2 点吊り振子と幾つかの小振子の連成運動の基礎解析

中道 義之*1*2 舟田 敏雄*1*3 望月 孔二*1*4 宮内 太積*1*5 川上 誠*1*3

Fundamental Dynamic Analysis of a Bifilar Suspension Pendulum with a Couple of Small Pendulums

Yoshiyuki NAKAMICHI*1*2 Toshio FUNADA*1*3 Kouji MOCHIZUKI*1*4
Tatsumi MIYAUCHI*1*5 and Makoto KAWAKAMI*1*3

Abstract: A uniform density bar is suspended at its two ends by two strings whose two end points are attached to an upper static wall. The bar may swing or make torsional oscillation in a vertical plane from its equilibrium rest state, which is called bifilar suspension pendulum. When the distance between the two points is longer or shorter than the bar length, the bar attitude may change during swinging of the bar. When it is just the same, the bar can swing with keeping the attitude horizontal. Taking into account this particular property of the pendulum, some device for seismic mitigation has been proposed. In this connection, we make analysis from linear to nonlinear stage of various modes of oscillations, and some exact mechanical equations are derived for free swinging mode. Fundamental results are discussed here and some of them will be solved in the following papers. The results obtained are expected to provide new education materials and to apply in Earthquake Engineering and Seismic Design.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Multi-Suspended Pendulums

1 はじめに

先に「振子は最も基本的な免震手法であるにも関わらず，構造物の免震デバイスとしての実施例は極めて少ない」[1] と現状分析され，一連の「並進振子原理を用いた免震システムの開発」[1]–[4] が進められて来ている．そこでは，2 つの支持点から糸で対称に吊るされた遊動円木状の振子 (2 点吊り振子) を考え，円木と吊り材の質量は無視して，円木上の物体の小振幅振動の免震 (振) 効果が実験的・理論的に解明されている．また，最近 Zhou & Ji[5] により，遊動円木の自由振動の線形問題が支持点の条件を拡張して解析的に解かれており，吊橋や床の免振問題への応用が述べられている．

2 点吊り振子の力学問題[6] では，2 本の糸で棒 (遊動円木) の端を吊り下げている静止平衡状態について，座標値を用いて束縛条件が記述され，それを平面極座標による角度の非線形関数方程式として，図式解法により解いた．しかし，その座標値間の関係式の逆変換が多価関数であるため厳密な扱いは面倒になる．この静止平衡状態周りの振子運動は，糸と棒の成す鉛直面内で揺れる “mode 1” とそれに垂直な鉛直面内で揺れる “mode 2” がある．「2 本吊り」[7] として，鉛直軸回りの棒の振れ振動は，“mode 3” に分類され，その静止平衡状態の角度の関数方程式も図式解法で解かれた．また，“mode 1” の変形に「襷がけ振子」[8] がある．これらは，鉛直面あるいは水平面での運動の分類であり，さらに一般化すると球座標での表現が求められるが，それは将来的課題となろう．先行研究[1],[6] の線形自由振動の結果を踏まえ，支持点の時間的変位による励振問題や非線形振動問題への展開が求められる．

本研究では，これらの力学問題の理論解析にあたり，基本的な線形振動 mode を求めるが，線形振動のみならず非線形振動に関しても可能な限り厳密に扱い，非線形力学・カオス工学への crossover として位置づける．また，これらの振子の支持点からの励振の問題があり，それらの免振・制振効果に関して数値的解析，実験的解明を図り，計測系の構築を進める計画である．

2 円木と 2 つの小振子の連成運動

長さ $2a$ で質量 m_1 の円木の重心位置 (x_G, z_G) から，左側に距離 a_{p1} の位置に長さ L_{p1} の糸を取り付け，糸の他端に質量 m_{p1} の質点を結びつける．また，右側に距離 a_{p2} の位置に長さ L_{p2} の糸を取り付け，糸の他端に質量 m_{p2} の質点を結びつける (**Fig.51**)．この場合の運動の自由度は 3 で，$\theta_{11}, \theta_{p1}, \theta_{p2}$ で表される．静止平衡状態で 2 つの小振子の重力の moment の釣合が対称な配置が実現される条件を与える．円木の上に質量 m_2 で重心回りの慣性 moment J_2 の物体を置いた場合が **Fig.1**(a) に示される．このとき，円木の重心から物体重心までの高さは h_g である．

---

*1 専攻科: Advanced Engineering Course.
*2 総合情報センター: Information Technology Center.
*3 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
*4 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.
*5 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.

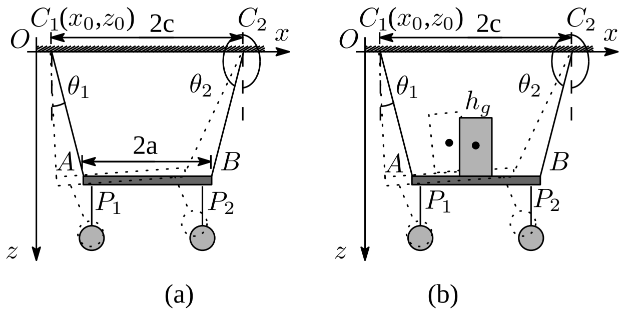

Fig.1 Bifilar suspension pendulum of $c > a$. (a) with two small pendulums, and (b) with a body of the height of its center of mass h_g and two small pendulums.

Fig.1(a), (b) の円木の端点 A, B，円木の重心 (x_G, z_G)，円木の長さ (θ_1 と θ_2 の関係式)，重心回りの回転角 φ ($\varphi \equiv \varphi(\theta_1, \theta_2)$)，円木から高さ h_g の位置にある物体の重心 (x_{G2}, z_{G2}) は，次のように表される:

$$\begin{cases} x_A = x_0 + L_1\sin(\theta_1),\ \ z_A = z_0 + L_1\cos(\theta_1), \\ x_B = x_0 + 2c + L_2\sin(\theta_2),\ \ z_B = z_0 + L_2\sin(\theta_2), \\ x_G = (x_A + x_B)/2,\ \ z_G = (z_A + z_B)/2, \\ x_{G2} = x_G - h_g\sin(\varphi),\ \ z_{G2} = z_G - h_g\cos(\varphi), \\ 2a = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2}, \\ \tan(\varphi) = -\dfrac{z_B - z_A}{x_B - x_A} \end{cases} \tag{2.1}$$

小振子 P_1, P_2 (**Fig.1**(a)) の錘の座標は次のように表される:

$$\begin{cases} x_{p1} = x_G - a_{p1}\cos(\varphi) + L_{p1}\sin(\theta_{p1}), \\ z_{p1} = z_G + a_{p1}\sin(\varphi) + L_{p1}\cos(\theta_{p1}), \\ x_{p2} = x_G + a_{p2}\cos(\varphi) + L_{p2}\sin(\theta_{p2}), \\ z_{p2} = z_G - a_{p2}\sin(\varphi) + L_{p2}\cos(\theta_{p2}) \end{cases} \tag{2.2}$$

Fig.1(a) の系の静止平衡状態における力と力の moment の釣合は，次のように表される:

$$\begin{cases} -S_1\sin(\theta_1) + S_2\sin(2\pi - \theta_2) = 0, \\ S_1\cos(\theta_1) + S_2\cos(2\pi - \theta_2) = (m_1 + m_{p1})g, \\ 2cS_2\cos(2\pi - \theta_2) = (c - a_{p1})m_{p1}g + cm_1 g, \\ (c + a_{p1})m_{p1}g + cm_1 g + 2cS_1\cos(\theta_1) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

ここで，対称な配置の静止平衡解 $\theta_1 = \alpha = 2\pi - \theta_2$ が成り立つならば，(2.3) の第 1 式から $S_1 = S_2$ を得る．第 2 式は $2S_1\cos(\alpha) = m_1 g + m_{p1}g$ となり，第 3, 4 式より $a_{p1}m_{p1}g = 0$ を得る．つまり，$a_{p1} = 0$ ならば，**Fig.1**(a) の左右対称の配置が成り立つ．同様にして，**Fig.1**(b) の静止平衡状態の力と力の moment の釣合により，$m_{p1}ga_{p1} - m_{p2}ga_{p2} = 0$ であれば **Fig.1**(b) の左右対称の配置が成り立つことが導かれる．これらの点に留意して，以下では **Fig.1**(b) の系の運動方程式を解き，その特別な場合として **Fig.1**(a) の系の運動を扱う．

静止平衡解に角度攪乱を加えて，$\theta_1 = \alpha + \theta_{11}$, $\theta_2 = 2\pi - \alpha + \theta_{21}$, $\theta_{p1} = 0 + \theta_{p1}$, $\theta_{p2} = 0 + \theta_{p2}$ と表し，攪乱が小さいと仮定して (3.3) 式を Taylor 展開する．x 方向には攪乱の 1 次まで取り，z 方向には攪乱の 2 次まで取る．そして，攪乱の 1 次まで取って運動・回転 energy を評価し，攪乱の 1 次まで取って重力の potential energy を評価する．これらにより，(3.3) 式の座標値は次のように表される:

$$\begin{cases} x_G = x_0 + a\beta + h\theta_{11}, \\ z_G = z_0 + h - \dfrac{1}{2}(h - a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2, \\ x_{G2} = x_0 + a\beta + (h + h_g\beta_1)\theta_{11}, \\ z_{G2} = z_0 + h - h_g \\ -\dfrac{1}{2}\left(h - a\theta_{222}\beta_1 - h_g\beta_1^2\right)\theta_{11}^2, \\ x_{p1} = x_0 + a\beta - a_{p1} + h\theta_{11} + L_{p1}\theta_{p1}, \\ z_{p1} = z_0 + h + L_{p1} - a_{p1}\beta_1\theta_{11}, \\ -\dfrac{1}{2}(h - (a - a_{p1})\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2 - \dfrac{1}{2}L_{p1}\theta_{p1}^2, \\ x_{p2} = x_0 + a\beta + a_{p2} + h\theta_{11} + L_{p2}\theta_{p2}, \\ z_{p2} = z_0 + h + L_{p2} + a_{p2}\beta_1\theta_{11} \\ -\dfrac{1}{2}(h - (a + a_{p2})\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2 - \dfrac{1}{2}L_{p2}\theta_{p2}^2, \\ \varphi_L = -\beta_1\theta_{11} \end{cases} \tag{2.4}$$

但し，$\beta_1 = \beta - 1$ とおいた．

Fig.1(b) の系 は $\theta_{11}, \theta_{p1}, \theta_{p2}$ で記述され，その線形振動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = {} & m_1 g\left(z_0 + h + (-h + a\theta_{222}\beta_1)\frac{\theta_{11}^2}{2}\right) \\ & + m_{p1}g\,(z_0 + (h + L_{p1}) - a_{p1}\beta_1\theta_{11} \\ & -(h - (a - a_{p1})\theta_{222}\beta_1)\frac{\theta_{11}^2}{2} - L_{p1}\frac{\theta_{p1}^2}{2}\Bigg) \\ & + m_{p2}g\,(z_0 + (h + L_{p2}) + a_{p2}\beta_1\theta_{11} \\ & -(h - (a + a_{p2})\theta_{222}\beta_1)\frac{\theta_{11}^2}{2} - L_{p2}\frac{\theta_{p2}^2}{2}\Bigg) \\ & + \frac{1}{2}\left[m_1 h^2 + J\beta_1^2\right]\dot{\theta}_{11}^2 \\ & + \frac{m_{p1}}{2}\left[a_{p1}^2\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2 + \left(h\dot{\theta}_{11} + L_{p1}\dot{\theta}_{p1}\right)^2\right] \\ & + \frac{m_{p2}}{2}\left[a_{p2}^2\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2 + \left(h\dot{\theta}_{11} + L_{p2}\dot{\theta}_{p2}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

これにより，Lagrange の運動方程式は，次のように表される:

$$\begin{cases} a_{000} + a_{110}\theta_{11} + a_{111}\ddot{\theta}_{11} \\ +a_{121}\ddot{\theta}_{p1} + a_{131}\ddot{\theta}_{p2} = 0, \\ a_{211}\ddot{\theta}_{11} + a_{220}\theta_{p1} + a_{221}\ddot{\theta}_{p1} = 0, \\ a_{311}\ddot{\theta}_{11} + a_{330}\theta_{p2} + a_{331}\ddot{\theta}_{p2} = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

ここで，係数 a_{000}-a_{331} は次式で与えられる:

$$\begin{cases} M = m_1 + m_{p1} + m_{p2}, \\ a_{000} = g(m_{p1}a_{p1} - m_{p2}a_{p2})\beta_1, \\ a_{110} = g\left[Mh + (m_{p1}a_{p1} - m_{p2}a_{p2} - Ma)\right. \\ \left.\times\theta_{222}\beta_1\right], \\ a_{111} = \left(J + m_{p1}a_{p1}^2 + m_{p2}a_{p2}^2\right)\beta_1^2 + Mh^2, \\ a_{121} = m_{p1}hL_{p1},\ \ a_{131} = m_{p2}hL_{p2}, \\ a_{211} = m_{p1}hL_{p1}, \\ a_{220} = m_{p1}gL_{p1},\ \ a_{221} = m_{p1}L_{p1}^2, \\ a_{311} = m_{p2}hL_{p2}, \\ a_{330} = m_{p2}gL_{p2},\ \ a_{331} = m_{p2}L_{p2}^2 \end{cases} \tag{2.7}$$

また，$L_2 = L_1 = a = 1$ と取ると，β ($0 < \beta < 2$) の変化に対して，θ_{222} は次のように表される:

$$\theta_{222} = \frac{(1-\beta)\sqrt{\beta}}{\sqrt{2-\beta}} \tag{2.8}$$

3　2 点吊り振子と幾つかの小振子の連成運動

Fig.2 の水平面上の 2 点 C_1, C_2 (距離 $2c$) に長さ L_1 と L_2 の糸の端を繋ぎ，他端を長さ $2a$ の一様な棒 (円木) の端点 A, B に繋いで，棒を吊り下げると，重力の作用で棒を鉛直面 C_1, A, B, C_2 内で揺動させることができる．これを 2 点吊り振子 (“mode 1”) と呼ぶ.

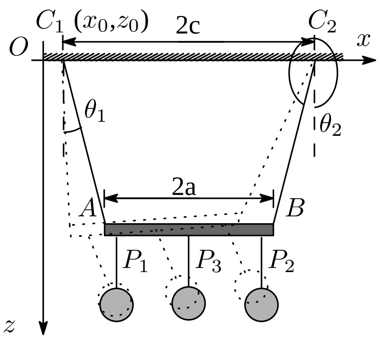

Fig.2 Bifilar suspension pendulum of $c > a$ with three small pendulums.

Fig.2 には $c > a$ で $L_2 = L_1$ の場合 (対称 2 点吊り振子) の円木と振子の静止平衡状態が示されており，破線のように運動するとき糸の振れと棒の振れ (傾き) が逆位相となり，円木は並進・回転運動する．$c < a$ の場合では糸と棒の振れが同位相となる．ほかに，並進振子 ($c = a$) の場合には，振子が揺れても棒は水平に保たれ，円木は並進運動する．$c = 0$ では物理振子となり，$a = 0$ では棒を質点と見做せて “V 字型振子” となる．また，**Fig.3** は円木上に物体がある場合の静止平衡状態を表し，円木中心から物体の重心までの高さは h_g である．円木と共に物体も傾くとき，$h_g \neq 0$ の場合には物体は円木の重心回りに回転 moment を生じる．$h_g = 0$ の場合には、物体は円木と同じ運動となる。

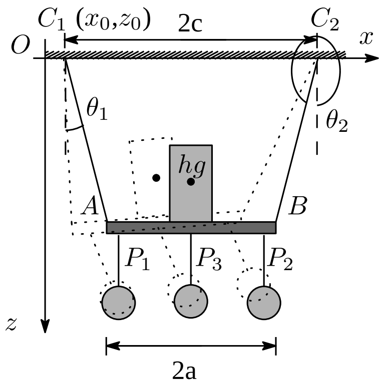

Fig.3 Bifilar suspension pendulum of $c > a$ with three small pendulums and a body of the height of its center of mass h_g.

Fig.2, **3** の振子の配置を表すために，デカルト座標系 (x, y, z) の原点を O に取り，右向き水平に x 軸，鉛直下方に z 軸を取る．糸に束縛されて，棒は $y = 0$ の鉛直面内で 2 次元運動すると仮定する．左側支持点 C_1 の位置を (x_0, z_0) と表し，静止壁面の場合には一定値とし，壁面の時間変位を考慮するときには (x_0, z_0) を時間の既知関数とする． 右側支持点 C_2 の位置は $(x_0 + 2c, z_0)$ と表わされる． 鉛直面 C_1, A, B, C_2 内に取った平面極座標系 (r, θ) を用い，左側支持点 C_1 を通る鉛直軸と糸が成す角度を θ_1 とし，右側支持点 C_2 を通る鉛直軸と糸が成す角度を θ_2 と表すと，各点の座標は次式で表される:

$$\begin{cases} \text{左側端点 } A: (x_A,\ z_A) \\ \qquad = (x_0 + L_1\sin\theta_1,\ z_0 + L_1\cos\theta_1), \\ \text{右側端点 } B: (x_B,\ z_B) \\ \qquad = (x_0 + 2c + L_2\sin\theta_2,\ z_0 + L_2\cos\theta_2) \end{cases} \tag{3.1}$$

ここで，棒が一様な線密度 ρ を持つ場合，棒の質量は $m_1 = 2a\rho$ である。静止平衡状態における力の釣合と力の moment の釣合により、棒の重心の位置 (x_G, z_G) は，棒の中央になる。棒の並進運動は (x_G, z_G) を用いて記述され，棒の重心回りの鉛直面内の回転 (y 軸回りの回転) は、水平面を基準として測った棒の傾き角度 φ で記述される:

$$\tan\varphi = -\frac{z_B - z_A}{x_B - x_A} = -\frac{L_2\cos\theta_2 - L_1\cos\theta_1}{2c + L_2\sin\theta_2 - L_1\sin\theta_1} \tag{3.2}$$

よって、棒の重心の位置と物体の重心の位置 (x_{G2}, z_{G2}) は，次のように表される:

$$\begin{cases} x_G = (x_A + x_B)/2, \quad z_G = (z_A + z_B)/2 \\ x_{G2} = x_G - h_g\sin(\varphi), \quad z_{G2} = z_G - h_g\cos(\varphi) \end{cases} \tag{3.3}$$

(3.1) 式により、棒の端点間の距離 (棒の長さ) の自乗 $(2a)^2$ は次式で与えられる:

$$(2a)^2 = (x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \tag{3.4}$$

(3.4) 式を考慮して，関数 $F(\theta_1, \theta_2)$ を次式で定義する:

$$
\begin{aligned}
F(\theta_1,\theta_2) &\equiv (x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - (2a)^2 \\
&= 4c^2 + 4c\,(L_2 \sin\theta_2 - L_1 \sin\theta_1) + L_2^2 + L_1^2 \\
&\quad - 2L_2L_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - (2a)^2
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

即ち，$F(\theta_1,\theta_2) = 0$ が (3.4) 式であり，角度 θ_1 $(-\pi/2 \le \theta_1 \le \pi/2)$ と θ_2 $(3\pi/2 \le \theta_2 \le 5\pi/2)$ の間の関係を与える超越方程式であり，解は解析的に求められる．糸の長さが等しい対称 2 点吊り振子 $(L_1 = L_2)$ の $F(\theta_1,\theta_2)$ を $F_s(\theta_1,\theta_2)$ と表す。

対称 2 点吊り振子の静止平衡状態は力の釣合と力の moment の釣合で記述され、$\theta_1 = \alpha$, $\theta_2 = 2\pi - \alpha$, $F_s(\theta_1,\theta_2) = 0, \varphi = 0$ と表されて，解 α が求められる:

$$
\begin{aligned}
F_s(\theta_1,\theta_2) &= F_s(\alpha, 2\pi-\alpha) = 0 \\
&= 4c^2 - 4a^2 - 8cL_1 \sin(\alpha) + 4L_1^2 \sin^2(\alpha) \\
\sin(\alpha) &= \frac{c \mp a}{L_1} \;\rightarrow\; \alpha = \arcsin\left(\frac{c \mp a}{L_1}\right)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

故に、静止平衡解 α $(-\pi/2 \le \alpha \le \pi/2)$ が存在するための条件は，$|(c \mp a)/L_1| \le 1$ である．(3.6) 式の復号の正の場合 (区別のため $\alpha = \alpha_2$ と表す) は，襷がけ振子の静止平衡状態を表す．ここでは，復号の負の場合 $(\alpha = \alpha_1)$ を扱う．ここで，$h = L_1 \cos\alpha_1$ とおき，振子の静止平衡状態を規定する parameter α_1, β を先例[3] に習い次のように定義する:

$$
\tan\alpha_1 = \frac{c-a}{h}, \;\; \beta = \frac{c}{a}
\tag{3.7}
$$

これは，$0 < \alpha_1 < \pi/2$ のとき $\tan\alpha_1 > 0, 1 < \beta < 2$ (つまり **Fig.2** の配置の静止平衡状態) となり，$-\pi/2 \le \alpha_1 < 0$ のときには $\tan\alpha_1 < 0, \beta < 1$ である．特別な場合として，$\beta = 0$ $(\alpha_1 < 0)$ は C_1, C_2 点が 1 点となる場合 (物理振子) である．また，$\beta = 1$ $(a = c, \alpha_1 = 0)$ は並進振子である．

3.1 静止平衡状態周りの円木の攪乱の記述

対称 2 点吊り振子の場合，静止平衡解に攪乱 θ_{11}, θ_{21} を加えて，次のように表すことができる:

$$
\begin{aligned}
&F_s(\alpha_1 + \theta_{11}, 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21}) \\
&= 4c^2 - 4a^2 + 2L_1^2 - 4cL_1 \sin(\alpha_1 + \theta_{11}) \\
&+ a_1 \sin\theta_{21} - b_1 \cos\theta_{21} \\
&= d_1 + c_1 \sin(\theta_{21} - \gamma) = 0
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

ここに含まれる角度 $\gamma \equiv \gamma(\theta_{11})$ は次式で定義される:

$$
\gamma = \arcsin(b_1/c_1) \;\; (-\pi/2 \le \gamma \le \pi/2)
\tag{3.9}
$$

また，(3.8) 式の係数 a_1-d_1 は次式で定義される:

$$
\begin{cases}
a_1 = 4cL_1 \cos(\alpha_1) - 2L_1^2 \sin(2\alpha_1 + \theta_{11}), \\
b_1 = 2L_1^2 \cos(2\alpha_1 + \theta_{11}) + 4cL_1 \sin(\alpha_1), \\
c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \\
d_1 = 4c^2 - 4a^2 + 2L_1^2 - 4cL_1 \sin(\alpha_1 + \theta_{11})
\end{cases}
\tag{3.10}
$$

これらを用いて (3.8) 式が書き換えられ，θ_{21} は θ_{11} の関数で表される:

$$
\theta_{21} \equiv \theta_{21}(\theta_{11}) = \gamma - \arcsin\left(\frac{d_1}{c_1}\right)
\tag{3.11}
$$

ここでは，静止平衡解からの摂動として攪乱 $\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11})$, $\varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$ が小さいと仮定し，(3.11) 式を $\theta_{11} = 0$ の周りで Taylor 展開して θ_{11} の 2 次の多項式を次のように表す:

$$
\theta_{22}(\theta_{11}) = \theta_{220} + \theta_{221}\theta_{11} + \theta_{222}\theta_{11}^2
\tag{3.12}
$$

但し，先の検討結果により，(3.12) 式中の係数について $\theta_{220} = 0$, $\theta_{221} = 1$ が成り立つ．θ_{222} は，それぞれの場合で異なる値を取り，a, c, L_1, α_1 の関数である．$a = 1$, $L_1 = 1$ の場合には，θ_{222} は β $(0 < \beta < 2)$ の関数となる:

$$
\theta_{222} = \frac{(1-\beta)\sqrt{\beta}}{\sqrt{2-\beta}}
\tag{3.13}
$$

同様に，φ の定義式 (3.2) を平衡解の周りで展開して，次の近似式 $\varphi \sim \varphi_2$ を得る:

$$
\varphi_2 = -\beta_1 \left[\theta_{11} + \frac{\theta_{222}}{2}\theta_{11}^2\right]
\tag{3.14}
$$

但し、$\beta_1 = \beta - 1$ である。

質量 m_{pj} $(j = 1, 2, 3)$ の質点が長さ L_{pj} の糸の一端に繋がれ、他端を円木の重心から右側に長さ a_{pj} の位置に繋がれる。これにより、質点の座標 (x_{pj}, z_{pj}) は次のように表される:

$$
\begin{cases}
x_{pj} = x_G + a_{pj}\cos(\varphi) + L_{pj}\sin(\theta_{pj}), \\
z_{pj} = z_G - a_{pj}\sin(\varphi) + L_{pj}\cos(\theta_{pj})
\end{cases}
\tag{3.15}
$$

なお、円木の重心から左側に糸の他端を取り付ける場合には、a_{pj} を負の量と見做すものとする。つまり、**Fig.2** の場合、$a_{p1} < 0, a_{p2} = -a_{p1} > 0, a_{p3} = 0$ である。静止平衡状態では、幾何学的関係により $\theta_{pj} = 0, \varphi = 0$ であり、力の釣合と力の moment の釣合が成り立つ:

$$
\sum_{j=1}^{3} m_{pj} a_{pj} g = 0
\tag{3.16}
$$

静止平衡状態からの攪乱 θ_{11} について、その線形運動を記述するために必要な座標値は次のように表される:

$$
\begin{cases}
x_G \;\; = a\beta + x_0 + h\theta_{11}, \\
z_G \;\; = h + z_0 - \dfrac{1}{2}(h - a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2, \\
x_{G2} = a\beta + x_0 + (h + h_g\beta_1)\theta_{11}, \\
z_{G2} = h - h_g + z_0 - \left(h - a\theta_{222}\beta_1 - h_g\beta_1^2\right)\dfrac{\theta_{11}^2}{2}, \\
x_{pj} \;\; = a\beta - a_{pj} + x_0 + h\theta_{11} + L_{pj}\theta_{pj}, \\
z_{pj} \;\; = h + L_{pj} + z_0 - \beta_1 a_{pj}\theta_{11} \\
\qquad\quad + (-h + a\theta_{222}\beta_1 - \theta_{222}\beta_1 a_{pj})\dfrac{\theta_{11}^2}{2} - L_{pj}\dfrac{\theta_{pj}^2}{2}, \\
z_{pj0} = h + L_{pj} + z_0 - \beta_1 a_{pj}\theta_{11}, \\
\varphi_L \;\; = -\beta_1\theta_{11}
\end{cases}
\tag{3.17}
$$

質量 m_1 で重心回りの慣性 moment J の円木の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_{11}$ は、次式で与えられる:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{11} &= \frac{m_1}{2}\dot{x}_G^2 + \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2 - m_1 g z_{G1} \\ &= \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_0 + h\dot{\theta}_{11}\right)^2 + \frac{J}{2}\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2 \\ &+ m_1 g\left(h + z_0 - (h - a\theta_{222}\beta_1)\frac{\theta_{11}^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

但し、g は重力加速度を表す。これにより、円木の運動を記述する Lagrange の運動方程式は、次式で与えられる:

$$\left(m_1 h^2 + J\beta_1^2\right)\ddot{\theta}_{11} + m_1 h\ddot{x}_0 + m_1 g(h - a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11} = 0 \quad (3.19)$$

質量 m_2 で重心回りの慣性 moment J_2 の物体の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_{22}$ は、次式で与えられる:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{22} &= \frac{m_2}{2}\dot{x}_{G2}^2 + \frac{J_2}{2}\dot{\varphi}^2 - m_2 g z_{G2} \\ &= m_2 g\left(h - h_g + z_0 - (h - \beta_1(a\theta_{222} + h_g\beta_1))\frac{\theta_{11}^2}{2}\right) \\ &+ \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_0 + (h + h_g\beta_1)\dot{\theta}_{11}\right)^2 + \frac{J_2}{2}\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

これにより、物体の運動を記述する Lagrange の運動方程式は、次式で与えられる:

$$\begin{aligned}&\left(J_2\beta_1^2 + m_2(h + h_g\beta_1)^2\right)\ddot{\theta}_{11} + m_2(h + h_g\beta_1)\ddot{x}_0 \\ &+ m_2 g(h - \beta_1(a\theta_{222} + h_g\beta_1))\theta_{11} = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

質量 m_{pj} ($j = 1, 2, 3$) の質点が長さ L_{pj} の糸の一端に繋がれ、他端を円木の重心から長さ a_{pj} の位置に繋がれている。この小振子の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_{pj}$ は、次式で与えられる:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{pj} &= \frac{m_{pj}}{2}\left(\dot{x}_{pj}^2 + \dot{z}_{pj0}^2\right) - m_{pj} g z_{pj} \\ &= \frac{m_{pj}}{2}\left[\left(\dot{z}_0 - \beta_1 a_{pj}\dot{\theta}_{11}\right)^2 + \left(\dot{x}_0 + h\dot{\theta}_{11} + L_{pj}\dot{\theta}_{pj}\right)^2\right] \\ &+ m_{pj} g\Bigg(h + L_{pj} + z_0 - \beta_1 a_{pj}\theta_{11} \\ &-(h - \theta_{222}\beta_1(a - a_{pj}))\frac{\theta_{11}^2}{2} - \frac{\theta_{pj}^2}{2}L_{pj}\Bigg) \end{aligned} \quad (3.22)$$

これにより、質量 m_{pj} の小振子の運動を記述する Lagrange の運動方程式は、次式で与えられる:

$$m_{pj}L_{pj}\left[L_{pj}\ddot{\theta}_{pj} + h\ddot{\theta}_{11} + \ddot{x}_0 + g\theta_{pj}\right] = 0 \quad (3.23)$$

4 3 つの小振子

質量 m_2 の物体と質量 m_{p1}, m_{p2}, m_{p3} の小振子の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_3$ は、次式で与えられる:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 &= \mathcal{L}_{22} + \sum_{j=1}^{3}\mathcal{L}_{pj} \\ &= \frac{1}{2}\left(J_2\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2 + m_2\left(\dot{x}_0 + (h + h_g\beta_1)\dot{\theta}_{11}\right)^2\right) \\ &+ m_2 g\left((h - h_g) + z_0 + \left(-h + a\theta_{222}\beta_1 + h_g\beta_1^2\right)\frac{1}{2}\theta_{11}^2\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}m_{pj}\left[\left(\dot{z}_0 - \beta_1 a_{pj}\dot{\theta}_{11}\right)^2 + \left(\dot{x}_0 + h\dot{\theta}_{11} + L_{pj}\dot{\theta}_{pj}\right)^2\right] \\ &+ \sum_{j=1}^{3}m_{pj} g\Bigg(h + L_{pj} + z_0 - \beta_1 a_{pj}\theta_{11} \\ &-(h - \theta_{222}\beta_1(a - a_{pj}))\frac{1}{2}\theta_{11}^2 - L_{pj}\frac{1}{2}\theta_{p1}^2\Bigg) \end{aligned} \quad (4.1)$$

これにより、物体の運動方程式は、次式となる:

$$\begin{aligned}&\left(J_2\beta_1^2 + m_2(h + h_g\beta_1)^2\right)\ddot{\theta}_{11} + m_2(h + h_g\beta_1)\ddot{x}_0 \\ &+ g(m_1(h - a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11} \\ &+ \sum_{j=1}^{3}m_{pj}\left((h\ddot{x}_0 - \beta_1 a_{pj}\ddot{z}_0) + \left(h^2 + \beta_1^2 a_{pj}^2\right)\ddot{\theta}_{11} + hL_{pj}\ddot{\theta}_{pj}\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{3}m_{pj} g(\beta_1 a_{pj} + (h - \theta_{222}\beta_1(a - a_{pj}))\theta_{11})) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

但し、() 式により、$\ddot{z}_0$ の係数の総和は zero となるから、物体の運動方程式に $\ddot{z}_0$ は現れない。

質量 m_{pj} の小振子の運動方程式は、次式となる:

$$m_{pj}L_{pj}\left(g\theta_{pj} + \ddot{x}_0 + h\ddot{\theta}_{11} + L_{pj}\ddot{\theta}_{pj}\right) = 0 \quad (4.3)$$

5 5 つの小振子

質量 m_2 の物体と質量 m_{pj} ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) の 5 つの小振子の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_5$ は、次のように表される:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_5 &= \mathcal{L}_{22} + \sum_{j=1}^{5}\mathcal{L}_{pj} \\ &= \frac{1}{2}J_2\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_0 + (h + h_g\beta_1)\dot{\theta}_{11}\right)^2 \\ &+ m_2 g\left((h - h_g) + z_0 - \left(h - a\theta_{222}\beta_1 - h_g\beta_1^2\right)\frac{1}{2}\theta_{11}^2\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{5}\frac{1}{2}m_{pj}\left(\left(\dot{z}_0 - \beta_1 a_{pj}\dot{\theta}_{11}\right)^2 + \left(\dot{x}_0 + h\dot{\theta}_{11} + L_{pj}\dot{\theta}_{pj}\right)^2\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{5}m_{pj} g\Bigg[h + L_{pj} + z_0 - \beta_1 a_{pj}\theta_{11} \\ &-(h - \theta_{222}\beta_1(a - a_{pj}))\frac{1}{2}\theta_{11}^2 - \frac{1}{2}L_{pj}\theta_{pj}^2\Bigg] \end{aligned} \quad (5.1)$$

物体の運動方程式は、次のように表される;

$$\begin{aligned}&\left(J_2\beta_1^2+m_2(h+h_g\beta_1)^2\right)\ddot{\theta}_{11}+m_2(h+h_g\beta_1)\ddot{x}_0\\&+g(m_2(h-\beta_1(a\theta_{222}+h_g\beta_1))\theta_{11}\\&+\sum_{j=1}^{5}m_{pj}\left((h\ddot{x}_0-\beta_1a_{pj}\ddot{z}_0)+\left(h^2+\beta_1^2a_{pj}^2\right)\ddot{\theta}_{11}+hL_{pj}\ddot{\theta}_{pj}\right)\\&+\sum_{j=1}^{5}m_{pj}g(\beta_1a_{pj}+(h-\theta_{222}\beta_1(a-a_{pj}))\theta_{11}))=0\end{aligned} \tag{5.2}$$

但し、() 式により、$\ddot{z}_0$ の係数の総和は zero となるから、物体の運動方程式に $\ddot{z}_0$ は現れない。

質量 m_{pj} の小振子の運動方程式は、次式となる:

$$m_{pj}L_{pj}\left(g\theta_{pj}+\ddot{x}_0+h\ddot{\theta}_{11}+L_{pj}\ddot{\theta}_{pj}\right)=0 \tag{5.3}$$

6 おわりに

前報[6],[9] では，2 点吊り振子の 3 つの振動 mode の特徴を述べ，それらの振子の静止平衡状態を表す幾何学的関係式を図式解法により解いた．それに続き，本報告では，対称 2 点吊り振子の mode 1 の「遊動円木」に焦点をあて，静止平衡状態の幾何学的関係式を解析的に解き，攪乱状態の角度変数を用いて円木と物体の重力 potential energy 特性を示した．また，線形振動を記述する Lagrange 関数を求めて Lagrange の運動方程式を導き，固有角振動数の特性を議論した．関連する解析は，次報[13],[15] で扱う．

本報告の一部は，先に講演発表したもの[10],[11],[19] であることを付記する．

本研究遂行にあたり，本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して，柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] 川口 衛，立道 郁生: “21318 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 1 原理と免震床の実大実験” 学術講演梗概集. B-2, 構造 II, 振動, 原子力プラント 2000 (2000), pp.635-636(社団法人日本建築学会).

[2] 登坂 史生，川口 衛: “21319 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 2 高層建築物への適用” 学術講演梗概集. B-2, 構造 II, 振動, 原子力プラント 2000 (2000), pp.637-638(社団法人日本建築学会).

[3] 島田 圭一郎，川口 衛: “21298 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 3 対称 2 点吊り振子の性質について” 学術講演梗概集. 構造系 (B-2) (2002), pp.595-596(社団法人日本建築学会).

[4] 井出 知良，川口 衛，永田 秀正，服部 宏己，君島 昭男: “21300 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 4 実構造物における自由振動試験” 学術講演梗概集. 構造系 (B-2) (2002), pp.599-600(社団法人日本建築学会).

[5] Ding Zhou & Tianjian Ji: “Dynamic characteristics of a generalised suspension system” International Journal of Mechanical Sciences **50** (2008), pp.30-42.

[6] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (3): 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.63-70.

[7] 小出 昭一郎: “解析力学” 岩波書店，1983.

[8] 坪井 忠二: “振動論” (昭和 17 年初版発行，昭和 51 年復刻再版発行) 理工学社, 1976.

[9] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (4): 2 点吊り振子の実験と解析” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.71-78.

[10] 望月 孔二，宮内 太積，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之，Mazni Al Irfan，川船 雄一郎，佐々木 隆吾，舟田 敏雄: “PSD 簡易計測システム試作と 2 点吊り振子の実験・解析” 電子情報通信学会 2009 年総合大会 2009 年 3 月 17 日 (火)〜20 日 (金) 愛媛大（松山市）3 月 18 日 (水) 午前,「D-15 教育工学」(一般セッション), 講演番号：D-15-24
「電子情報通信学会 2009 年 総合大会講演論文集」の DVD 情報・システムソサイエティ p.202. file: d_15_024.pdf

[11] 宮内 太積，望月 孔二，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之，舟田 敏雄: “水平加振による非線形振動系の実験と振動解析 (振動学教材開発)” 日本機械学会東海支部第 58 期総会・講演会 2009 年 3 月 17 日 (火)，18 日 (水) 岐阜大学 工学部 3 月 18 日 (水) 12:45-14:00 GS 機械力学 講演番号 263.
日本機械学会 東海支部 第 58 回総会講演会 講演論文集 (’09.3.17-18)No.093-1, pp.133-134.

[12] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の基礎運動解析” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.

[13] 川上 誠，舟田 敏雄，マズニ アル イルファン，佐々木 隆吾，川船 雄一郎，中道 義之，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の非線形振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[14] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.

[15] 川上 誠，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介，

中道 義之，大庭 勝久，望月 孔二，宮内 太積: “2 点吊り振子と物体の強制振動によるカオスの数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[16] 宮内 太積，望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，川船 雄一郎，マズニ アル イルファン，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[17] 宮内 太積, 舟田 敏雄, 岩本 大, 中道 義之, 望月 孔二, 川上 誠: “非対称 2 点吊り振子と小振子の連成運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[18] 川上 誠，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，川船 雄一郎，マズニ アル イルファン，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介，大庭 勝久，中道 義之，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子と小振子の連成振動の制振評価: 静岡県の「プロジェクト TOUKAI (東海・倒壊)-0 (ゼロ)」による教材の開発 (3)” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[19] 舟田 敏雄，宮内 太積，望月 孔二，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成振動の数値解析” 第 58 回理論応用力学講演会 講演論文集 NCTAM2009, pp.255-256. 第 58 回理論応用力学講演会、日本学術会議、2009 年 6 月 9 日（火）〜11 日（木）、OS15 連成現象・複合現象のシミュレーション 講演番号 2B13 (6/10).
=====

[20] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，中道 義之:“2 点吊り振子の捩り振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[21] 舟田 敏雄, 舟田 孝和, 岩本 大, 中道 義之, 大庭 勝久: “円筒形容器における液体スロッシングの粘性ポテンシャル流解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[22] 舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介，石本 拓也，中道 義之，大庭 勝久，宮内 太積，川上 誠，望月 孔二: “出前授業のための「振子」教材の整備” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[23] 望月 孔二，舟田 敏雄，船津 佑介，岩本 大，清水 啓介, 石本 拓也, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠: “出前授業のための「振子」教材の整備: Pendulum Snake と 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[24] 舟田 敏雄，Kim Hyungjun，Joseph D. Daniel: “周辺支持の液滴・気泡の粘性による非回転的減衰振動” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[25] 舟田 敏雄: “Kelvin-Helmholtz 不安定の散逸法による解析と粘性ポテンシャル流解析との比較” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[26] 舟田 敏雄、岩本 大:“揺動 Wilberforce 振子の強制振動の基礎解析: 球面振子” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[27] 宮内 太積，舟田 敏雄，望月 孔二，大庭 勝久，中道 義之，川上 誠: “技術者教育のための「片持ち梁の振動実験」の分析・評価並びに高度化・展開 (2)” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[28] 望月 孔二，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介，中道 義之，大庭 勝久，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (5): 2 点吊り振子の捩れ振動” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[29] 中道 義之，舟田 敏雄，清水 啓介，岩本 大，船津 佑介，大庭 勝久: “Wilberforce 振子の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[30] 宮内 太積, 柴本 将志, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 望月 孔二, 川上 誠, 大庭 勝久, 中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成運動の実験と運動解析” **取下** 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[31] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，中道 義之:“2 点吊り振子の捩り振動の強制振動の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[32] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，中道 義之:“2 点吊り振子の捩り振動のパラメトリック励振の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[33] 中道 義之，大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介: “ 球面振子の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[34] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 中道 義之: “ 非線形回路の数値 simulation: Lorenz-Chen-Lü 方程式” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[35] 中道 義之，舟田 敏雄，清水 啓介，岩本 大，大庭 勝久: “揺動 Wilberforce 振子の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[36] 大庭 勝久，舟田 敏雄，中道 義之，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介: “揺動 Atwood 機械の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[37] 大庭 勝久、舟田 敏雄、岩本 大、杉山 清隆、藤田 將喜、漆畑 勇太、中道 義之、川上 誠、望月 孔二、宮内 太積:“揺動 Atwood 機械の数値 simulation: 球面振子” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[38] 大庭 勝久、中道 義之、舟田 敏雄、岩本 大、清水 啓介: “変形球面振子の解析とその強制減衰振動の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[39] 中道 義之，大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介: “ 支持点の励振による球面振子の数値

解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[40] 中道 義之，舟田 敏雄，大庭 勝久，川上 誠，宮内 太積，望月 孔二: “揺動 Wilberforce 振子の壁面からの励振の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[41] 中道 義之，舟田 敏雄，大庭 勝久，川上 誠，宮内 太積，望月 孔二: “揺動 Wilberforce 振子の強制振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[42] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，中道 義之、杉山 清隆、藤田 將喜、漆畑 勇太: “揺動 Atwood 機械の鉛直面内回転的パラメトリック励振の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[43] 舟田 敏雄，大庭 勝久，中道 義之，清水 啓介，岩本 大，船津 佑介: “準共振の理論モデル例” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[44] 中道 義之，舟田 敏雄，岩本 大、大庭 勝久、杉山 清隆、藤田 將喜、漆畑 勇太: “揺動 Atwood 機械の水平方向パラメトリック励振の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[45] 川上 誠，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介，石本 拓也，中道 義之，大庭 勝久，宮内 太積，望月 孔二: “出前授業のための「振子」教材の整備: 工学的拡張と応用” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[46] 舟田 敏雄，大庭 勝久，中道 義之，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介: “揺動 Atwood 機械の鉛直方向パラメトリック励振の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[47] 舟田敏雄、岩本大: “揺動 Atwood 機械の数値 simulation: 物理振子” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[48] 望月 孔二，舟田 敏雄，石本 拓也, 鈴木 健宏, 鈴木 寛里: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 42 号 (2008), pp.57-66.

[49] 望月 孔二，舟田 敏雄，石本 拓也, 鈴木 健宏, 鈴木 寛里, 小代田 和己, 川上 誠: “PSD を用いた簡易計測システムの試作” 沼津高専研究報告 第 42 号 (2008), pp.67-76.

[50] 津川 昭良: “紐に吊された 2 振子の連成振動のラプラス変換法による解法と工学教育への応用” 山形大学紀要. 工学 15(1), pp.201-213.

[51] M. R. Jardin: “Optimized Measurements of UAV Mass Moment of Inertia with a Bifilar Pendulum” Matt R. Jardin AIAA 2007-6822 AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit 20 - 23 August 2007, Hilton Head, South Carolina.

[52] M. R. Matthews, C. F. Gauld, & A. Stinner: “The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspectives” Springer (2005).

[53] L.D. Akulenko: “Optimal control of motions of a bifilar pendulum” Journal of Applied Mathematics and Mechanics Volume 68, Issue 5, 2004, Pages 707-717

[54] 舟田 敏雄, 田代 直人, 園田 泰之, 前原 貴憲, 川上 誠, 齋藤 学, 小山 雅弘, 村田 裕也, 今村 昌幸, 藤田 邦彦: “Computational Fluid Dyanamics への指向” 沼津高専研究報告 第 39 号（2004), pp.31-40.

[55] 舟田 敏雄，田代 直人，園田 泰之，藤田 邦彦，齋藤 学，小山 雅弘，村田 裕也，今村 昌幸: “技術者教育のための工学数理の力学教材の改定 — ブランコの運動と Mathieu 方程式 —” 沼津高専研究報告 第 40 号 (2005), pp.23-32.

[56] 望月 孔二, 内堀 晃彦, 川上 誠, 宮内 太積, 舟田 敏雄: “PSD による簡易計測システム試作と多点吊り振子の実験・解析” 平成 20 年度 電気関係学会 東海支部連合大会，愛知県立大学 (愛知郡長久手町大字熊張字茨ヶ廻間 1522-3)，平成 20 年 9 月 18 日 (木)〜19 日 (金)，講演番号: O-430，講演論文集 O_430.pdf

[57] 舟田 敏雄，鈴木 健宏，石本 拓也，川上 誠，望月 孔二: “技術者教育のための工学数理の力学教材の改定 (4): 斜めに取り付けられたバネによる物体の非線形強制振動とカオス” 沼津高専研究報告第 42 号 (2007), pp.133-142.

[58] 堀 郁夫，川端 鋭憲: “地震による石油タンク火災の技術的考察と社会問題” 社会技術研究論文集 **2** (2004), pp.414-424.

[59] 宮内 太積, 會田 隆弘, 大森 継, 舟田 敏雄, 望月 孔二, 内堀 晃彦，川上 誠: “水平加振による非線形振動系の実験と振動解析” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.15-20.

[60] 宮内 太積, 望月 孔二, 舟田 敏雄, 内堀 晃彦, 川上 誠: “水平加振による非線形振動系の実験と振動解析 (2)” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.21-28.

[61] 近藤 孝広，盆子原 康博，森 博輝，石川 諭: “振り子型振動子群の自己同期現象: 第 1 報 メトロノームの自己同期現象に対するシューティング法による解析” 日本機械学會論文集. C 編 68(676) (2002), pp.3499-3506.

[62] 盆子原 康博，近藤 孝広，石川 諭，森 博輝，佐藤 勇一，長嶺 拓夫: “746 強制振動モデルを用いたメトロノームの自己同期解の推定法”

[63] 石川 諭，森 博輝，盆子原 康博，近藤 孝広: “812 メトロノームの自己同期化現象の発生メカニズムに関する解析的研究”

[64] A. Vyas, A. K. Bajaj: “Dynamics of autoparametric vibration absorbers using multiple pendulums” Journal of

Sound and Vibration, Volume 246, Issue 1, 6 September 2001, Pages 115-135

[65] 濱田 曉, 松久 寛, 宇津野 秀夫, 山田 啓介, 松村 拓樹, 澤田 勝利: “450 ワイヤーの屈折を考慮したコリオリ型アクティブ制振の研究” Dynamics & Design Conference 2007, pp.450-1-450-6, 20070925 (社団法人日本機械学会)

[66] 松久 寛，宇津野 秀夫，磯野 充典: “コリオリ力を用いた動吸振器による索道搬器の制振 (機械力学, 計測, 自動制御)” 日本機械学會論文集. C 編 72(722), pp.3170-3176, 20061025 (ISSN 03875024) (日本機械学会/社団法人日本機械学会)

[67] 磯野 充典，松久 寛，宇津野 秀夫，朴 正圭，澤田 勝利: “321 コリオリカを用いた動吸振器による索道搬器の制振 (OS-3 ダンパ)” 関西支部講演会講演論文集 2006(81),”3-25”,20060317(社団法人日本機械学会)

[68] 磯野 充典，松久 寛，宇津野 秀夫，朴 正圭，北浦 寛斗: “312 コリオリ動吸振器によるゴンドラの減揺” Dynamics & Design Conference 2005, pp.312-1-312-6, 20050822 (社団法人日本機械学会)

目次

質量 m_{p1} の小振子の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_{p1}$ は、次式で与えられる:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{p1} &= \frac{m_{p1}}{2}\left(\dot{x}_{p1}^2+\dot{z}_{p1}^2\right)-m_{p1}gz_{p1}\\ &= m_{p1}g\,(h+L_{p1}+z_0-\beta_1 a_{p1}\theta_{11}\\ &\quad -(h+\theta_{222}\beta_1(-a+a_{p1}))\frac{\theta_{11}^2}{2}-\frac{\theta_{p1}^2}{2}L_{p1}\Big)\\ &\quad +\frac{m_{p1}}{2}\left(\left(\dot{z}_0-\beta_1 a_{p1}\dot{\theta}_{11}\right)^2\right.\\ &\quad \left.+\left(\dot{x}_0+h\dot{\theta}_{11}+L_{p1}\dot{\theta}_{p1}\right)^2\right)\end{aligned} \tag{付録.1}$$

質量 m_{p1} の小振子の運動を記述する Lagrange の運動方程式は、次式で与えられる:

$$m_{p1}gL_{p1}\theta_{p1}+L_{p1}m_{p1}\ddot{x}_0+hL_{p1}m_{p1}\ddot{\theta}_{11}+L_{p1}^2m_{p1}\ddot{\theta}_{p1}=0 \tag{付録.2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_3 &= \mathcal{L}_{22}+\mathcal{L}_{p1}+\mathcal{L}_{p2}+\mathcal{L}_{p3}\\ &= m_2g\left((h-h_g)+z_0+\left(-h+a\theta_{222}\beta_1+h_g\beta_1^2\right)\frac{1}{2}\theta_{11}^2\right)\\ &+m_{p1}g\,(h+L_{p1}+z_0-\beta_1 a_{p1}\theta_{11}\\ &-(h+\theta_{222}\beta_1(-a+a_{p1}))\frac{1}{2}\theta_{11}^2-L_{p1}\frac{1}{2}\theta_{p1}^2\Big)\\ &+m_{p2}g\,(h+L_{p2}+z_0-\beta_1 a_{p2}\theta_{11}\\ &-(h+\theta_{222}\beta_1(-a+a_{p2}))\frac{1}{2}\theta_{11}^2-L_{p2}\frac{1}{2}\theta_{p2}^2\Big)\\ &+m_{p3}g\,(h+L_{p3}+z_0-\beta_1 a_{p3}\theta_{11}\\ &-(h+\theta_{222}\beta_1(-a+a_{p3}))\frac{1}{2}\theta_{11}^2-L_{p3}\frac{1}{2}\theta_{p3}^2\Big)\\ &+\frac{1}{2}\left(J_2\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2+m_2\left(\dot{x}_0+(h+h_g\beta_1)\dot{\theta}_{11}\right)^2\right)\\ &+\frac{1}{2}m_{p1}\left(\left(\dot{z}_0-\beta_1 a_{p1}\dot{\theta}_{11}\right)^2+\left(\dot{x}_0+h\dot{\theta}_{11}+L_{p1}\dot{\theta}_{p1}\right)^2\right)\\ &+\frac{1}{2}m_{p2}\left(\left(\dot{z}_0-\beta_1 a_{p2}\dot{\theta}_{11}\right)^2+\left(\dot{x}_0+h\dot{\theta}_{11}+L_{p2}\dot{\theta}_{p2}\right)^2\right)\\ &+\frac{1}{2}m_{p3}\left(\left(\dot{z}_0-\beta_1 a_{p3}\dot{\theta}_{11}\right)^2+\left(\dot{x}_0+h\dot{\theta}_{11}+L_{p3}\dot{\theta}_{p3}\right)^2\right)\end{aligned} \tag{付録.3}$$

質量 m_{p1} の小振子の運動方程式は、次式となる:

$$m_{p1}L_{p1}\left(g\theta_{p1}+\ddot{x}_0+h\ddot{\theta}_{11}+L_{p1}\ddot{\theta}_{p1}\right) \tag{付録.4}$$

質量 m_{p2} の小振子の運動方程式は、次式となる:

$$m_{p2}L_{p2}\left(g\theta_{p2}+\ddot{x}_0+h\ddot{\theta}_{11}+L_{p2}\ddot{\theta}_{p2}\right) \tag{付録.5}$$

質量 m_{p3} の小振子の運動方程式は、次式となる:

$$m_{p3}L_{p3}\left(g\theta_{p3}+\ddot{x}_0+h\ddot{\theta}_{11}+L_{p3}\ddot{\theta}_{p3}\right)=0 \tag{付録.6}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_5 &= \mathcal{L}_{22} + \mathcal{L}_{p1} + \mathcal{L}_{p2} + \mathcal{L}_{p3} + \mathcal{L}_{p4} + \mathcal{L}_{p5} \\
&= m_2 g \left((h - h_g) + z_0 - \left(h - a\theta_{222}\beta_1 - h_g\beta_1^2\right) \frac{1}{2}\theta_{11}^2 \right) \\
&+ m_{p1} g \left((h + L_{p1} + z_0 - \beta_1 a_{p1}\theta_{11} \right. \\
&\left. -(h - \theta_{222}\beta_1(a - a_{p1}))\frac{1}{2}\theta_{11}^2 \right) - \frac{1}{2} L_{p1}\theta_{p1}^2 \Big) \\
&+ m_{p2} g \left((h + L_{p2} + z_0 - \beta_1 a_{p2}\theta_{11} \right. \\
&\left. -(h - \theta_{222}\beta_1(a - a_{p2}))\frac{1}{2}\theta_{11}^2 \right) - \frac{1}{2} L_{p2}\theta_{p2}^2 \Big) \\
&+ m_{p3} g \left((h + L_{p3} + z_0 - \beta_1 a_{p3}\theta_{11} \right. \\
&\left. -(h - \theta_{222}\beta_1(a - a_{p3}))\frac{1}{2}\theta_{11}^2 \right) - \frac{1}{2} L_{p3}\theta_{p3}^2 \Big) \\
&+ m_{p4} g \left((h + L_{p4} + z_0 - \beta_1 a_{p4}\theta_{11} \right. \\
&\left. -(h - \theta_{222}\beta_1(a - a_{p4}))\frac{1}{2}\theta_{11}^2 \right) - \frac{1}{2} L_{p4}\theta_{p4}^2 \Big) \\
&+ m_{p5} g \left((h + L_{p5} + z_0 - \beta_1 a_{p5}\theta_{11} \right. \\
&\left. -(h - \theta_{222}\beta_1(a - a_{p5}))\frac{1}{2}\theta_{11}^2 \right) - \frac{1}{2} L_{p5}\theta_{p5}^2 \Big) \\
&+ \frac{1}{2} \left(J_2\beta_1^2\dot\theta_{11}^2 + m_2 \left(\dot x_0 + (h + h_g\beta_1)\dot\theta_{11} \right)^2 \right) \\
&+ \frac{1}{2} m_{p1} \left(\left(\dot z_0 - \beta_1 a_{p1}\dot\theta_{11} \right)^2 + \left(\dot x_0 + h\dot\theta_{11} + L_{p1}\dot\theta_{p1} \right)^2 \right) \\
&+ \frac{1}{2} m_{p2} \left(\left(\dot z_0 - \beta_1 a_{p2}\dot\theta_{11} \right)^2 + \left(\dot x_0 + h\dot\theta_{11} + L_{p2}\dot\theta_{p2} \right)^2 \right) \\
&+ \frac{1}{2} m_{p3} \left(\left(\dot z_0 - \beta_1 a_{p3}\dot\theta_{11} \right)^2 + \left(\dot x_0 + h\dot\theta_{11} + L_{p3}\dot\theta_{p3} \right)^2 \right) \\
&+ \frac{1}{2} m_{p4} \left(\left(\dot z_0 - \beta_1 a_{p4}\dot\theta_{11} \right)^2 + \left(\dot x_0 + h\dot\theta_{11} + L_{p4}\dot\theta_{p4} \right)^2 \right) \\
&+ \frac{1}{2} m_{p5} \left(\left(\dot z_0 - \beta_1 a_{p5}\dot\theta_{11} \right)^2 + \left(\dot x_0 + h\dot\theta_{11} + L_{p5}\dot\theta_{p5} \right)^2 \right)
\end{aligned}
\tag{付録.7}
$$

$$
\begin{aligned}
& g(m_2(h - \beta_1(a\theta_{222} + h_g\beta_1))\theta_{11} \\
&+ m_{p1}(\beta_1 a_{p1} + (h + \theta_{222}\beta_1(-a + a_{p1}))\theta_{11})) \\
&+ m_{p2}(\beta_1 a_{p2} + (h + \theta_{222}\beta_1(-a + a_{p2}))\theta_{11})) \\
&+ m_{p3}(\beta_1 a_{p3} + (h + \theta_{222}\beta_1(-a + a_{p3}))\theta_{11})) \\
&+ m_{p4}(\beta_1 a_{p4} + (h + \theta_{222}\beta_1(-a + a_{p4}))\theta_{11})) \\
&+ m_{p5}(\beta_1 a_{p5} + (h + \theta_{222}\beta_1(-a + a_{p5}))\theta_{11})) \\
&+ m_2(h + h_g\beta_1)\ddot x_0 + \left(J_2\beta_1^2 + m_2(h + h_g\beta_1)^2 \right) \ddot\theta_{11} \\
&+ m_{p1} \left((h\ddot x_0 - \beta_1 a_{p1}\ddot z_0) + \left(h^2 + \beta_1^2 a_{p1}^2 \right) \ddot\theta_{11} + hL_{p1}\ddot\theta_{p1} \right) \\
&+ m_{p2} \left((h\ddot x_0 - \beta_1 a_{p2}\ddot z_0) + \left(h^2 + \beta_1^2 a_{p2}^2 \right) \ddot\theta_{11} + hL_{p2}\ddot\theta_{p2} \right) \\
&+ m_{p3} \left((h\ddot x_0 - \beta_1 a_{p3}\ddot z_0) + \left(h^2 + \beta_1^2 a_{p3}^2 \right) \ddot\theta_{11} + hL_{p3}\ddot\theta_{p3} \right) \\
&+ m_{p4} \left((h\ddot x_0 - \beta_1 a_{p4}\ddot z_0) + \left(h^2 + \beta_1^2 a_{p4}^2 \right) \ddot\theta_{11} + hL_{p4}\ddot\theta_{p4} \right) \\
&+ m_{p5} \left((h\ddot x_0 - \beta_1 a_{p5}\ddot z_0) + \left(h^2 + \beta_1^2 a_{p5}^2 \right) \ddot\theta_{11} + hL_{p5}\ddot\theta_{p5} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{付録.8}
$$

質量 m_{p1} の小振子の運動方程式は、次式となる:

$$m_{p1}L_{p1}\left(g\theta_{p1} + \ddot x_0 + h\ddot\theta_{11} + L_{p1}\ddot\theta_{p1} \right) = 0 \tag{付録.9}$$

質量 m_{p2} の小振子の運動方程式は、次式となる:

$$m_{p2}L_{p2}\left(g\theta_{p2} + \ddot x_0 + h\ddot\theta_{11} + L_{p2}\ddot\theta_{p2} \right) = 0 \tag{付録.10}$$

質量 m_{p3} の小振子の運動方程式は、次式となる:

$$m_{p3}L_{p3}\left(g\theta_{p3} + \ddot x_0 + h\ddot\theta_{11} + L_{p3}\ddot\theta_{p3} \right) = 0 \tag{付録.11}$$

質量 m_{p4} の小振子の運動方程式は、次式となる:

$$m_{p4}L_{p4}\left(g\theta_{p4} + \ddot x_0 + h\ddot\theta_{11} + L_{p4}\ddot\theta_{p4} \right) = 0 \tag{付録.12}$$

質量 m_{p5} の小振子の運動方程式は、次式となる:

$$m_{p5}L_{p5}\left(g\theta_{p5} + \ddot x_0 + h\ddot\theta_{11} + L_{p5}\ddot\theta_{p5} \right) = 0 \tag{付録.13}$$