球面振子の数値解析

中道 義之[*1*2] 大庭 勝久[*2*3] 舟田 敏雄[*2*3] 岩本 大[*3] 清水 啓介[*3] 船津 佑介[*3]

Numerical Analysis of a Spherical Pendulum

Yoshiyuki NAKAMICHI[*1*2] Katsuhisa OOBA[*2*3] Toshio FUNADA[*2*3]
Dai IWAMOTO[*3] Keisuke SHIMIZU[*3] and Yusuke FUNATSU[*3]

Abstract: A spherical pendulum may be addressed as a next step following after a simple pendulum in the study of mechanics, which is arranged for higher grade students to study education materials of PBL (Problem Based Learning). The bob position of the spherical pendulum given in Cartesian coordinates is converted in spherical coordinates, and the Lagrange function is computed symbolically to lead to the equations of motion, which can then be solved numerically. Based on the conservation of mechanical energy and angular momentum, discussed are the typical mechanical features in the results numerically obtained.

Keywords: Spherical Pendulum, Free Oscillation

1　はじめに

初等教育から高等教育を通して，単振子は理科 (初等教育)・理科/物理学 (中等教育)・物理学/力学 (高等教育) の代表的な現象であり，観察・実験・計測・理論解析・simulation と様々な学習教材を提供している．教程が進むに連れ，単振子の線形自由振動，非線形自由振動，parametric 励振，強制振動等へと展開される．また，力学的課題のみならず，工学的課題・応用が非常に多い．さらに，単振子は，支持点から一定距離で束縛される質点の円周上の運動であるので，基本的な回転運動・振動の代表的現象例と言える．単振子は鉛直面内の運動と仮定されているが，それは球面上の運動の特別な場合となる．そのような流れに沿って，球面振子は入門段階に続く次の教程と位置づけられる．しかも，強制球面振子の場合にもカオスが発生する[1]–[5] ので，多くの関心が持たれている．また，クレーン[6] やマニピュレータ等をはじめ，ロボット工学・多体運動力学 (multi body dynamics，機構解析) の基礎教材とも位置づけられる．

　ここでは，球面振子の自由振動を工学数理教材並びに一連の振子の研究報告[7],[8] に沿って PBL (Problem Based Learning) 向けに解説し，Mathematica により Lagrange 関数を求めて運動方程式を導出し数値解析する．

2　球面振子の運動方程式

工学数理の「円錐振子」教材を紹介する．

　円錐振子「質量 m の質点が長さ L (= 一定) の糸により固定点に繋がれている．重力は下向きに作用し，重力加速度は $g = 9.80665$ m/sec^2 である．この質点の水平面内の運動 (円錐振子，conical pendulum) を解析せよ．」

　固定点を原点として，z 軸を鉛直上向きとし，水平面を (x, y) 面とするデカルト座標系 (x, y, z) を取り，質点の位置を (x_P, y_P, z_P) ($x_P \equiv x_P(t)$, $y_P \equiv y_P(t)$, $z_P \equiv z_P(t)$, t：時間) とする (**Fig.1**)．この系の Lagrangian $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} = T - U, \tag{2.1}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 + \dot{z}_P^2\right),\quad U = mg(L + z_P) \tag{2.2}$$

(T：運動 energy，U：potential energy) と表され，力学的 energy $E = T + U$ の保存が導かれる．質点は一定長さの糸に拘束されるので，次式が成り立つ:

$$L = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2} = \mathrm{constant} \tag{2.3}$$

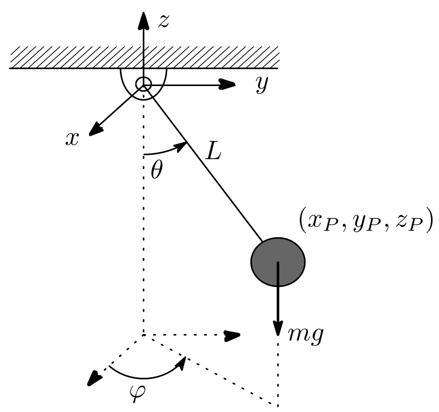

Fig.1 Spherical pendulum.

　鉛直軸と糸のなす角度を θ ($\theta \equiv \theta(t), 0 \le \theta \le \pi$) と表し，水平面内で x 軸から取った角度 φ ($\varphi \equiv \varphi(t),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$) を用いて球座標系 (r, θ, φ) への座標変換:

$$\begin{cases} x_P = L\sin(\theta)\cos(\varphi),\quad y_P = L\sin(\theta)\sin(\varphi), \\ z_P = -L\cos(\theta) \end{cases} \tag{2.4}$$

を行うと，(2.2) 式の T と U は，球座標系で表される:

$$T = \frac{mL^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2\right), \tag{2.5}$$

$$U = mgL(1 - \cos(\theta)) \tag{2.6}$$

これらと Lagrange 関数 (2.1) により，Lagrange の運動方程式は次の 2 つの微分方程式で表わされ，φ 方向の角運動

[*1] 総合情報センター: Information Technology Center.
[*2] 専攻科: Advanced Engineering Course.
[*3] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.

量 $p_\varphi = mL^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}$ の保存が導かれる:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$$

$$\rightarrow\ mL^2\ddot{\theta} = mL^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2 - mgL\sin(\theta), \tag{2.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\ \rightarrow\ mL^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sin^2(\theta)\dot{\varphi}\right] = \frac{\mathrm{d}p_\varphi}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\rightarrow \sin^2(\theta)\dot{\varphi} = \text{constant}\ \ (\equiv\alpha) \tag{2.8}$$

(2.8) 式を用いて，(2.7) 式を整理する:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L\sin^3(\theta)}\left[\frac{L\alpha^2}{g}\cos(\theta) - \left(1-\cos^2(\theta)\right)^2\right] \tag{2.9}$$

よって，(2.9) 式の右辺を zero とする θ は，右辺のカギ括弧内を zero とおいて求められる．その θ の方程式は区間 $-1 \le \cos(\theta) \le 1$ において，正の 1 実根を持つ．その解を θ_A と表し，初期条件が次式で与えられるとする:

$$\theta(t) = \theta_A = \text{constant} > 0,\ \ \dot{\theta}(t) = 0\ \text{ at } t = 0, \tag{2.10}$$

$$\varphi(t) = 0,\ \ \dot{\varphi}(t) = \text{constant}\ \ (\equiv\Omega)\ \text{ at } t = 0 \tag{2.11}$$

これらと (2.7), (2.8) 式から，初期角加速度 $\ddot{\theta}(0)$ を得る:

$$\ddot{\theta}(0) = \sin(\theta_A)\left[\Omega^2\cos(\theta_A) - g/L\right] \tag{2.12}$$

従って，θ_A と Ω が関係式:

$$\cos(\theta_A) = \frac{g}{L\Omega^2} \le 1 \tag{2.13}$$

を満たせば θ の初期角加速度が zero になる．この θ_A, 一定角速度 Ω による運動は，水平面内の回転運動である:

$$\begin{cases} x_P(t) = L\sin(\theta_A)\cos(\Omega t), \\ y_P(t) = L\sin(\theta_A)\sin(\Omega t), \\ z_P(t) = -L\cos(\theta_A) = \text{constant} \end{cases} \tag{2.14}$$

もし θ_A, Ω の関係式 (2.13) が満たされないと，初期角加速度が non-zero となり，θ, φ は時間的に変化する．もし初期に $p_\varphi \ne 0$ なら球面上を運動し，一般に，θ, φ は時間的に変化する．$\dot{\varphi}$ が一定で，(2.13) 式を満たせば円錐振子となり，(2.13) 式を満たさないと $\theta(t)$ が時間的に変化する．初期に $p_\varphi = 0$ なら鉛直面内の質点の運動 (単振子) となる．

3　球面振子の数値解析

3.1　球面振子の運動方程式の Mathematica による導出

さて，(2.1) 式から出発してデカルト座標系から球座標系への変換を行い，Lagrange の運動方程式 (2.7), (2.8) を導出・整理して，その初期値問題を数値的に解く過程の生成を Mathematica を用いて次のように遂行する:

◇ (2.4) 式を用い T, U を球座標系で表現した (2.5), (2.6) 式を導出し $\mathcal{L}$ を整理する．

◇ $\mathcal{L}$ から Lagrange の運動方程式 (2.7), (2.8) 式を得る．

◇ 運動方程式 (2.7), (2.8) を数値計算 program の所定の位置に copy し，parameter 値と初期値や計算時間間隔等を設定する．数値計算する．

◇ 計算結果から位相面図を描く．

◇ 計算結果から各変数の時系列図を描く．

◇ 計算結果から各変数の spectrum 図を描く．

球面振子の Lagrange の運動方程式の導出までの Mathematica の program List-01 が次に示される．

```
xp[t_]:=x0[t] + L1Sin[θ[t]]Cos[φ[t]];
yp[t_]:=y0[t] + L1Sin[θ[t]]Sin[φ[t]];
zp[t_]:=z0[t] − L1Cos[θ[t]];
T1 = Collect[ TrigReduce[
(D[xp[t], t]^2 + D[yp[t], t]^2 + D[zp[t], t^2)], {θ′[t], φ′[t]}]
L11 = Collect[ TrigExpand[
 m1/2(D[xp[t], t]^2 + D[yp[t], t]^2 + D[zp[t], t]^2)−
 m1gzp[t]], {g, θ′[t], φ′[t], m1, L0, L1}]
p1 = Collect [TrigExpand [D [L11, θ′[t]]] , {θ′[t], φ′[t]}]
p2 = Collect [TrigExpand [D [L11, φ′[t]]] , {θ′[t], φ′[t]}]
f1 = Collect[TrigExpand[D[L11, θ[t]]], {g, L1, L2}]
f2 = Collect[TrigExpand[D[L11, φ[t]]], {g, L1, L2}]
eq1 = Collect[TrigExpand[D[p1, t] − f1],
 {θ″[t], θ′[t], φ″[t], φ′[t], m1, g, L1, L0}]
eq2 = Collect[TrigExpand[D[p2, t] − f2],
 {θ″[t], θ′[t], φ″[t], φ′[t], m1, g, L1, L0}]
```

以上により，球面振子の自由振動の運動方程式 (eq1, eq2) が導かれる．この運動方程式を Mathematica の Manipulate 機能を用いて実現できる．その demonstration の例を次の文章と **Fig.2** に示す[5]．

“The top of a pendulum of length ℓ hangs from the origin. The mass m at the bottom end of the pendulum has coordinates $x = \ell\sin(\theta)\cos(\varphi)$, $y = \ell\sin(\theta)\sin(\varphi)$, $z = -\ell\cos(\theta)$, where the vector $\boldsymbol{r}$ from the origin to m is at an angle θ to the negative z axis. The spherical coordinates of m are (ℓ, θ, φ) with $\partial_t\ell = 0$. The Lagrange function and equations give θ, φ, and $\boldsymbol{r}$. The integration constants are θ, φ, θ, and the angular momentum p_φ. The movement of the spherical pendulum is constrained to the spherical shell between θ_{min} and θ_{max} for all φ values. The pendulum cannot reach the singular points $\theta = 0$ and $\theta = \pi$ for $p_\varphi \ne 0$. When the angular momentum vanishes, the pendulum moves in a plane.”

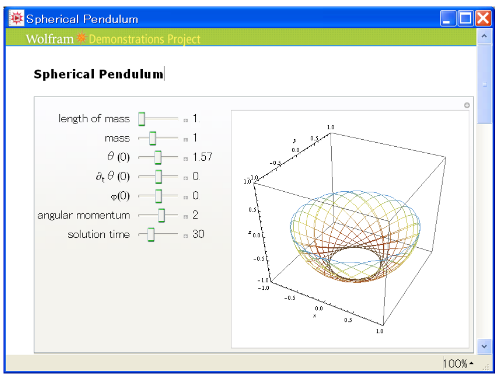

Fig.2 “Manipulate” of Spherical Pendulum[5] displayed on Mathematica 7.

List-01 により導かれた $\theta(t)$, $\varphi(t)$ の運動方程式 (2.7), (2.8) を数値計算 program に代入し **NDSolve** (微分方程式

の数値解析 program) で初期値 ($\theta(0) = 0.3, \dot{\varphi}(0) = 0.01$) について計算時間 $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$ で数値計算し，時間 $2\pi \times 5 \leq t \leq 2\pi \times 12$ での数値解を以下に示す．固有角振動数で自由振動が起こっており，**Fig.3**, **4** は位相面図であり，**Fig.5**, **6** は時系列図で 14 周期の振動が見られ，**Fig.7** では力学的 energy 保存状態が確認でき，**Fig.8** の spectrum 図では複数の振動成分から成っていることが分かる．

```
g = 1; m1 = 1; L1 = 1; ts = 2 * Pi * 5; te = 2 * Pi * 12;
sol = SetAccuracy[ NDSolve[
{gL1m1Sin[θ[t]] − L1^2m1Cos[θ[t]]Sin[θ[t]]
φ′[t]^2 + L1^2m1θ″[t] == 0,
 2L1^2m1Cos[θ[t]]Sin[θ[t]]θ′[t]φ′[t]+
L1^2m1Sin[θ[t]]^2φ″[t] == 0, θ[0] == 0.3,
θ′[0] == 0, φ[0] == 0, φ′[0] == 0.01}, {θ, φ},
{t, 0, te}, MaxSteps → ∞], 20];
```

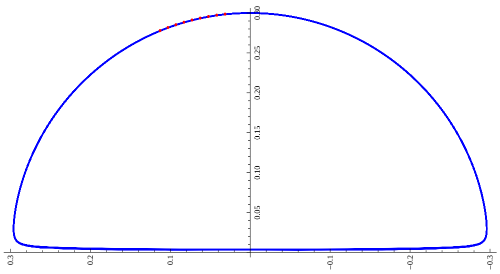

Fig.3 Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $2\pi \times 5 \leq t \leq 2\pi \times 12$. The figure is rotated by 90°.

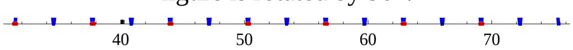

Fig.4 Phase portrait of $(\varphi, \dot{\varphi})$ in $2\pi \times 5 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

//途中省略//

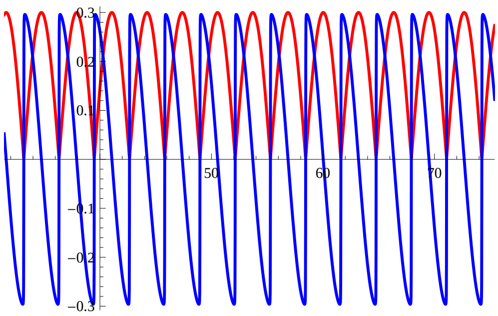

Fig.5 Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t ($2\pi \times 5 \leq t \leq 2\pi \times 12$).

//途中省略//

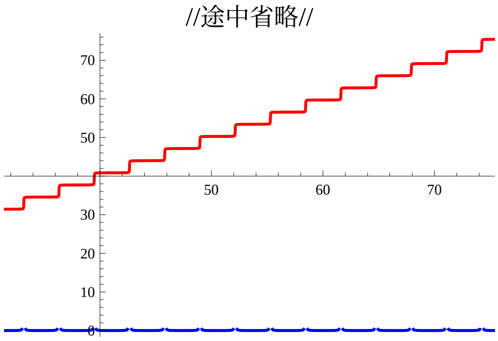

Fig.6 Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t ($2\pi \times 5 \leq t \leq 2\pi \times 12$).

//途中省略//

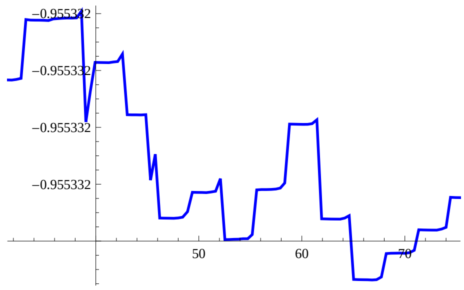

Fig.7 Mechanical energy E versus t ($2\pi \times 5 \leq t \leq 2\pi \times 12$).

//途中省略//

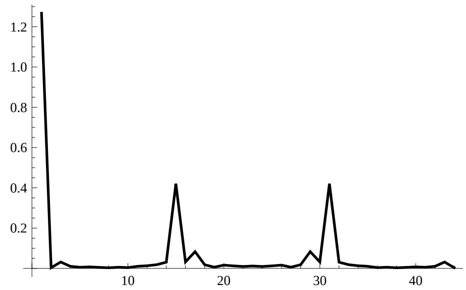

Fig.8 Spectrum of $\theta(t)$ in $2\pi \times 5 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

//以下省略//

3.2　数値計算例

同様にして，初期値 ($\theta(0) = 0.3, \dot{\varphi}(0) = 0$) について計算時間 $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$ で数値計算した数値解の時間 $2\pi \times 5 \leq t \leq 2\pi \times 12$ での振舞は **Fig.9a-9d** に示される．この時間で 7 周期の振動 (固有角振動数での自由振動) が起こっていることが分かる．また，調和振動成分は 1 つであり，単振子の振動であることが確認できる．同一時間で 7 周期と先の 14 周期の振動が起こった原因は角運動量 p_φ の値に因る．

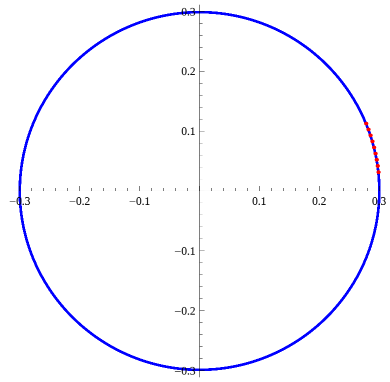

Fig.9a Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $2\pi \times 5 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

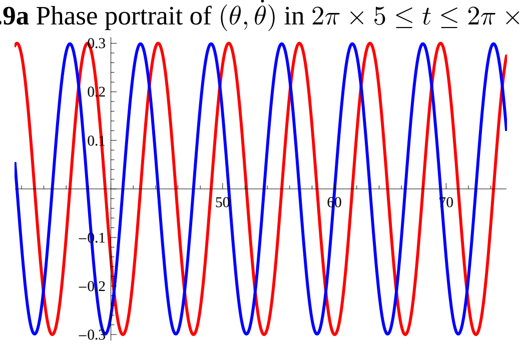

Fig.9b Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t ($2\pi \times 5 \leq t \leq 2\pi \times 12$).

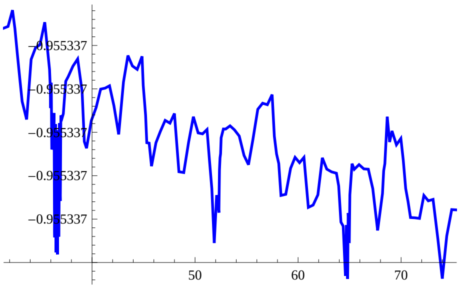

Fig.9c Mechanical energy E versus t ($2\pi \times 5 \leq t \leq 2\pi \times 12$).

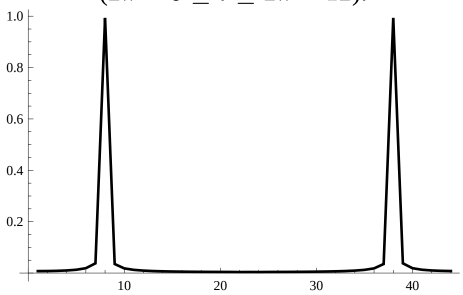

Fig.9d Spectrum of $\theta(t)$ in $2\pi \times 5 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

3.3　角運動量 p_φ と有効 potential energy U_e

角運動量 p_φ は保存量であるので，その初期値で規定できる．$\theta(0) = \pi/6$ と設定して，$\dot{\varphi}(0)$ の値を変化させて，$\alpha_1 = \dot{\varphi}(0)\sin^2(\theta(0))$ と $E_1(0)$ 並びに有効 potential energy U_e ($\equiv p_\varphi^2/(2mL^2\sin^2(\theta)) + U$) の θ に関する最小値 U_{min} を **Table 1** に示し，U_e の形状を **Fig.10a, 10b** に示す．$p_\varphi = 0$ では単振子となり，$-\pi < \theta < \pi$ (平面極座標) で振動する．$p_\varphi \neq 0$ のとき U_e は $U_e(0) \to \infty$ を境に 2 分化され，球座標系表現では $0 < \theta < \pi$ の領域でのみ振動する．後者の領域での振動周期は単振動の周期の半分となったので，先に同一時間で 14 周期と 7 周期の振動が観測された．

Table 1 Typical values of $\dot{\varphi}(0)$, $\alpha_1 = \dot{\varphi}(0)\sin^2(\theta(0))$, $E_1(0)$ and U_{min}, for given values of $\theta(0) = \pi/6$.

$\dot{\varphi}(0)$	α_1	$E_1(0)$	U_{min} at θ
10^{-6}	2.5×10^{-7}	0.133975	2.5×10^{-7} at 0.0005
0.0005	0.000125	0.133975	0.000125 at 0.011
0.001	0.00025	0.133975	0.00025 at 0.0158
0.1	0.025	0.135225	0.0251 at 0.1583
1	0.25	$9/8 - \sqrt{3}/2$	0.258333 at 0.504788
2	0.5	$3/2 - \sqrt{3}/2$	0.535689 at 0.718938
4	1	$3 - \sqrt{3}/2$	1.16525 at 1.01821

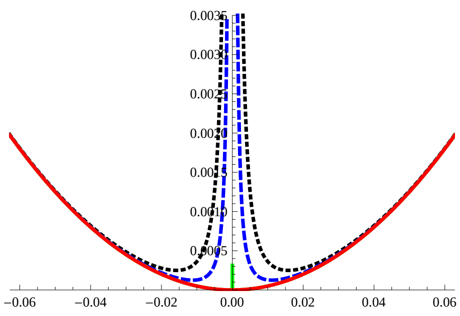

Fig.10a Potential energy U_e versus θ ($-\pi/50 \leq \theta \leq \pi/50$) $\dot{\varphi}(0) = 0$ (bottom solid line), $\dot{\varphi}(0) = 10^{-6}$ (solid line), $\dot{\varphi}(0) = 0.0005$ (dashed line), $\dot{\varphi}(0) = 0.001$ (dotted line).

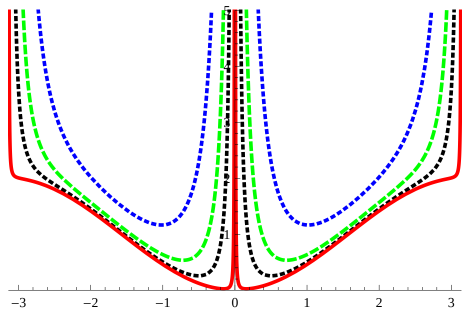

Fig.10b Potential energy U_e versus θ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) $\dot{\varphi}(0) = 0.1$ (bottom solid line), $\dot{\varphi}(0) = 1$ (dotted line), $\dot{\varphi}(0) = 2$ (dashed line), $\dot{\varphi}(0) = 4$ (dotted line).

この系の力学的 energy E は保存量であるので，初期条件を与えてその後に起こる運動の特徴を E の値により厳密に求めることができる．**Fig.11a-11c** に $\dot{\varphi}$ の 3 つの値に対する E の等高線図を示す．**Fig.11a** では，図の中央の閉曲線の E の値が小さく，線形振動の領域である．$\dot{\varphi}(0) = 0.01$ (**Fig.11b**) と $\dot{\varphi}(0) = 1$ (**Fig.11c**) では，先に **Fig.10a, 10b** で見たように potential energy が $\theta = 0$ を境に 2 分されるので，$0 < \theta < \pi$ の領域の閉曲線が解軌道となる．U_{min} の近傍では線形振動が起こる．

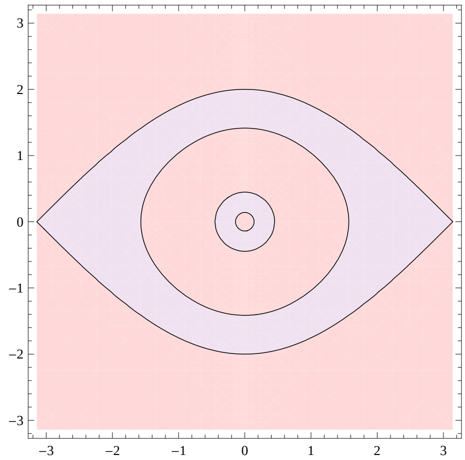

Fig.11a Contour plot of $E = 0.01$ (inside), 0.1, 1, 2 (outside) in $(\theta, \dot{\theta})$ plane ($-\pi \leq \theta \leq \pi$, $-\pi \leq \dot{\theta} \leq \pi$), with $\dot{\varphi} = 0$ for which $\alpha = 0$.

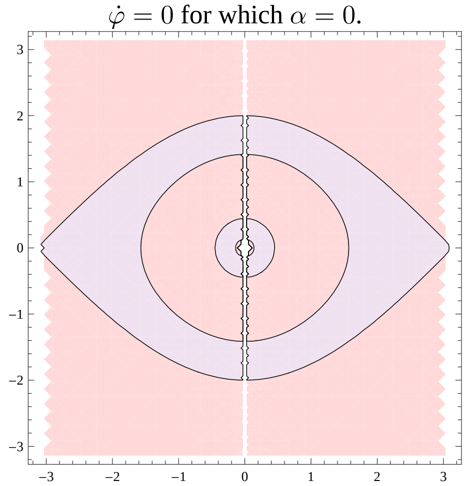

Fig.11b Contour plot of $E = 0.01$ (inside), 0.1, 1, 2 (outside) in $(\theta, \dot{\theta})$ plane ($-\pi \leq \theta \leq \pi$, $-\pi \leq \dot{\theta} \leq \pi$), with $\dot{\varphi} = 0.01$ for which $\alpha = 0.0025$.

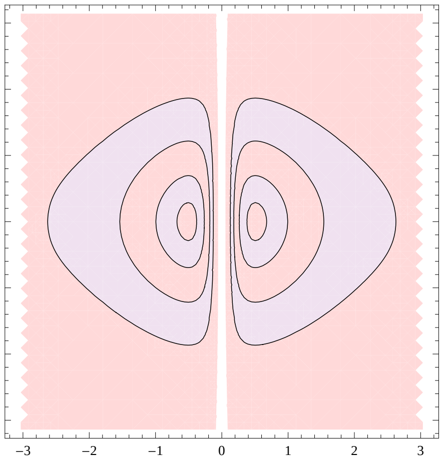

Fig.11c Contour plot of $E = 0.3$ (inside), 0.5, 1, 2 (outside) in $(\theta, \dot{\theta})$ plane ($-\pi \le \theta \le \pi, -\pi \le \dot{\theta} \le \pi$), with $\dot{\varphi} = 1$ for which $\alpha = 0.25$.

4　円錐振子の振れ回り

円錐振り子は定常解であり，それに初期攪乱を重ね合わせたときに振動が起こる．本節では，それを線形近似の範囲で数値解析する．

4.1　初期角度攪乱による振動

球面振子の規定値を $g = 1$, $m_1 = 1$, $L_1 = 1$, $\omega_1 = 2$, $\theta_a = \arccos(g/(L\omega_1^2)) = 1.31812$ とおく．微分方程式系 (2.7), (2.8) 式の初期値を $\theta(0) = \theta_a + 0.1$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_1$ と平衡点の近傍に角度攪乱を設定して，(2.7), (2.8) 式を時間 $0 \le t \le t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果の時間 $t_s \le t \le t_e$ ($t_s = 2\pi \times 10$) での振舞を **Fig.12a-12e** に示す．**Fig.12a**, **12c** の θ 方向の形状は線形振動に近い．しかし，**Fig.12e** の φ 方向の形状は調和振動からずれていることが，p_φ の保存関係から評価できる．

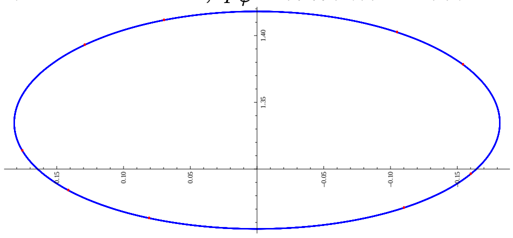

Fig.12a Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 12$.The figure is rotated by 90°.

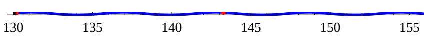

Fig.12b Phase portrait of $(\varphi, \dot{\varphi})$ in $2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 12$.

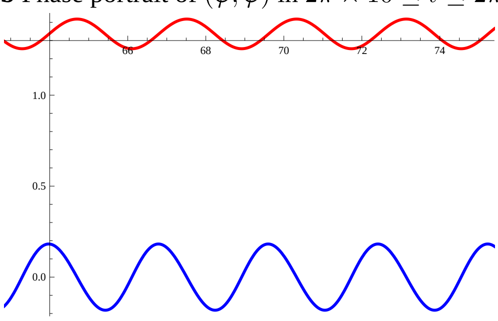

Fig.12c Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t ($2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 12$).

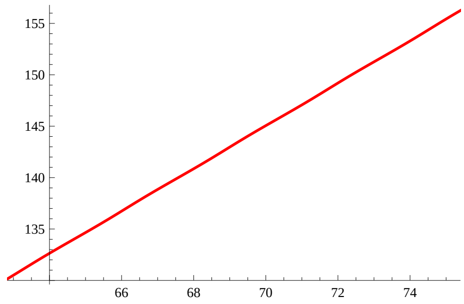

Fig.12d Time sequence of $\varphi(t)$ versus t ($2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 12$).

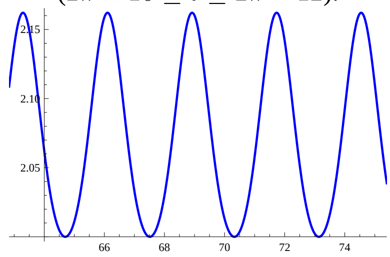

Fig.12e Time sequence of $\dot{\varphi}(t)$ versus t ($2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 12$).

4.2　初期角速度攪乱による振動

前小節と同様に，初期値を $\theta(0) = \theta_a$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_1 + 0.01$ と平衡点の近傍に角速度攪乱を設定して，(2.7), (2.8) 式を時間 $0 \le t \le t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果の時間 $t_s \le t \le t_e$ ($t_s = 2\pi \times 10$) の振舞を **Fig.13a-13e** に示す．**Fig.13a**, **13c** の θ 方向の形状は線形振動で振幅が小さい．一方，**Fig.13e** の φ 方向の形状は調和振動であることが，p_φ の保存関係から評価できる．つまり，p_φ は，$\dot{\varphi}$ に関して線形であり，θ に関して非線形である．また，本小節と前小節のまとめとして，θ は $\dot{\varphi}$ と共に有効 potential energy の形状 (**Fig.10a**, **10b**) に関わるので，θ の攪乱により非線形効果が起こり易いと言えよう．

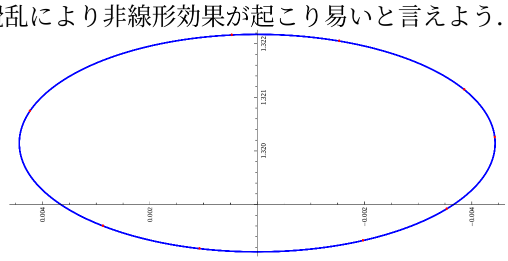

Fig.13a Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 12$. The figure is rotated by 90°.

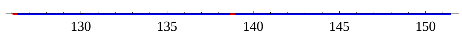

Fig.13b Phase portrait of $(\varphi, \dot{\varphi})$ in $2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 12$.

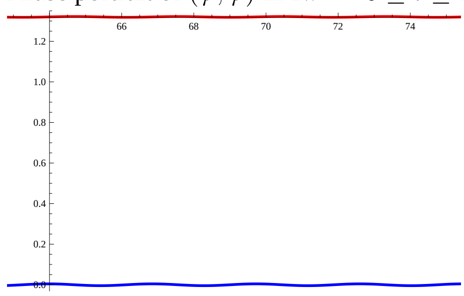

Fig.13c Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t ($2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 12$).

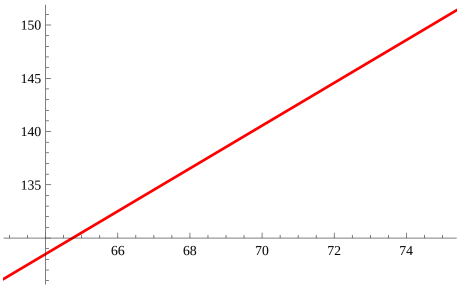

Fig.13d Time sequence of $\varphi(t)$ versus t $(2\pi \times 10 \leq t \leq 2\pi \times 12)$.

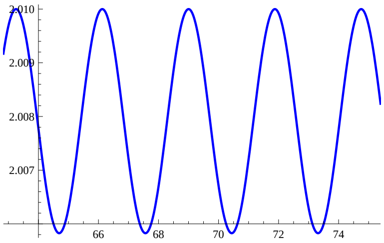

Fig.13e Time sequence of $\dot{\varphi}(t)$ versus t $(2\pi \times 10 \leq t \leq 2\pi \times 12)$.

5　教材活用の評価

例示した教材が授業時間中に実行表示可能か否か (目安として，「3 分以内に結果が表示できるもの」を基準としている) を評価するために，教材例の実行時間を示す．自由振動の場合 (**Fig.3-8**) $t_s = 2*\pi*5, t_e = 2*\pi*12$ の session 実行時間は 24.4687500 sec である．この結果から，振動変化が激しい場合には計算時間刻みを調整するためか所要計算時間が長くなると類推できる．また，ここに示した例題では，このような教材が授業で十分に活用できると言える．Mathematica の Manipulate 機能を用いた解の表示は，「数値解析」が簡単な操作で視覚的に行えるので，初学者にも容易に取り組むことができて非常に好評である．

4 節の記事は，保存量の解析に基づき考察を深める糸口を与えており，数式処理機能を活用できる．さらに最近の PC では RAM が増強されて来ており，数式処理機能の up により力学問題解決の多機能高度化が期待される．

6　おわりに

本報告では，球面振子の自由振動の理論解析を行い，その解析過程を Mathematica で数式処理して運動方程式を導出する demonstration を行い，力学的 energy 保存則と角運動量保存則に基づいて厳密に球面振子の運動の特徴を論じた．また，運動方程式を数値解析し，計算結果を位相面図・時系列図・spectrum 図に示して，学生の理解を容易にする教材を工夫した．本報告により，非線形力学・カオス工学の新たな教材を提供できたものと思われる．さらに，球面振子を特徴付ける角運動量の値について解構造の分類資料を作成する予定である．

ここに示した実験データや解析例は学生の自学自習の支援並びに課題研究 (PBL, Problem Based Learning) に提供できるのみならず，子供科学教室やものづくり教室並びに出前授業等に活用して科学技術に関心を呼び起こす展示・教材にも活用できるものと期待される．本報告に続いて，球面振子の支持点が励振される場合や外力による強制振動の場合等を取り上げ，数値解析を進める予定である．本報告の一部は，先に講演発表したこと[9],[10] を付記する．

本研究遂行にあたり，本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して，柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] 瀬川 広海，濱田 英隆: “701 強制球面振り子のカオス制御に関する研究” 日本機械学会九州支部講演論文集 Vol.2003, No.56(2003) , pp.187-188.

[2] 谷林 衛，太田 治: “連成振動の実験” 大学の物理教育 **11**, No.3(20051115), pp.138-141.

[3] T.J. Bridges and K.V. Georgiou: “Computing global orbits of the forced spherical pendulum” *Physica D: Nonlinear Phenomena* **165** (2002), pp.1-11.

[4] R.A. Nelson and M. G. Olsson: “The pendulum - Rich physics from a simple system”. *American Journal of Physics* **54** (2) (February 1986), pp.112-121. Retrieved on 2008-10-29.

[5] Wolfram Demonstrations Project: “Spherical Pendulum” http://demonstrations.wolfram.com/SphericalPendulum/

[6] 田中 芳夫，上田 哲史，川上 博: “球面振子を有するクレーンのシミュレーション法” 日本機械学會論文集. C 編 59(559) pp.814-818 19930325

[7] 舟田 敏雄，中道 義之，内堀 晃彦，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，望月 孔二，川上 誠，宮内 太積: “ 技術者教育のための工学数理の力学教材の改定 (9): バネ振子の非線形振動の数値解析 ” 沼津高専研究報告 第 43 号 (2009), pp.131-138.

[8] 望月 孔二，宮内 太積，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之，Mazni Al Irfan，川船 雄一郎，佐々木 隆吾，舟田 敏雄: “PSD 簡易計測システム試作と 2 点吊り振子の実験・解析” 電子情報通信学会 2009 年総合大会 2009 年 3 月 17 日 (火)〜20 日 (金) 愛媛大（松山市）3 月 18 日 (水) 午前，「D-15 教育工学」(一般セッション)，講演番号：D-15-24 講演論文集 p.202. file: d_15_024.pdf

[9] 中道義之，舟田敏雄，岩本大，清水啓介，船津佑介，大庭勝久，宮内太積，川上誠，望月孔二: “出前授業のための「振子」教材の調査と整備” 第 29 回高専情報処理教育研究発表会 論文集第 29 号，pp.12-15.

[10] 中道義之，舟田敏雄，岩本大，清水啓介，船津佑介，大庭勝久: “球面振子の simulation: Mathematica による教材作成” 第 29 回高専情報処理教育研究発表会 論文集第 29 号，pp.16-19.