

変形球面振子の解析とその強制減衰振動の数値解析

大庭 勝久^{*1*2} 中道 義之^{*2*3} 舟田 敏雄^{*1*2} 岩本 大^{*1} 清水 啓介^{*1} 船津 佑介^{*1}

Analysis of Modified Spherical Pendulum and Numerical Computations of Its Forced Oscillation with Damping

Katsuhisa OOBA^{*1*2} Yoshiyuki NAKAMICHI^{*2*3} Toshio FUNADA^{*1*2}
Dai IWAMOTO^{*1} Keisuke SHIMIZU^{*1} and Yusuke FUNATSU^{*1}

Abstract: A spherical pendulum may be addressed as a next step following after a simple pendulum in the study of mechanics, which is arranged for higher grade students to study education materials of PBL (Problem Based Learning). The Lagrange function for the spherical pendulum is computed symbolically to lead to the equations of motion. Based on the conservation of mechanical energy and angular momentum, typical mechanical features of the free oscillation are shown briefly. Solving numerically the equations of motion with external forcing and damping under the conservation of angular momentum, discussed is the change in the results numerically obtained. Chaotic solutions are obtained after period doubling.

Keywords: Spherical Pendulum, Free Oscillation

1 はじめに

単振子は、支持点から一定距離で束縛される質点の円周上の運動であるので、基本的な回転運動・振動の代表的現象例と言える。単振子は鉛直面内の運動と仮定されているが、それは球面上の運動の特別な場合となる。そのような流れに沿って、球面振子は入門段階に続く次の教程と位置づけられる。しかも、強制球面振子の場合にもカオスが発生する^{[1]-[4]}ので、多くの関心が持たれている。また、クレーン^[5]やマニピュレータ等をはじめ、ロボット工学・多体運動力学 (multi body dynamics, 機構解析) の基礎教材とも位置づけられる。

ここでは、まず球面振子の自由振動を工学数理教材並びに一連の振子の研究報告^{[7]-[9]}に沿って PBL (Problem Based Learning) 向けに解説し、角運動量保存則を用いて 1 変数の系に書き換え、その自由振動問題の特徴を力学的 energy 保存則に基づいて例示する。その運動方程式に外力による励振と減衰効果を考慮して強制減衰振動問題を設定し、自由振動と強制振動の数値計算結果の特徴を比較し、外力の振幅と角振動数並びに減衰係数を变化させて数値計算してカオス解が出現することを示す。

2 球面振子

質量 m の質点が長さ L ($=$ 一定) の糸により支持点に繋がれている (Fig.1)。重力は下向きに作用し、重力加速度は g である。支持点を原点とし、 z 軸を鉛直上向き、水平面を (x, y) 面とするデカルト座標系 (x, y, z) を取り、質点の位置を (x_P, y_P, z_P) ($x_P \equiv x_P(t)$, $y_P \equiv y_P(t)$, $z_P \equiv z_P(t)$, t : 時間) と表す。この系の Lagrangian $\mathcal{L} = T - U$ に含ま

れる運動 energy T , 重力 potential energy U は

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 + \dot{z}_P^2), \quad U = mg(z_P + L) \quad (2.1)$$

と表され、質点は一定長さの糸に拘束されるので、次式が成り立つ:

$$L = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2} = \text{constant} \quad (2.2)$$

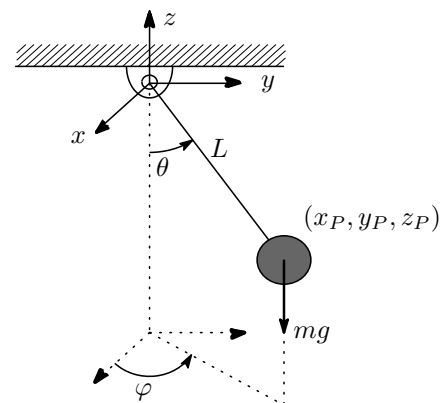


Fig.1 Spherical pendulum.

鉛直軸と糸のなす角度 θ ($\theta \equiv \theta(t)$), 水平面内で x 軸から取った角度 φ ($\varphi \equiv \varphi(t)$) を用いて球座標系 (r, θ, φ) への座標変換:

$$\begin{cases} x_P = L \sin(\theta) \cos(\varphi), & y_P = L \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ z_P = -L \cos(\theta) \end{cases} \quad (2.3)$$

を行うと、(2.1) 式の T と U は

$$T = \frac{mL^2}{2} [\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)], \quad (2.4)$$

$$U = mgL(1 - \cos(\theta)) \quad (2.5)$$

と表される。これらと $\mathcal{L}$ により、Lagrange の運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \rightarrow mL^2 \ddot{\theta} = mL^2 \dot{\varphi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - mgL \sin(\theta), \quad (2.6)$$

^{*1} 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.

^{*2} 専攻科: Advanced Engineering Course.

^{*3} 総合情報センター: Information Technology Center.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \rightarrow mL^2 \frac{d}{dt} [\dot{\varphi} \sin^2(\theta)] = 0 \\ &\rightarrow \dot{\varphi} \sin^2(\theta) = \text{constant} (\equiv \alpha_1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

と表される．自由振動を記述する (2.6), (2.7) 式からは力学的 energy $E = T + U$ の保存が導かれ, (2.7) 式からは角運動量 $p_\varphi = mL^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}$ の保存が導かれる．もし初期 ($t = 0$) に $p_\varphi = 0$ ならば鉛直面内の質点の運動 (即ち, 単振子の運動) となり, $p_\varphi \neq 0$ ならば球面上を運動し, $\dot{\varphi}$ が一定ならば円錐振子となる．

(2.7) 式を用いて (2.6) 式を書き換えると, θ のみの次の方程式となり, 有効 potential energy U_2 が定義できる:

$$mL^2 \ddot{\theta} = mL^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{\alpha_1}{\sin^2(\theta)} \right)^2 - mgL \sin(\theta), \quad (2.8)$$

$$U_2 = \frac{m}{2} L^2 \frac{\alpha_1^2}{\sin^2(\theta)} + mgL(1 - \cos(\theta)), \quad (2.9)$$

(2.8), (2.9) 式から力学的 energy E_2 の保存が導かれる:

$$E_2 = \frac{mL^2}{2} \dot{\theta}^2 + U_2 \quad (2.10)$$

これらによる質点の運動の特徴は, 系の規定値 ($m = 1, L = 1, g = 1$) について, 角運動量 $p_\varphi = mL^2 \alpha_1$ の値を変えて, Fig.2-5 に示される． $\alpha_1 \neq 0$ のとき, $\theta \rightarrow 0$ と取ると $U_2 \rightarrow \infty$ であり, 極小値を持ち, $\theta \rightarrow \pi$ では $U_2 \rightarrow \infty$ である．

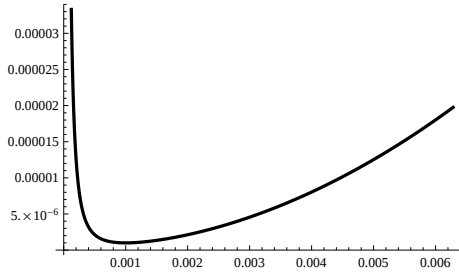


Fig.2a Effective potential energy U_2 versus θ for $\alpha_1 = 9.99967 \times 10^{-7}$ where $\theta(0) = 0.01$ and $\dot{\varphi}(0) = 0.01$.

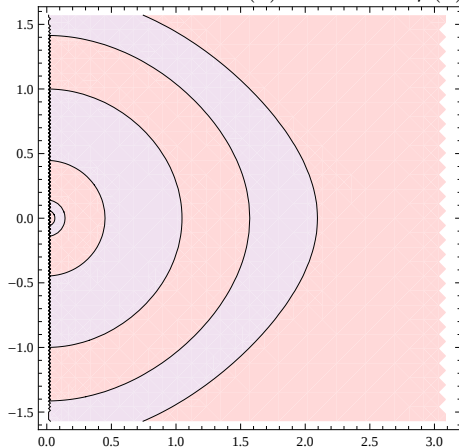


Fig.2b Contour plot of E_2 in the $(\theta, \dot{\theta})$ plane for $\alpha_1 = 9.99967 \times 10^{-7}$. $E_2 = 0.002$ (inside), 0.01, 0.1, 0.5, 1, 1.5 (outside).

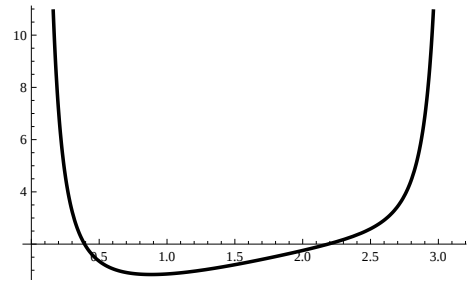


Fig.3a Effective potential energy U_2 versus θ for $\alpha_1 = 3/4$ where $\theta(0) = \pi/3$ and $\dot{\varphi}(0) = 1$.

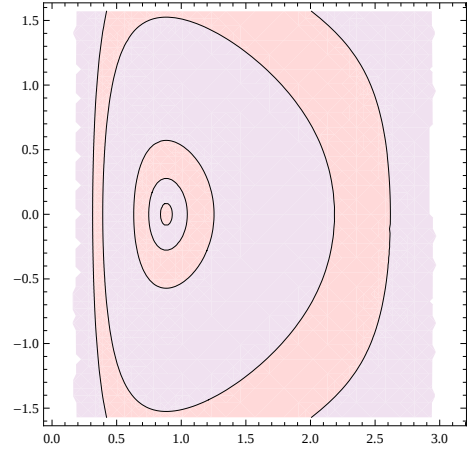


Fig.3b Contour plot of E_2 in the $(\theta, \dot{\theta})$ plane for $\alpha_1 = 3/4$. $E_2 = 0.84$ (inside), 0.875, 1, 2, 3 (outside).

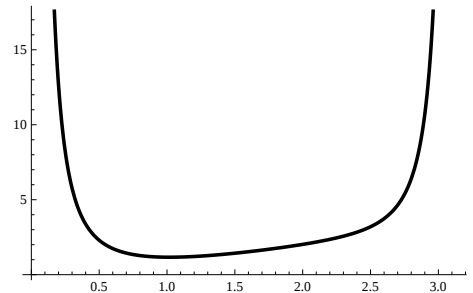


Fig.4a Effective potential energy U_2 versus θ for $\alpha_1 = 1$ where $\theta(0) = \pi/2$ and $\dot{\varphi}(0) = 1$.

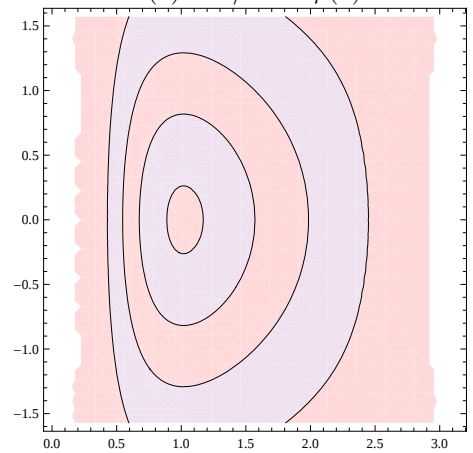


Fig.4b Contour plot of E_2 in the $(\theta, \dot{\theta})$ plane for $\alpha_1 = 1$. $E_2 = 1.2$ (inside), 1.5, 2, 3 (outside).

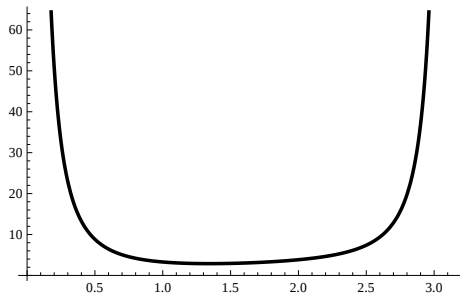


Fig.5a Effective potential energy U_2 versus θ for $\alpha_1 = 2$
where $\theta(0) = \pi/2$ and $\dot{\varphi}(0) = 2$.

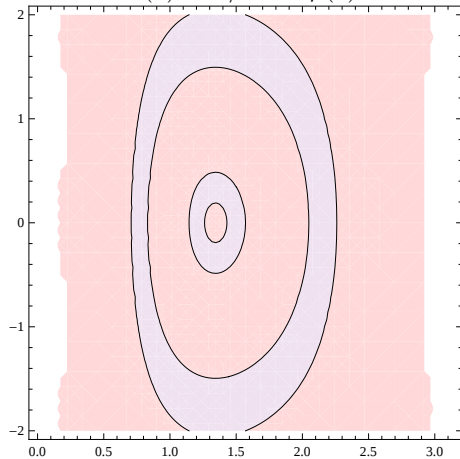


Fig.5b Contour plot of E_2 in the $(\theta, \dot{\theta})$ plane for $\alpha_1 = 2$.
 $E_2 = 2.9$ (inside), 3, 4, 5 (outside).

3 数値解析

系の規定値と初期値を与えて，運動方程式 (2.7) を数値的に解く．

3.1 自由振動の数値解

系の規定値 ($m = 1, L = 1, g = 1$) について，初期値 $\theta(0) = \pi/6, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 1$ ($\alpha_1 = 1/4$) と設定して計算時間 $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$ で運動方程式 (2.8) を数値計算した結果を Fig.6a-6d に示す．

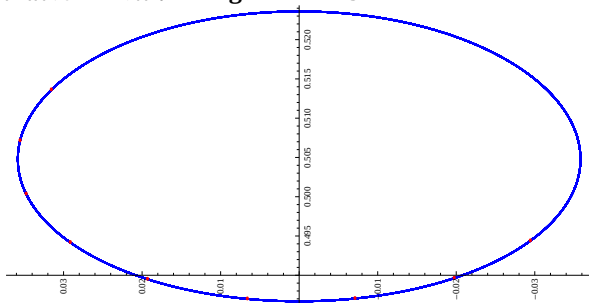


Fig.6a Phase portrait of $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

The figure is rotated by 90° .

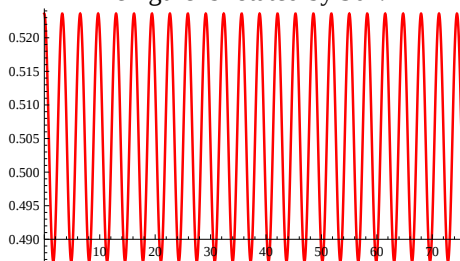


Fig.6b Time sequence of $\theta(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

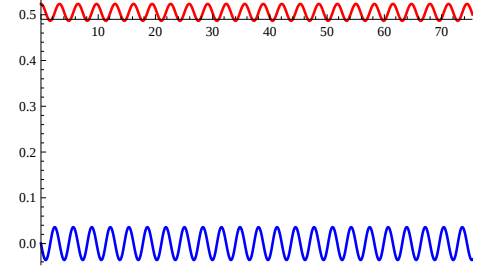


Fig.6c Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in
 $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

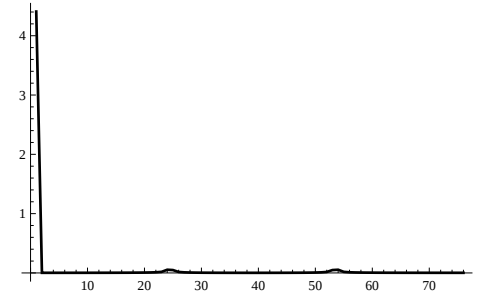


Fig.6d Spectrum of $\theta(t)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

3.2 強制振動の数値解析 (1)

(2.8) 式の右辺に減衰係数 c_1 の damper の項と振幅 F_1 で角振動数 ω の外力項を加える：

$$mL^2\ddot{\theta} = mL^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{\alpha_1}{\sin^2(\theta)} \right)^2 - mgL \sin(\theta) - c_1 \dot{\theta} + F_1 \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

系の規定値 ($m = 1, L = 1, g = 1$) について，初期値 $\theta(0) = \pi/6, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 1$ ($\alpha_1 = 1/4$) と設定して計算時間 $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$ で運動方程式 (3.1) を数値計算した結果を Fig.7a-7d に示す．

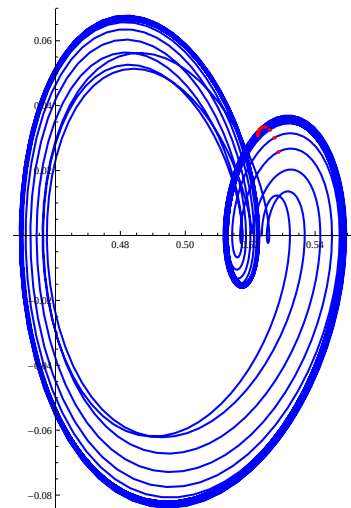


Fig.7a Phase portrait of $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

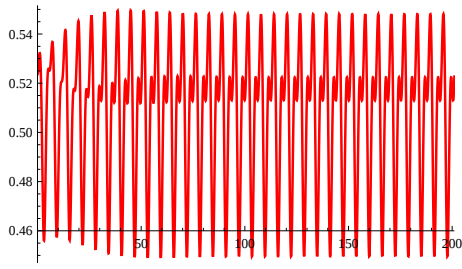


Fig.7b Time sequence of $\theta(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

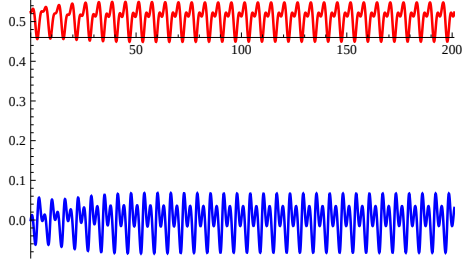


Fig.7c Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

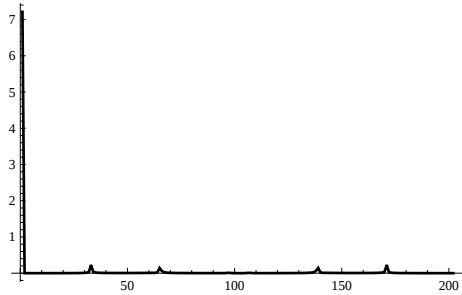


Fig.7d Spectrum of $\theta(t)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

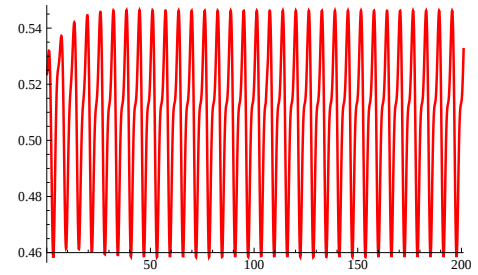


Fig.8b Time sequence of $\theta(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

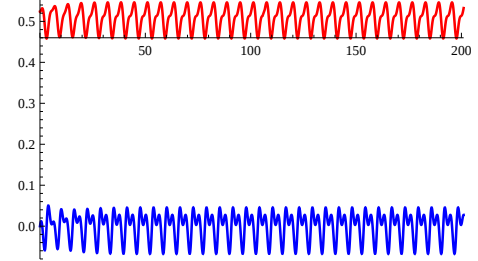


Fig.8c Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

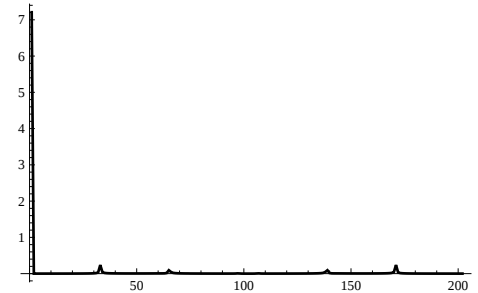


Fig.8d Spectrum of $\theta(t)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

3.3 強制振動の数値解析 (3)

系の規定値 ($m = 1, L = 1, g = 1$) について, 初期値 $\theta(0) = \pi/6, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 1$ ($\alpha_1 = 1/4, F_1 = 0.1, \omega = 1, c_1 = 0.2$) と設定して計算時間 $0 \leq t \leq 2\pi \times 32$ で運動方程式 (3.1) を数値計算した結果を Fig.8a-8d に示す.

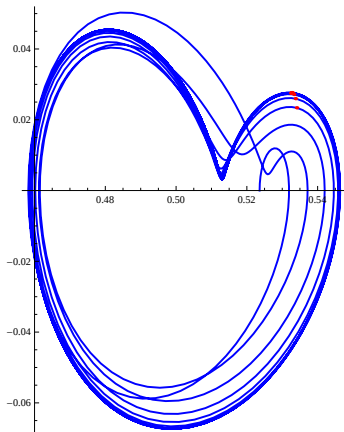


Fig.8a Phase portrait of $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

3.4 強制振動の数値解析 (3)

系の規定値 ($m = 1, L = 1, g = 1$) について, 初期値 $\theta(0) = \pi/6, \dot{\theta}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 1$ ($\alpha_1 = 1/4, F_1 = 1.3, \omega = 1, c_1 = 0.07$) と設定して計算時間 $0 \leq t \leq 2\pi \times 32$ で運動方程式 (3.1) を数値計算した結果を Fig.9a-9d に示す.

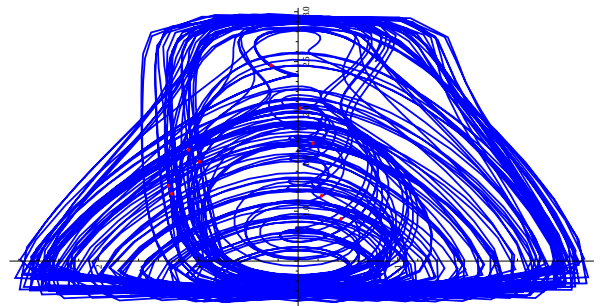


Fig.9a Phase portrait of $(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

The figure is rotated by 90° .

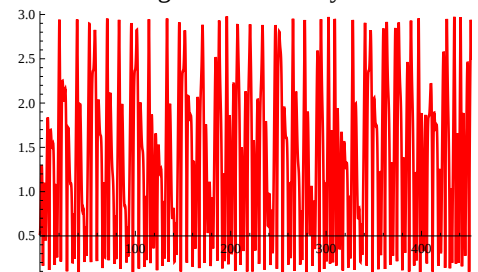


Fig.9b Time sequence of $\theta(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

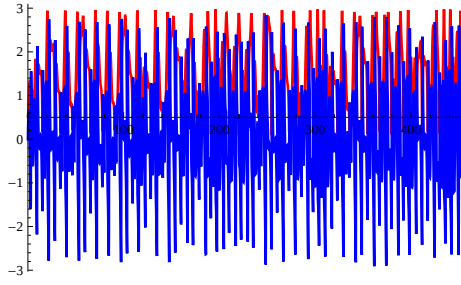


Fig.9c Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

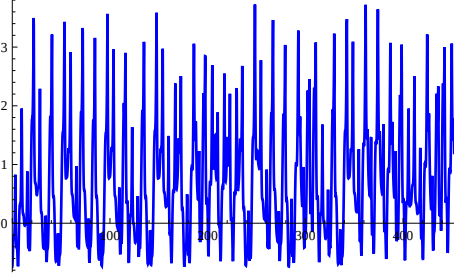


Fig.9d Spectrum of $\theta(t)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

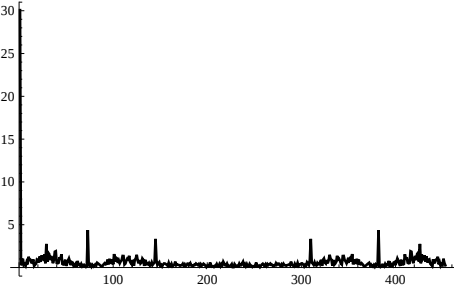


Fig.9e Spectrum of $\theta(t)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

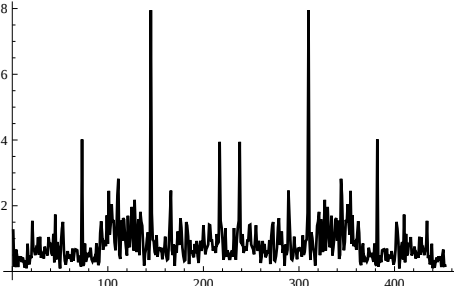


Fig.9f Time sequence.

4 減衰効果を伴う強制振動系のカオス解

系の規定値 ($m = 1$, $L = 1$, $g = 1$) について, 初期値 $\theta(0) = \pi/6$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 1$ ($\alpha_1 = 1/4$) と設定して計算時間 $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$ で運動方程式 (3.1) を数値計算した結果を Fig.8a-8d に示す.

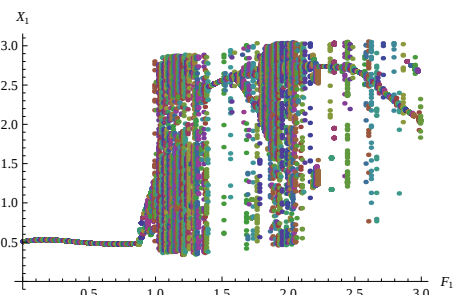


Fig.9a Strobo plot of $\theta(t_n)$ versus F_1 for $c_1 = 0.14$.

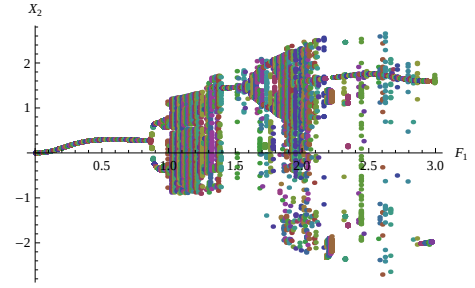


Fig.9b Strobo plot of $\dot{\theta}(t_n)$ versus F_1 for $c_1 = 0.14$.

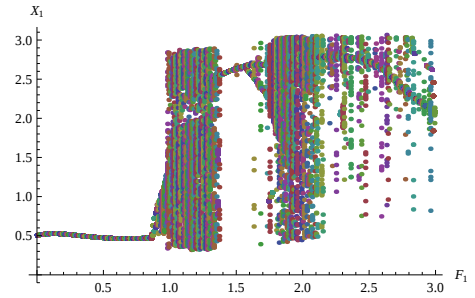


Fig.10a Strobo plot of $\theta(t_n)$ versus F_1 for $c_1 = 0.12$.

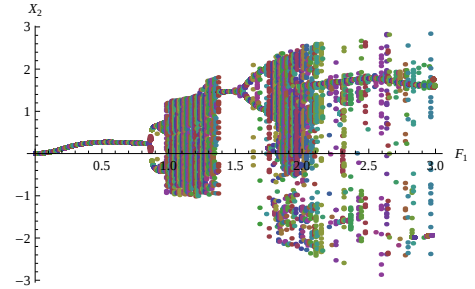


Fig.10b Strobo plot of $\dot{\theta}(t_n)$ versus F_1 for $c_1 = 0.12$.

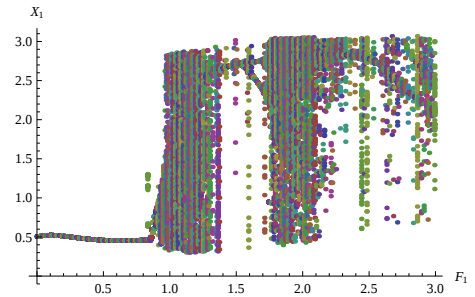


Fig.11a Strobo plot of $\theta(t_n)$ versus F_1 for $c_1 = 0.1$.

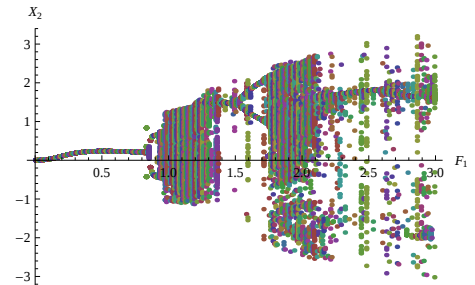


Fig.11b Strobo plot of $\dot{\theta}(t_n)$ versus F_1 for $c_1 = 0.1$.

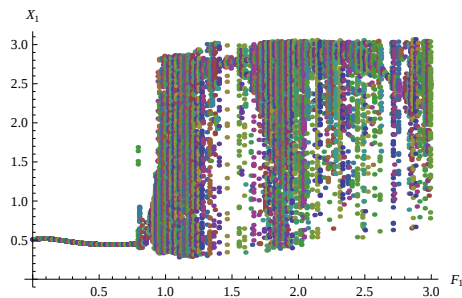


Fig.12a Strobe plot of $\theta(t_n)$ versus F_1 for $c_1 = 0.08$.

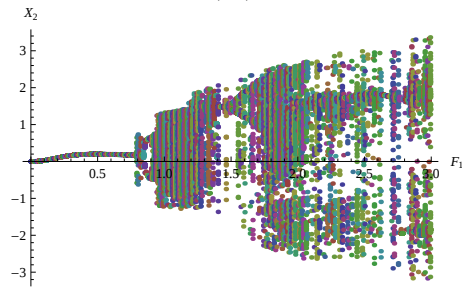


Fig.12b Strobe plot of $\dot{\theta}(t_n)$ versus F_1 for $c_1 = 0.08$.

5 おわりに

本報告では、球面振子の理論解析を行い、その解析過程を Mathematica で数式処理して運動方程式を導出し、角運動量保存則を用いて 1 変数の系に書き換え、その自由振動問題の特徴を力学的 energy 保存則に基づいて例示した。その運動方程式に外力による励振と減衰効果を考慮して強制減衰振動問題を設定し、自由振動と強制振動の数値計算結果の特徴を比較し、外力の振幅と角振動数並びに減衰係数を変化させて数値計算してカオス解が見出された。本報告により、非線形力学・カオス工学の新たな教材を提供できたものと思われる。さらに、球面振子に関連する力学的問題は続報で数値解析される。

本報告の一部は、先に講演発表したこと^{[10],[11]}を付記する。

本研究遂行にあたり、本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して、柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます。

参考文献

- [1] 瀬川 広海, 濱田 英隆: “701 強制球面振り子のカオス制御に関する研究” 日本機械学会九州支部講演論文集 Vol.2003, No.56(2003), pp.187-188.
- [2] 谷林 衛, 太田 治: “連成振動の実験” 大学の物理教育 **11**, No.3(20051115), pp.138-141.
- [3] T.J. Bridges and K.V. Georgiou: “Computing global orbits of the forced spherical pendulum” *Physica D: Non-linear Phenomena* **165** (2002), pp.1-11.
- [4] R.A. Nelson and M. G. Olsson: “The pendulum - Rich physics from a simple system”. *American Journal of*

Physics **54** (2) (February 1986), pp.112-121. Retrieved on 2008-10-29.

- [5] 田中 芳夫, 上田 哲史, 川上 博: “球面振子を有するクレーンのシミュレーション法” 日本機械学会論文集. C 編 59(559) pp.814-818 19930325
- [6] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 石本 拓也, 鈴木 健宏, 鈴木 寛里: “PSD による簡易計測システム試作のための振り運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 42 号 (2008), pp.57-66 .
- [7] 舟田 敏雄, 中道 義之, 内堀 晃彦, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 望月 孔二, 川上 誠, 宮内 太積: “技術者教育のための工学数理の力学教材の改定 (9): バネ振子の非線形振動の数値解析” 沼津高専研究報告 第 43 号 (2009), pp.131-138.
- [8] 内堀 晃彦, 中道 義之, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 望月 孔二, 川上 誠, 宮内 太積: “技術者教育のための工学数理の力学教材の改定 (10): バネ振子の強制非線形振動の数値解析 ” 沼津高専研究報告 第 43 号 (2009), pp.187-192.
- [9] 望月 孔二, 宮内 太積, 内堀 晃彦, 川上 誠, 中道 義之, Mazni Al Irfan, 川船 雄一郎, 佐々木 隆吾, 舟田 敏雄: “PSD 簡易計測システム試作と 2 点吊り振子の実験・解析” 電子情報通信学会 2009 年総大会 2009 年 3 月 17 日 (火) ~ 20 日 (金) 愛媛大 (松山市) 3 月 18 日 (水) 午前, 「D-15 教育工学」(一般セッション), 講演番号: D-15-24 講演論文集 p.202. file: d_15_024.pdf
- [10] 中道義之, 舟田敏雄, 岩本大, 清水啓介, 船津佑介, 大庭勝久, 宮内太積, 川上誠, 望月孔二: “出前授業のための「振り」教材の調査と整備” 第 29 回高専情報処理教育研究発表会 論文集第 29 号, pp.12-15.
- [11] 中道義之, 舟田敏雄, 岩本大, 清水啓介, 船津佑介, 大庭勝久: “球面振子の simulation: Mathematica による教材作成” 第 29 回高専情報処理教育研究発表会 論文集第 29 号, pp.16-19.
- [12] 中道 義之, 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介: “球面振子の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [13] 中道 義之, 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介: “支持点の励振による球面振子の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [14] 中道 義之, 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介: “2 つの球面振子の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [15] 中道 義之, 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介: “変形円錐振子の解析とその強制減衰振動の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.