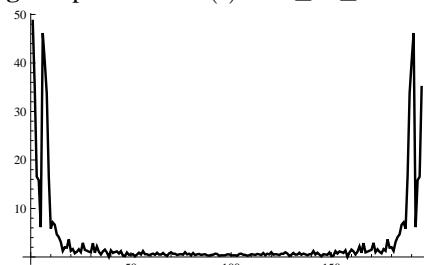
**Fig.4c** Time sequence of  $\theta(t)$  and  $\dot{\theta}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).



**Fig.4d** Time sequence of  $\varphi$  and  $\dot{\varphi}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).



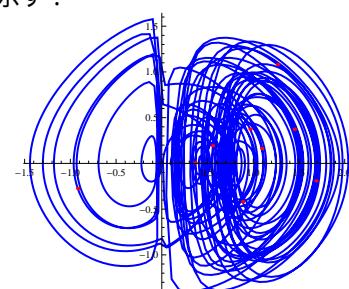
**Fig.4e** Spectrum of  $\theta(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

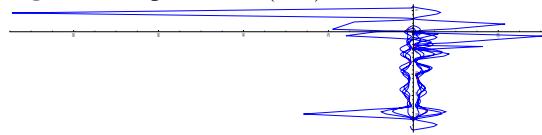
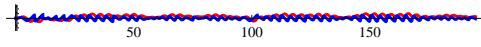
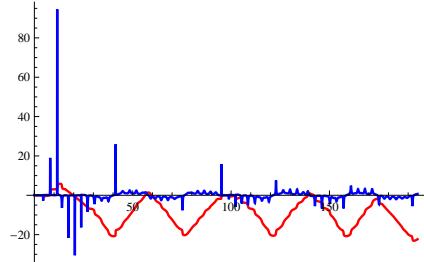
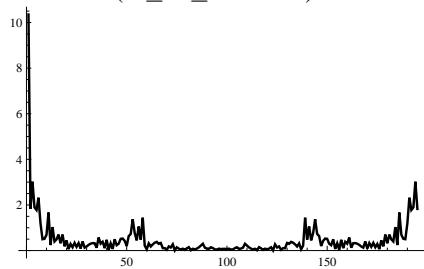
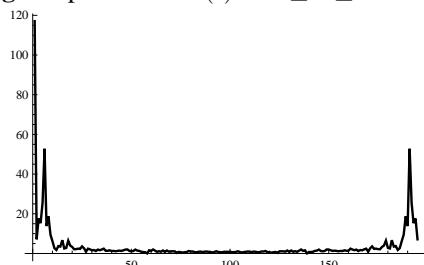
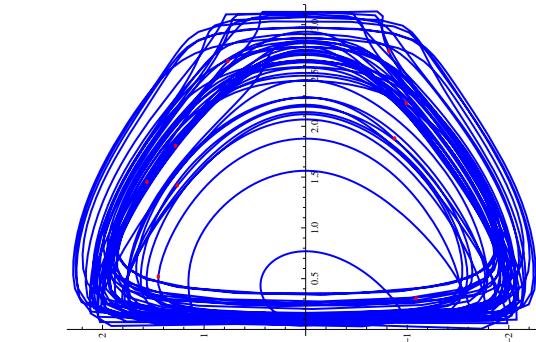
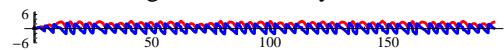
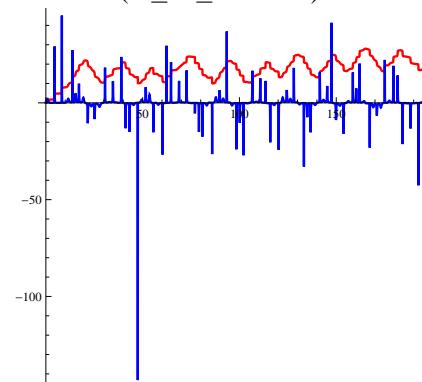
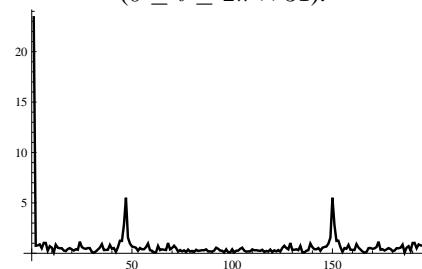
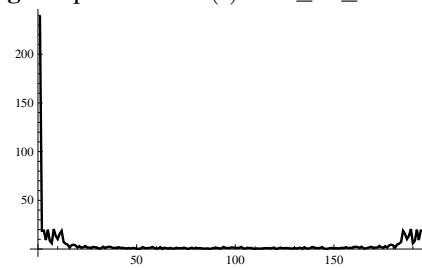


**Fig.4f** Spectrum of  $\varphi(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

## 2.2 Exciting with damper

球面振子の規定値を  $g = 1, m = 1, L_1 = 1, X_0 = 0.5, \omega = 1, cd_1 = 0.01, cd_2 = 0.01$  とおく。微分方程式系 (2.6), (2.7) 式の初期値を  $\theta(0) = 0.1, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0.1$  と平衡点の近傍に設定して、(2.6), (2.7) 式を時間  $0 \leq t \leq t_e$  ( $t_e = 2\pi \times 31$ ) で数値積分した結果を Fig.5a-5f に示す。



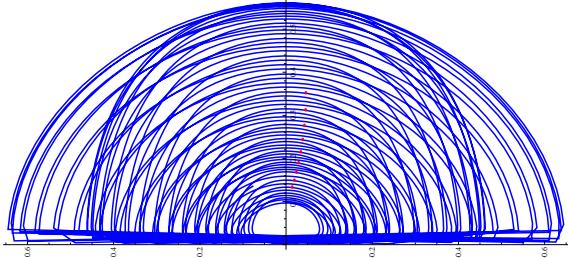
**Fig.5a** Phase portrait of  $(\theta, \dot{\theta})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .**Fig.5b** Phase portrait of  $(\varphi, \dot{\varphi})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The figure is rotated by  $90^\circ$ .**Fig.5c** Time sequence of  $\theta(t)$  and  $\dot{\theta}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).**Fig.5d** Time sequence of  $\varphi$  and  $\dot{\varphi}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).**Fig.5e** Spectrum of  $\theta(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .**Fig.5f** Spectrum of  $\varphi(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .**Fig.6a** Phase portrait of  $(\theta, \dot{\theta})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The figure is rotated by  $90^\circ$ .**Fig.6b** Phase portrait of  $(\varphi, \dot{\varphi})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The figure is rotated by  $90^\circ$ .**Fig.6c** Time sequence of  $\theta(t)$  and  $\dot{\theta}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).**Fig.6d** Time sequence of  $\varphi$  and  $\dot{\varphi}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).**Fig.6e** Spectrum of  $\theta(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .**Fig.6f** Spectrum of  $\varphi(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

### 2.3 Exciting in the $y$ direction

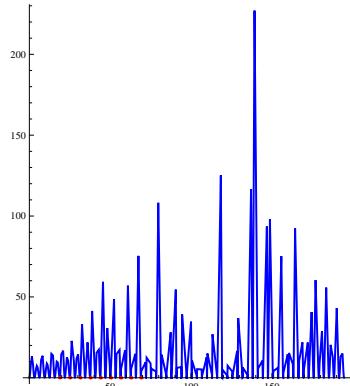
球面振子の規定値を  $g = 1$ ,  $m = 1$ ,  $L_1 = 1$ ,  $Y_0 = 0.5$ ,  $\omega = 1$  とおく。微分方程式系 (2.9), (2.10) 式の初期値を  $\theta(0) = 0.1$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0.1$  と平衡点の近傍に設定して (2.9), (2.10) 式を時間  $0 \leq t \leq t_e$  ( $t_e = 2\pi \times 31$ ) で数値積分した結果を Fig.6a-6f に示す。

## 2.4 Exciting in the $z$ direction

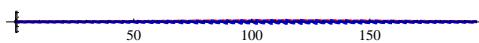
球面振子の規定値を  $g = 1, m = 1, L_1 = 1, Z_0 = 0.5, \omega = 1$  とおく。微分方程式系 (2.12), (2.13) 式の初期値を  $\theta(0) = 0.1, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0.1$  と平衡点の近傍に設定して、(2.12), (2.13) 式を時間  $0 \leq t \leq t_e$  ( $t_e = 2\pi \times 31$ ) で数値積分した結果を Fig.7a-7f に示す



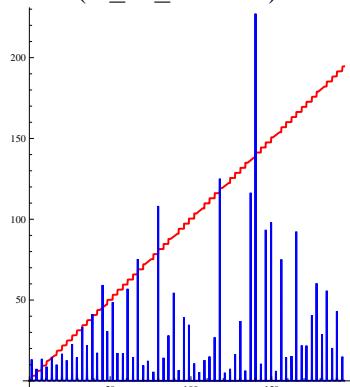
**Fig.7a** Phase portrait of  $(\theta, \dot{\theta})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The figure is rotated by  $90^\circ$ .



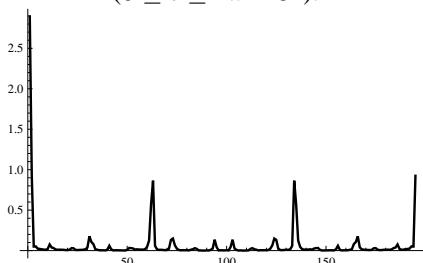
**Fig.7b** Phase portrait of  $(\varphi, \dot{\varphi})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .



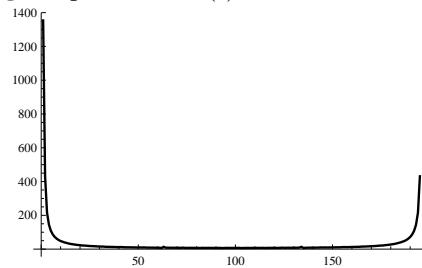
**Fig.7c** Time sequence of  $\theta(t)$  and  $\dot{\theta}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).



**Fig.7d** Time sequence of  $\varphi$  and  $\dot{\varphi}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).

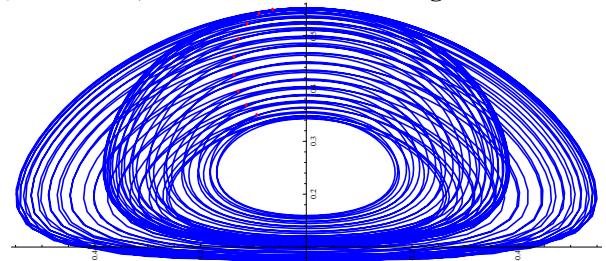


**Fig.7e** Spectrum of  $\theta(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

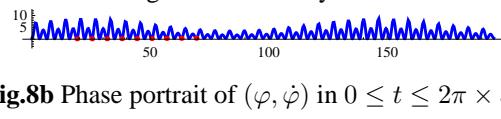


**Fig.7f** Spectrum of  $\varphi(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

球面振子の規定値を  $g = 1, m = 1, L_1 = 1, Z = 0.5, \omega = 1$  とおく。微分方程式系 (2.18), (2.19) 式の初期値を  $\theta(0) = 0.1, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0.1$  と平衡点の近傍に設定して、(2.18), (2.19) 式を時間  $0 \leq t \leq t_e$  ( $t_e = 2\pi \times 31$ ) で数値積分した結果を Fig.8a-8f に示す。



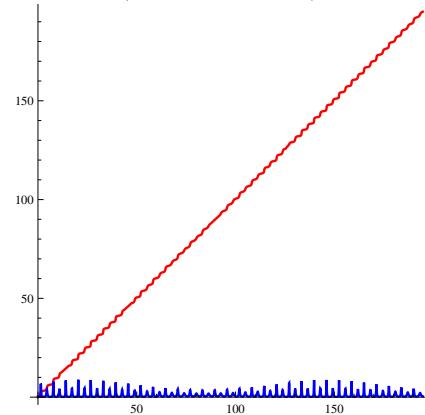
**Fig.8a** Phase portrait of  $(\theta, \dot{\theta})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The figure is rotated by  $90^\circ$ .



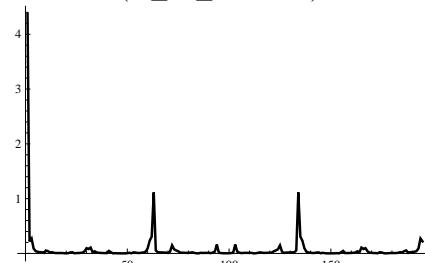
**Fig.8b** Phase portrait of  $(\varphi, \dot{\varphi})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .



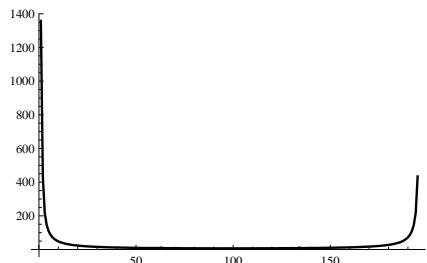
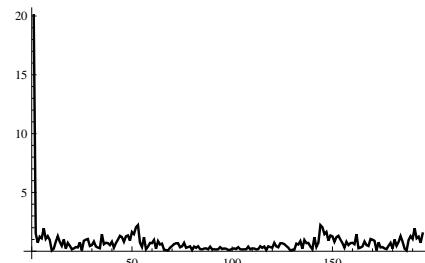
**Fig.8c** Time sequence of  $\theta(t)$  and  $\dot{\theta}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).



**Fig.8d** Time sequence of  $\varphi$  and  $\dot{\varphi}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).

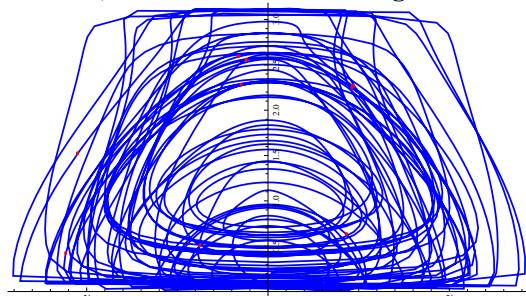
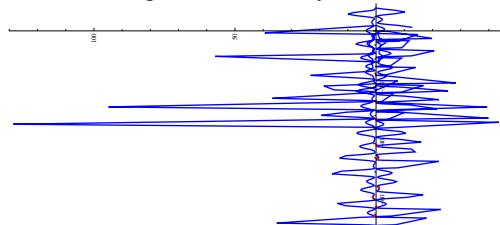
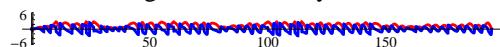
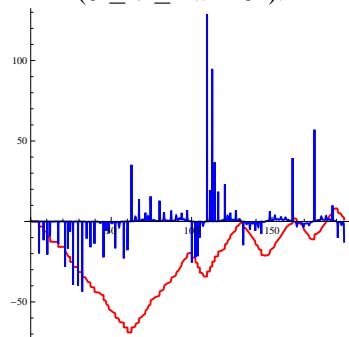
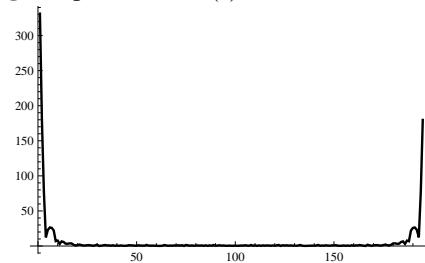


**Fig.8e** Spectrum of  $\theta(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

**Fig.8f** Spectrum of  $\varphi(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .**Fig.9e** Spectrum of  $\theta(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

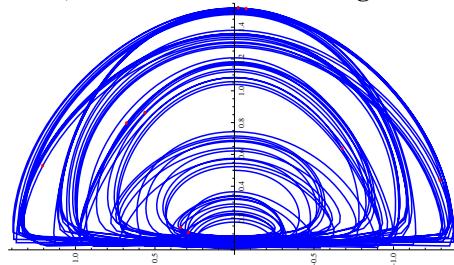
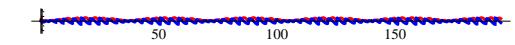
## 2.5 Exciting in the $R_0$ direction

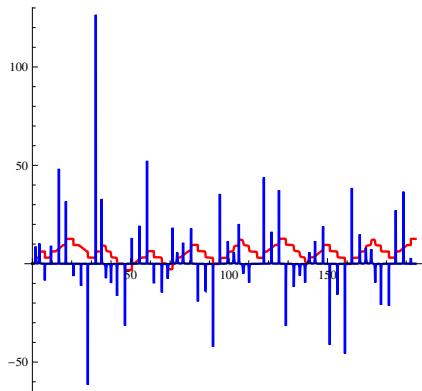
球面振子の規定値を  $g = 1, m = 1, L_1 = 1, R_0 = 0.5, \omega = 1$  とおく。微分方程式系 (2.15), (2.16) 式の初期値を  $\theta(0) = 0.1, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0.1$  と平衡点の近傍に設定して、(2.15), (2.16) 式を時間  $0 \leq t \leq t_e$  ( $t_e = 2\pi \times 31$ ) で数値積分した結果を Fig.9a-9f に示す。

**Fig.9a** Phase portrait of  $(\theta, \dot{\theta})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The figure is rotated by  $90^\circ$ .**Fig.9b** Phase portrait of  $(\varphi, \dot{\varphi})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The figure is rotated by  $90^\circ$ .**Fig.9c** Time sequence of  $\theta(t)$  and  $\dot{\theta}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).**Fig.9d** Time sequence of  $\varphi$  and  $\dot{\varphi}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).**Fig.9f** Spectrum of  $\varphi(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

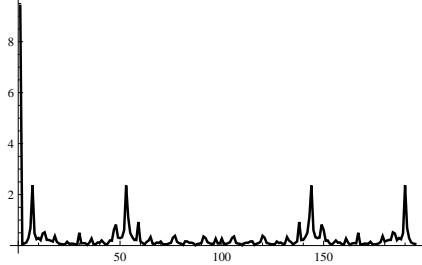
球面振子の規定値を  $g = 1, m = 1, L_1 = 1, R_0 = 0.5, \omega = 0.6$  とおく。微分方程式系 (2.18), (2.19) 式の初期値を  $\theta(0) = 0.5, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0.1$  と平衡点の近傍に設定して、(2.18), (2.19) 式を時間  $0 \leq t \leq t_e$  ( $t_e = 2\pi \times 31$ ) で数値積分した結果を Fig.10a-10f に示す。

球面振子の規定値を  $g = 1, m = 1, L_1 = 1, R_0 = 0.5, \omega = 0.75$  とおく。微分方程式系 (2.18), (2.19) 式の初期値を  $\theta(0) = 0.5, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0.1$  と平衡点の近傍に設定して、(2.18), (2.19) 式を時間  $0 \leq t \leq t_e$  ( $t_e = 2\pi \times 31$ ) で数値積分した結果を Fig.11a-11f に示す。

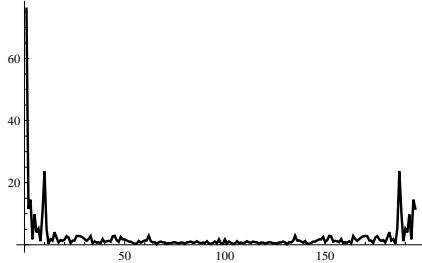
**Fig.11a** Phase portrait of  $(\theta, \dot{\theta})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The figure is rotated by  $90^\circ$ .**Fig.11b** Phase portrait of  $(\varphi, \dot{\varphi})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The figure is rotated by  $90^\circ$ .**Fig.11c** Time sequence of  $\theta(t)$  and  $\dot{\theta}(t)$  versus  $t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).



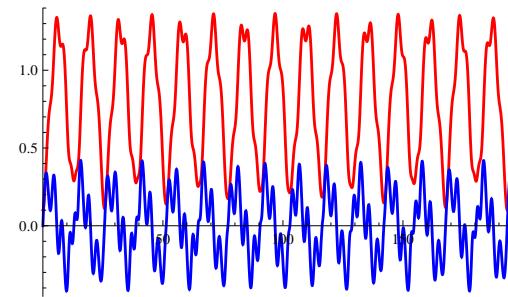
**Fig.11d** Time sequence of  $\varphi$  and  $\dot{\varphi}(t)$  versus  $t$   
( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).



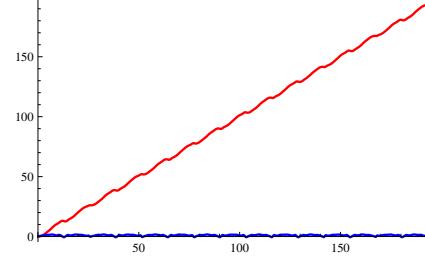
**Fig.11e** Spectrum of  $\theta(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .



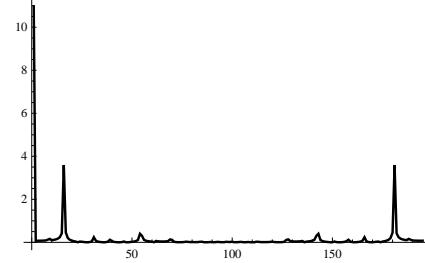
**Fig.11f** Spectrum of  $\varphi(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .



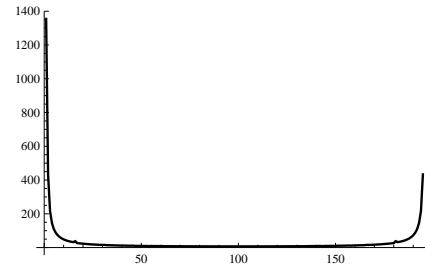
**Fig.12c** Time sequence of  $\theta(t)$  and  $\dot{\theta}(t)$  versus  $t$   
( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).



**Fig.12d** Time sequence of  $\varphi$  and  $\dot{\varphi}(t)$  versus  $t$   
( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).



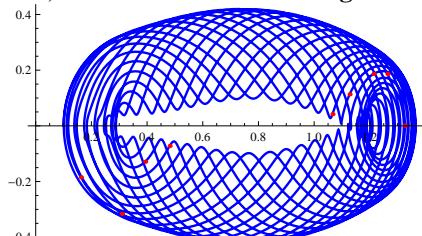
**Fig.12e** Spectrum of  $\theta(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .



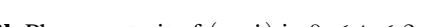
**Fig.12f** Spectrum of  $\varphi(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

## 2.6 Exciting in the $R_1$ direction

球面振子の規定値を  $g = 1, m = 1, L_1 = 1, R_1 = 0.5, \omega = 1$  とおく。微分方程式系 (2.18), (2.19) 式の初期値を  $\theta(0) = 0.1, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0.1$  と平衡点の近傍に設定して、(2.18), (2.19) 式を時間  $0 \leq t \leq t_e$  ( $t_e = 2\pi \times 31$ ) で数値積分した結果を Fig.12a-12f に示す。

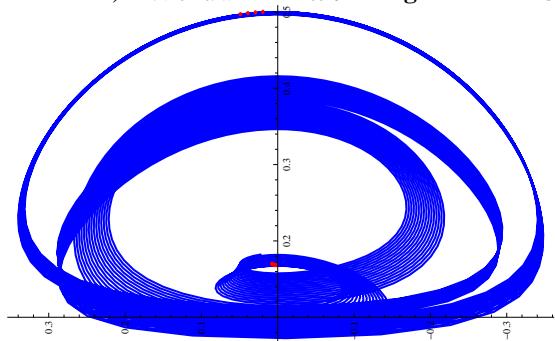


**Fig.12a** Phase portrait of  $(\theta, \dot{\theta})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

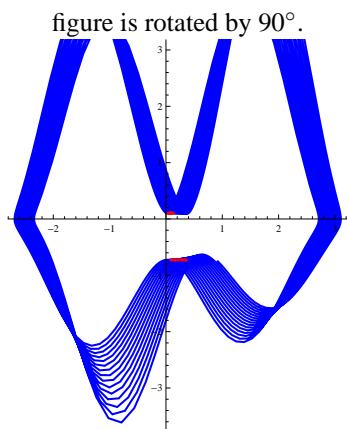
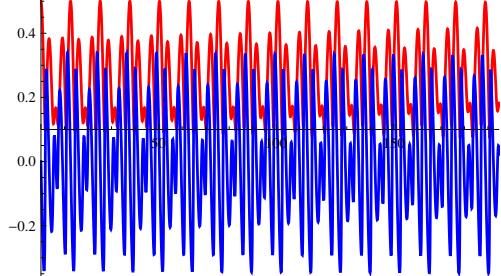
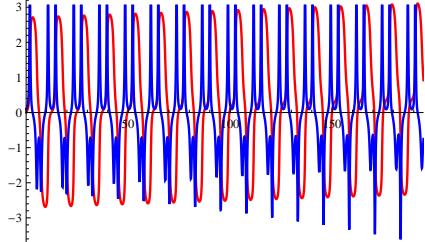
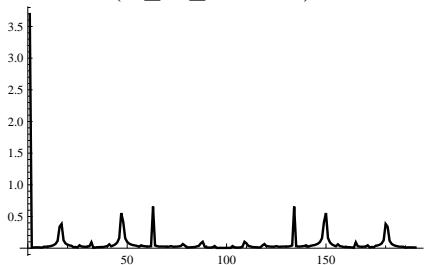
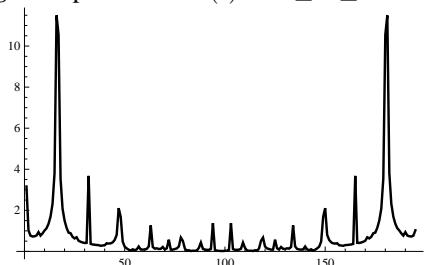


**Fig.12b** Phase portrait of  $(\varphi, \dot{\varphi})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

球面振子の規定値を  $g = 1, m = 1, L_1 = 1, R_1 = 0.5, \omega = 0.5$  とおく。微分方程式系 (2.18), (2.19) 式の初期値を  $\theta(0) = 0.5, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0.1$  と平衡点の近傍に設定して、(2.18), (2.19) 式を時間  $0 \leq t \leq t_e$  ( $t_e = 2\pi \times 31$ ) で数値積分した結果を Fig.13a-13f に示す。

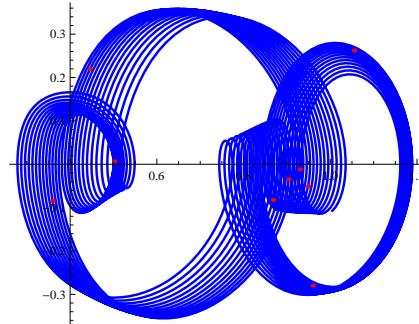
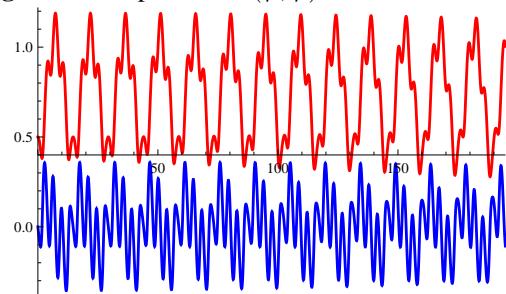
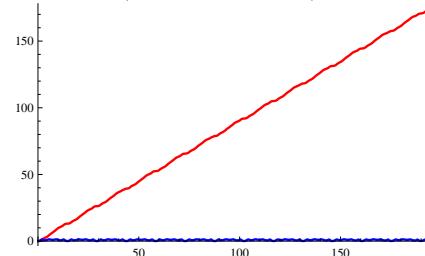
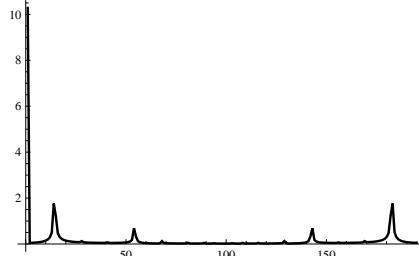
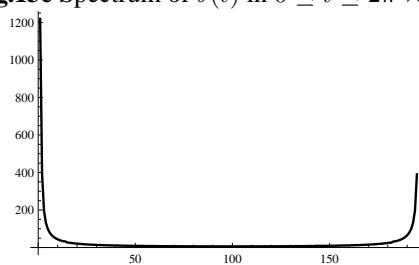


**Fig.13a** Phase portrait of  $(\theta, \dot{\theta})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ . The

**Fig.13b** Phase portrait of  $(\varphi, \dot{\varphi})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .**Fig.13c** Time sequence of  $\theta(t)$  and  $\dot{\theta}(t)$  versus  $t$   
( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).**Fig.13d** Time sequence of  $\varphi$  and  $\dot{\varphi}(t)$  versus  $t$   
( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).**Fig.13e** Spectrum of  $\theta(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .**Fig.13f** Spectrum of  $\varphi(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

球面振子の規定値を  $g = 1, m = 1, L_1 = 1, R_1 = 0.5, \omega = 0.9$  とおく。微分方程式系 (2.18), (2.19) 式の初期値を  $\theta(0) = 0.5, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0.1$  と平衡

点の近傍に設定して、(2.18), (2.19) 式を時間  $0 \leq t \leq t_e$  ( $t_e = 2\pi \times 31$ ) で数値積分した結果を Fig.13a-13f に示す。

**Fig.13a** Phase portrait of  $(\theta, \dot{\theta})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .**Fig.13b** Phase portrait of  $(\varphi, \dot{\varphi})$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .**Fig.13c** Time sequence of  $\theta(t)$  and  $\dot{\theta}(t)$  versus  $t$   
( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).**Fig.13d** Time sequence of  $\varphi$  and  $\dot{\varphi}(t)$  versus  $t$   
( $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ ).**Fig.13e** Spectrum of  $\theta(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .**Fig.13f** Spectrum of  $\varphi(t)$  in  $0 \leq t \leq 2\pi \times 31$ .

### 3 おわりに

本報告では、球面振子の理論解析を行い、その解析過程を Mathematica で数式処理して運動方程式を導出し、それを数値解析した。本報告により、非線形力学・カオス工学の新たな教材を提供できたものと思われる。さらに、球面振子に関する力学的問題は続報<sup>[14]</sup>で数値解析される。

本報告の一部は、先に講演発表したこと<sup>[10],[11]</sup>を付記する。

本研究遂行にあたり、本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して、柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます。

### 参考文献

- [1] 瀬川 広海, 濱田 英隆: “701 強制球面振り子のカオス制御に関する研究” 日本機械学会九州支部講演論文集 Vol.2003, No.56(2003), pp.187-188.
- [2] 谷林 衛, 太田 治: “連成振動の実験” 大学の物理教育 **11**, No.3(2005)1115, pp.138-141.
- [3] T.J. Bridges and K.V. Georgiou: “Computing global orbits of the forced spherical pendulum” *Physica D: Non-linear Phenomena* **165** (2002), pp.1-11.
- [4] R.A. Nelson and M. G. Olsson: “The pendulum - Rich physics from a simple system”. *American Journal of Physics* **54** (2) (February 1986), pp.112-121. Retrieved on 2008-10-29.
- [5] 田中 芳夫, 上田 哲史, 川上 博: “球面振子を有するクレーンのシミュレーション法” 日本機械学会論文集. C編 59(559) pp.814-818 19930325
- [6] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 石本 拓也, 鈴木 健宏, 鈴木 寛里: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 42 号 (2008), pp.57-66 .
- [7] 舟田 敏雄, 中道 義之, 内堀 晃彦, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 望月 孔二, 川上 誠, 宮内 太積: “技術者教育のための工学数理の力学教材の改定 (9): バネ振子の非線形振動の数値解析” 沼津高専研究報告 第 43 号 (2009), pp.131-138.
- [8] 内堀 晃彦, 中道 義之, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 望月 孔二, 川上 誠, 宮内 太積: “技術者教育のための工学数理の力学教材の改定 (10): バネ振子の強制非線形振動の数値解析” 沼津高専研究報告 第 43 号 (2009), pp.187-192.
- [9] 望月 孔二, 宮内 太積, 内堀 晃彦, 川上 誠, 中道 義之, Mazni Al Irfan, 川船 雄一郎, 佐々木 隆吾, 舟田 敏雄: “PSD 簡易計測システム試作と 2 点吊り振子の実験・解析” 電子情報通信学会 2009 年総合大会 2009 年 3 月 17 日(火)~20 日(金) 愛媛大(松山市)3 月 18 日(水)午前, 「D-15 教育工学」(一般セッション), 講演番号: D-15-24 講演論文集 p.202. file: d\_15\_024.pdf
- [10] 中道義之, 舟田敏雄, 岩本大, 清水啓介, 船津佑介, 大庭勝久, 宮内太積, 川上誠, 望月孔二: “出前授業のための「振子」教材の調査と整備” 第 29 回高専情報処理教育研究発表会 論文集第 29 号, pp.12-15.
- [11] 中道義之, 舟田敏雄, 岩本大, 清水啓介, 船津佑介, 大庭勝久: “球面振子の simulation: Mathematica による教材作成” 第 29 回高専情報処理教育研究発表会 論文集第 29 号, pp.16-19.
- [12] 中道 義之, 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介: “球面振子の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [13] 中道 義之, 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介: “2 つの球面振子の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [14] 大庭 勝久, 中道 義之, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介: “変形球面振子の解析とその強制減衰振動の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [15] 中道 義之, 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介: “変形円錐振子の解析とその強制減衰振動の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.