2 点吊り振子と物体の強制振動によるカオスの数値解析

川上 誠[*1*2] 舟田 敏雄[*1*2] 岩本 大[*1] 清水 啓介[*1] 船津 佑介[*1]
中道 義之[*1*3] 大庭 勝久[*1*2] 望月 孔二[*2*4] 宮内 太積[*2*5]

Numerical Analysis of the Chaotic Motion of a Bifilar Suspension Pendulum and a Body Due to an External Excitation

Makoto KAWAKAMI[*1*2] Toshio FUNADA[*1*2] Dai IWAMOTO[*1] Keisuke SHIMIZU[*1]
Yusuke FUNATSU[*1] Yoshiyuki NAKAMICHI[*1*3] Katsuhisa OOBA[*1*2]
Kouji MOCHIZUKI[*2*4] and Tatsumi MIYAUCHI[*2*5]

Abstract: The position and attitude of a bifilar suspension pendulum on which a body is attached can be described in terms of angular variables in polar coordinates. To simplify some complicated relations on the configuration of the pendulum, Taylor expansion may be applied around its equilibrium rest state to lead to the equation of motion with nonlinear terms. After involving a linear damper and an external periodic force, the equation can be solved numerically as an initial value problem. For some ranges of the system parameters, regular periodic and chaotic motions can be found. Some typical examples of the chaotic motion are shown here to be caused by period doubling.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Body on the Pendulum, External Periodic Excitation, Chaotic Solution

1　はじめに

2 点吊り振子の力学問題[1]–[3] では，2 本の糸で棒 (遊動円木) の端を吊り下げている静止平衡状態について, 座標値を用いて束縛条件が記述され，それを平面極座標による角度の非線形関数方程式として，図式解法により解いた．しかし，その座標値間の関係式の逆変換が多価関数であるため厳密な扱いは面倒になる．この静止平衡状態周りの振子運動は，糸と棒の成す鉛直面内で揺れる “mode 1” とそれに垂直な鉛直面内で揺れる “mode 2” がある．先の報告[4]–[6] では 2 点吊り振子の線形並びに非線形振動の力学的問題が定式化され，自由振動等の基礎解析が行われた．非線形問題では級数展開による近似式を用いて円木の非線形振動解析が行われた[5]．さらに円木の上の物体に対する運動について周期的外力と減衰の効果を考慮して数値計算を行い，周期解とカオス解が見出されたので，ここに報告する．

2　2 点吊り振子の静止平衡状態周りの揺動

水平面上の 2 点 C_1, C_2 (距離 $2c$) に長さ L_1 と L_2 の糸の端を繋ぎ，他端を長さ $2a$ の棒の端点 A, B に繋いで，棒を吊り下げると，重力の作用で棒を鉛直面 C_1, A, B, C_2 内で揺動させることができる．これを 2 点吊り振子 (“mode 1” の振動) と呼ぶ．**Fig.1** には $c > a$ で $L_2 = L_1$ の場合 (対称 2 点吊り振子) の円木と振子の静止平衡状態が示されており，破線のように運動するとき糸の振れと棒の振れ (傾き) が逆位相となり，円木は並進・回転運動する．一方，$c < a$ の場合では糸と棒の振れが同位相となる．ほかに，並進振子 ($c = a$) の場合には，振子が揺れても棒は水平に保たれ，円木は並進運動する．

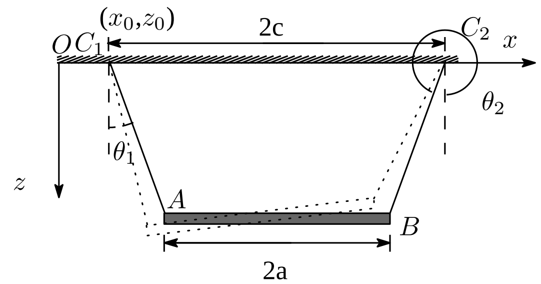

Fig.1 Bifilar suspension pendulum with $c > a$.

Fig.1 の振子の配置を表すため，デカルト座標系 (x, y, z) の原点を O に取り，右向きに x 軸，鉛直下方に z 軸を取る．糸に束縛されて，棒は $y = 0$ の鉛直面 (x-z 面) 内で運動する．この鉛直面内に取った平面極座標系 (r, θ) を用い，左側支持点 (x_0, z_0) を通る鉛直軸と糸が成す角度を θ_1 とし，右側支持点 $(x_0 + 2c, z_0)$ を通る鉛直軸と糸が成す角度を θ_2 と表すと，各点の座標は次のように表される:

$$
\begin{cases}
\text{左側端点 } A : (x_A,\ z_A) \\
= (x_0 + L_1 \sin(\theta_1),\ z_0 + L_1 \cos(\theta_1)), \\
\text{右側端点 } B : (x_B,\ z_B) \\
= (x_0 + 2c + L_2 \sin(\theta_2),\ z_0 + L_2 \cos(\theta_2))
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

静止壁面の場合には (x_0, z_0) は一定値である．ここで，円木が一様な線密度 ρ を持つとすると，円木の質量は $m_1 = 2a\rho$ であり，重心の位置 (x_G, z_G) は，円木の中央に

[*1] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.

[*2] 専攻科: Advanced Engineering Course.

[*3] 総合情報センター: Information Technology Center.

[*4] 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.

[*5] 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.

なるから，$x_G = (x_A + x_B)/2, z_G = (z_A + z_B)/2$ と表される．円木の並進運動は (x_G, z_G) を用いて記述され，円木の重心回りの鉛直面内の回転 (y 軸回りの回転) は角度 φ で記述される．**Fig.1** に示されるように，水平面を基準として測った棒の傾き角度 φ は，次式で定義される:

$$\tan(\varphi) = -\frac{z_B - z_A}{x_B - x_A} \tag{2.2}$$

(2.1) 式より，棒の端点間の距離 (棒の長さ) の自乗 $(2a)^2$ が求められる:

$$(2a)^2 = (x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \tag{2.3}$$

(2.3) 式は θ_1 と θ_2 の関係式を与え，(2.2) 式では φ が θ_1 と θ_2 の関数として与えられる．

3　2 点吊り振子の配置の関係式

円木の重心の座標 (x_G, z_G) と傾き角度 φ は，静止平衡状態 ($\theta_1 = \alpha_1, \theta_2 = 2\pi - \alpha_1, \sin(\alpha_1) = (c-a)/L_1, \varphi = 0$) に攪乱を重ね合わせて，$\theta_1 = \alpha_1 + \theta_{11}, \theta_2 = 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21}$, $\varphi = 0 + \varphi_1$ と表し，$\theta_{21} = \theta_{21}(\theta_{11})$ (θ_{21} の多項式展開が (3.2) 式の θ_{22}), $\varphi_1 = \varphi_1(\theta_{11})$ (φ_1 の多項式展開が (3.4) 式の φ_2) を考慮して，攪乱状態を θ_{11} で記述する:

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha_1 + \theta_{11},\ \ \theta_2 = 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21}, \\ x_G = c + L_1(\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1))/2 + x_0, \\ z_G = L_1(\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1))/2 + z_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

攪乱 θ_{11}, $\theta_{21}(\theta_{11})$, $\varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$ を用いて対称 2 点吊り振子の運動を記述するとき，時間の未知関数 $\theta_{11}(t)$ により Lagrange 関数や運動方程式が表現され，運動方程式を解いて攪乱の時間発展が求められる．このとき，$\theta_{21}(\theta_{11})$, $\varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$ が θ_{11} の一価関数であり，それらの時間微分の表式があまり複雑でないことが必要である．実際，(2.2), (2.3) 式の変数と parameter を文字式のままで円木・物体・小振子の座標値を表現し，角度を時間の未知関数として Lagrange 関数や運動方程式を導出することは Mathematica6J (RAM2GB) では困難であり，表式の置き換えや数値化が必要となる．ここでは，静止平衡解からの摂動として攪乱 θ_{11}, $\theta_{21}(\theta_{11})$, $\varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$ が小さいと仮定して，(2.2), (2.3) 式を $\theta_{11} = 0$ の周りで Taylor 展開して θ_{11} の 4 次の多項式を求める．その結果，θ_{21} は次の多項式 θ_{22} で表される:

$$\begin{aligned} \theta_{22}(\theta_{11}) = \theta_{220} + \theta_{221}\theta_{11} + \theta_{222}\theta_{11}^2 + \theta_{223}\theta_{11}^3 \\ + \theta_{224}\theta_{11}^4 \end{aligned} \tag{3.2}$$

但し，先の検討結果により，(3.2) 式中の係数について $\theta_{220} = 0, \theta_{221} = 1$ が成り立つ．他の係数は a, c, L_1, α_1 の関数であり，次のように表される:

$$\begin{cases} \theta_{222} = \dfrac{(1-\beta)\sqrt{\beta}}{\sqrt{2-\beta}},\ \ \theta_{223} = \dfrac{(\beta-1)^2\beta}{2-\beta}, \\ \theta_{224} = \dfrac{\sqrt{\beta}\left(1 + 15\beta - 40\beta^2 + 36\beta^3 - 12\beta^4\right)}{12(2-\beta)^{3/2}} \end{cases} \tag{3.3}$$

(3.2), (3.3) 式を用い，(2.2) 式を Taylor 展開して θ_{11} の 4 次の項まで取ると，φ_1 は多項式 φ_2 で表される:

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & -\beta_1\theta_{11} - \frac{\theta_{222}}{2}\beta_1\theta_{11}^2 \\ & + \left(\frac{h}{2a}\theta_{222}\beta + \frac{\beta_1}{6}\left(1 - 3\theta_{223} + 3\beta_1 + 2\beta_1^2\right)\right)\theta_{11}^3 \\ & + \left[\frac{h}{4a}\left(\theta_{222}^2 + 2\theta_{223}\right)\beta \right. \\ & \left. + \frac{\beta_1}{4}\left(\theta_{222}\left(1 + 3\beta_1 + 2\beta_1^2\right) - 2\theta_{224}\right)\right]\theta_{11}^4 \end{aligned} \tag{3.4}$$

振子の運動では，水平変位の Taylor 展開は角度攪乱 θ_{11} の 1 次の項から始まり，鉛直変位は θ_{11} の 2 次の項から始まる．従って，水平・鉛直変位は 2 次の項まで取り，運動 energy は 4 次の項まで取る．回転角は 2 次の項まで取り，回転運動 energy は 4 次の項まで取る．一方，重力 potential energy は鉛直変位で記述されるので，4 次の項まで取る．これらを考慮して Lagrange 関数は攪乱の 4 次までの項で構成し，運動方程式を導くことができる．

円木の重心の座標値の多項式は，次のように表される:

$$\begin{cases} x_G = x_0 + a\beta + h\theta_{11} + \dfrac{1}{2}h\theta_{222}\theta_{11}^2, \\ z_{G02} = z_0 + h - \dfrac{1}{2}(h - a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2, \\ z_G = z_{G02} - \dfrac{1}{2}(h\theta_{222} - a\theta_{223}\beta_1)\theta_{11}^3 \\ + \dfrac{1}{24}\left(h\left(1 - 6\theta_{222}^2 - 12\theta_{223}\right)\right. \\ \left. - 6a(\theta_{222} - 2\theta_{224})\beta_1\right)\theta_{11}^4, \end{cases} \tag{3.5}$$

x_G, z_{G02} は円木の運動 energy の計算に用いられ，z_G は円木の重力 potential energy に用いられる．

Fig.2 に示すように，円木に載せた質量 m_2 の物体の重心の座標 (x_{G2}, z_{G2}) は，重心の高さ h_g を用いて，次のように表わされる:

$$x_{G2} = x_G - h_g\sin\varphi,\ \ z_{G2} = z_G - h_g\cos\varphi \tag{3.6}$$

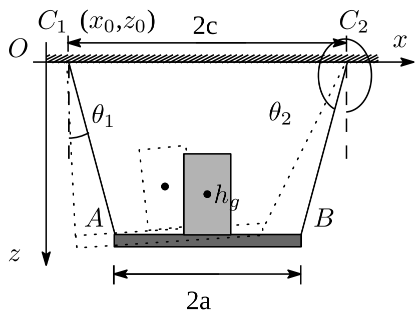

Fig.2 A body with the height of its center of mass h_g, on the bifilar suspension pendulum.

円木の質量を無視すると，物体の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_2$ は，物体重心の並進運動と重心回りの回転運動と重力を考慮して，次のように表される:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_{G2}^2 + \dot{z}_{G2}^2) + \frac{J_2}{2}\dot{\varphi}^2 + m_2 g z_{G2} \tag{3.7}$$

これに (3.6) 式を代入して整理すると，次式を得る:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= T_2 + R_{T2} - U_2 \\
&= m_2 g \Big[(h - h_g) - \frac{1}{2}(h - \beta_1(a\theta_{222} + h_g\beta_1))\theta_{11}^2 - \frac{1}{2}(h\theta_{222} - \beta_1(a\theta_{223} + h_g\theta_{222}\beta_1))\theta_{11}^3 \\
&\quad - \left(\frac{a}{4}(\theta_{222} - 2\theta_{224})\beta_1 + \frac{hh_g}{2a}\theta_{222}\beta_1\beta - \frac{1}{24}\left(h\left(1 - 6\theta_{222}^2 - 12\theta_{223}\right) + h_g\beta_1^2\left(3\theta_{222}^2 + 12\theta_{223} - (2 + 3\beta_1)^2\right)\right)\right)\theta_{11}^4 \Big] \\
&\quad + \frac{J_2\beta_1}{2a}\left[a\beta_1 + 2a\theta_{222}\beta_1\theta_{11} - \left(3h\theta_{222}\beta + a\beta_1\left(1 - \theta_{222}^2 - 3\theta_{223} + 3\beta_1 + 2\beta_1^2\right)\right)\theta_{11}^2\right]\dot{\theta}_{11}^2 \\
&\quad + \frac{m_2}{2}\left[(h + h_g\beta_1)^2 + 2\theta_{222}(h + h_g\beta_1)^2\theta_{11} + \left(\theta_{222}^2(h + h_g\beta_1)^2 + (h - \beta_1(a\theta_{222} + h_g\beta_1))^2\right)\theta_{11}^2\right]\dot{\theta}_{11}^2 \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Lagrange 関数 $\mathcal{L}_2$ より，Lagrange の運動方程式が求められ，減衰項と周期外力項が追加される:

$$
\begin{aligned}
& m_2 g \Big[(h - \beta_1(a\theta_{222} + h_g\beta_1))\theta_{11} + \frac{3}{2}(h\theta_{222} - \beta_1(a\theta_{223} + h_g\theta_{222}\beta_1))\theta_{11}^2 \\
& + \left(a(\theta_{222} - 2\theta_{224})\beta_1 + \frac{2hh_g}{a}\theta_{222}\beta_1\beta - \frac{1}{6}\left(h\left(1 - 6\theta_{222}^2 - 12\theta_{223}\right) + h_g\beta_1^2\left(3\theta_{222}^2 + 12\theta_{223} - (2 + 3\beta_1)^2\right)\right)\right)\theta_{11}^3 \Big] \\
& + J_2\theta_{222}\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2 + m_2\theta_{222}(h + h_g\beta_1)^2\dot{\theta}_{11}^2 \\
& - \theta_{11}\left[\frac{J_2\beta_1}{a}\left(3h\theta_{222}\beta + a\beta_1\left(1 - \theta_{222}^2 - 3\theta_{223} + 3\beta_1 + 2\beta_1^2\right)\right)\dot{\theta}_{11}^2 - m_2\left(\theta_{222}^2(h + h_g\beta_1)^2 + (h - \beta_1(a\theta_{222} + h_g\beta_1))^2\right)\dot{\theta}_{11}^2\right] \\
& + \Big[J_2\beta_1^2 + m_2(h + h_g\beta_1)^2 + \left(2J_2\theta_{222}\beta_1^2 + 2m_2\theta_{222}(h + h_g\beta_1)^2\right)\theta_{11} \\
& - \left(\frac{J_2\beta_1}{a}\left(3h\theta_{222}\beta + a\beta_1\left(1 - \theta_{222}^2 - 3\theta_{223} + 3\beta_1 + 2\beta_1^2\right)\right) - m_2\left(\theta_{222}^2(h + h_g\beta_1)^2 + (h - \beta_1(a\theta_{222} + h_g\beta_1))^2\right)\right)\theta_{11}^2 \Big]\ddot{\theta}_{11} \\
& = -c_1\dot{\theta}_{11} + F_1\cos(\omega t) \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

ここで，c_1 は減衰係数であり，F_1, ω は外力の振幅と角振動数を表す．(3.9) 式は θ_{11} の非線形非同次 2 階微分方程式であり，初期値問題として数値的に解くことができる．なお，(3.9) 式の右辺は，$\beta = 1$ のとき $\beta_1 = 0, \theta_{222} = \theta_{223} = \theta_{224} = 0$ により，単振動の方程式について非線形項を展開した場合に対応している．

4　2 点吊り振子の配置の具体例

$\beta > 1$ と $\beta = 0.6$ の計算結果を示す．

4.1　$\beta > 1$ の計算例

系の規定値を $L_2 = L_1 = 1$, $a = 1$, $c = 1.2$, $\alpha_1 = \arcsin[(c - a)/L_1]$, $\beta = c/a = 1.2$, $h = L_1\cos(\alpha_1)$, $m_2 = 1$, $g = 1$, $J_2 = 1$, $h_g = 0.1$ と設定し，初期値を $\theta_{11}(0) = 0.001, \dot{\theta}_{11}(0) = 0$ と取り，c_1, F_1, ω を変えて計算時間 $0 \le t \le t_e$ $(t_e = 2\pi \times 121)$ で数値計算し，ω を基準に採取時間 $t_s \le t \le t_e$ $(t_s = 2\pi \times 20)$ の data を抽出する．

$\omega = 1/3$ とし，c_1, F_1 を変化させて，数値計算を行った．後述の **Fig.6c** のカオス解に対応して，第一に，$F_1 = 6$ の解の連続時間での振舞は周期運動 (**Fig.3a**) であり，spectrum (**Fig.3b**) は 3 つの peak 値からなる振動であることが示される．

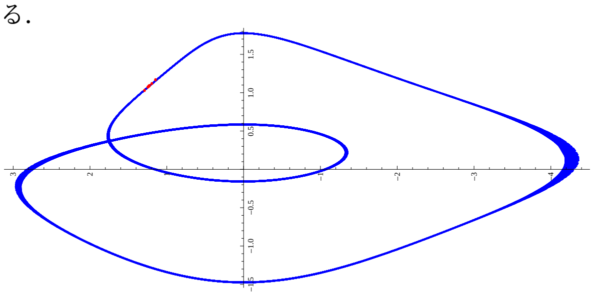

Fig.3a Phase portrait of $(\theta_{11}(t), \dot{\theta}_{11}(t))$ in $2\pi \times 20 \le t \le 2\pi \times 71$. $\beta = 1.2$, $F_1 = 6$ and $c_1 = 0.25$. The figure is rotated by 90°.

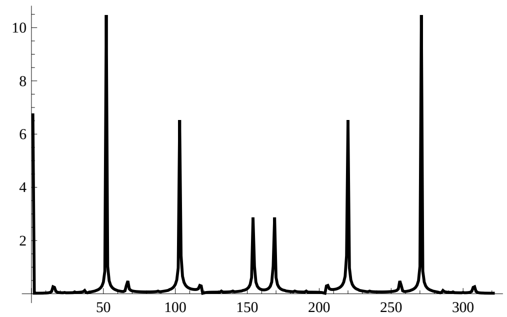

Fig.3b Spectrum of $\theta_{11}(t)$ in $2\pi \times 20 \le t \le 2\pi \times 71$. $\beta = 1.2$, $F_1 = 6$ and $c_1 = 0.25$.

第二に，$F_1 = 6.2$ になると，**Fig.3a** と比べて周期が倍化していること (**Fig.4a**) が示されるが，spectrum (**Fig.4b**) はまだ離散的であることが分かる．

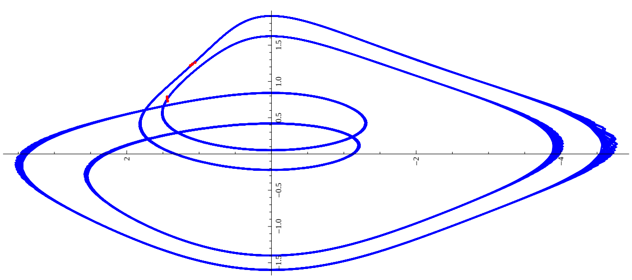

Fig.4a Phase portrait of $(\theta_{11}, \dot{\theta}_{11})$ in $2\pi \times 20 \le t \le 2\pi \times 71$. $\beta = 1.2$, $F_1 = 6.2$ and $c_1 = 0.25$. The figure is rotated by 90°.

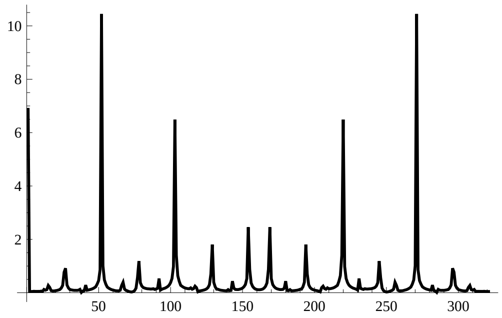

Fig.4b Spectrum of $\theta_{11}(t)$ in $2\pi \times 20 \leq t \leq 2\pi \times 71$. $\beta = 1.2$, $F_1 = 6.2$ and $c_1 = 0.25$.

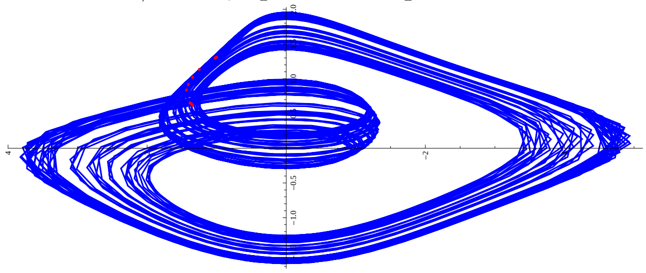

Fig.5a Phase portrait of $(\theta_{11}, \dot{\theta}_{11})$ in $2\pi \times 20 \leq t \leq 2\pi \times 71$. $\beta = 1.2$, $F_1 = 6.3$ and $c_1 = 0.25$. The figure is rotated by 90°.

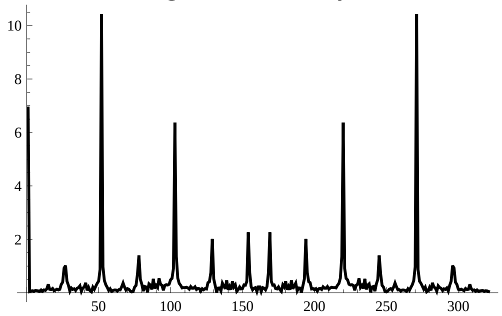

Fig.5b Spectrum of $\theta_{11}(t)$ in $2\pi \times 20 \leq t \leq 2\pi \times 71$. $\beta = 1.2$, $F_1 = 6.3$ and $c_1 = 0.25$.

第三に，$F_1 = 6.3$ (**Fig.5a**, **5b**) の場合では，位相面での軌道が連続的になり，spectrum にも連続化の傾向が見られることが確認できる．なお，**Fig.3-5** には，計算時間 $2\pi \times 20 \leq t \leq 2\pi \times 71$ の解を表示している．これは計算時間を長く取ると，**Fig.5** では軌道の連続化の傾向がより明確に見られるが，位相面の軌跡は表示画面を塗り潰してしまうため計算結果の情報が失われてしまうためである．但し，spectrum には連続化がはっきりと現れる．

外力の振動周期を基準に strobo plot (bifurcation diagram) を描くと **Fig.6a-6d** が描かれる．外力の周期を基準に測った時間 $t_n = 2\pi n/\omega$ (n: 自然数) での数値解の振幅 $\theta(t_n)$ を縦軸に取り，横軸に取った外力の振幅 F_1 は，$5 \leq F_1 \leq 6.5$ の範囲で，刻み 0.002 で変化させている．

$c_1 = 0.21$ (**Fig.6a**) では，$F_1 = 5.7$ 以降で周期倍化が見られるが，$F_1 = 6.15$ のあたりで jump して大振幅の数値解に移行する．$c_1 = 0.23$ (**Fig.6b**) では，$F_1 = 5.7$ で位相の jump が起こり，$F_1 = 5.9$ 以降で周期倍化を繰り返して，カオス解に移行する．$c_1 = 0.25$ (**Fig.6c**) では，**Fig.4-6** に対応して，解の分岐が見られる．$c_1 = 0.27$ (**Fig.6d**) では，減衰係数が大きくなったことにより，周期倍化の発生点が F_1 の値の大きい側に移動して，解の減衰が顕著となることが示されている．

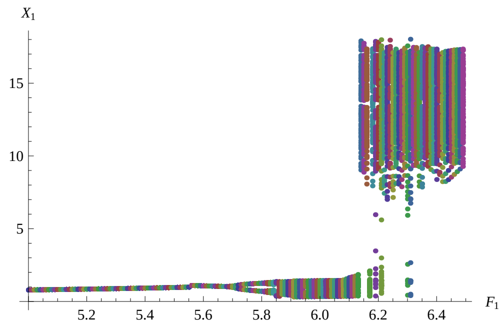

Fig.6a Strobo plot of $\theta_{11}(t_n)$ versus F_1 for $\beta = 1.2$ and $c_1 = 0.21$.

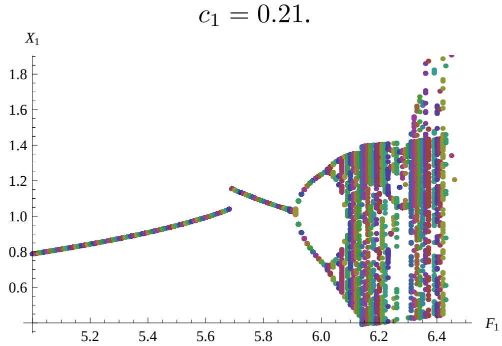

Fig.6b Strobo plot of $\theta_{11}(t_n)$ versus F_1 for $\beta = 1.2$ and $c_1 = 0.23$.

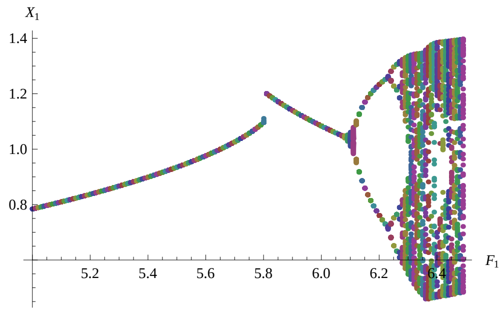

Fig.6c Strobo plot of $\theta_{11}(t_n)$ versus F_1 for $\beta = 1.2$ and $c_1 = 0.25$.

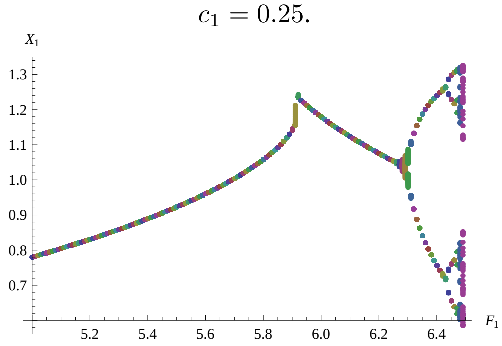

Fig.6d Strobo plot of $\theta_{11}(t_n)$ versus F_1 for $\beta = 1.2$ and $c_1 = 0.27$.

$\beta = 1.1$ の strobo plot を **Fig.7a-7c** に示す．$\theta_{11}(t_n)$ の値の低下が見られる．減衰係数 c_1 の値が大きくなるに連れ，位相の jump と周期倍化の発生点が F_1 の値の大きい側に移動して，解の減衰が顕著となることが分かる．

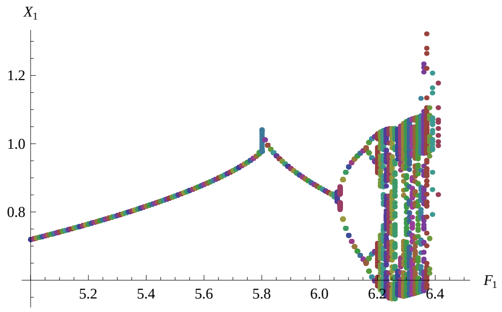

Fig.7a Strobo plot of $\theta_{11}(t_n)$ versus F_1 for $\beta = 1.1$ and $c_1 = 0.23$.

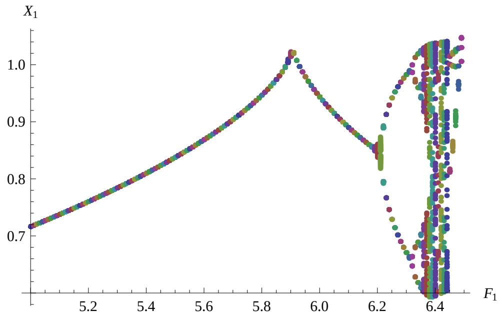

Fig.7b Strobo plot of $\theta_{11}(t_n)$ versus F_1 for $\beta = 1.1$ and $c_1 = 0.25$.

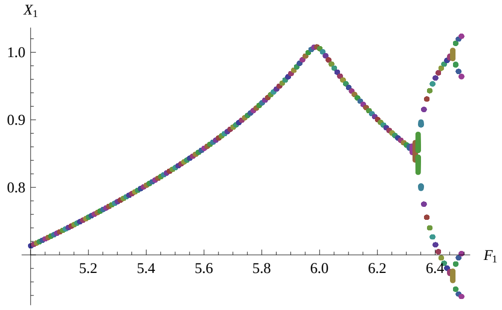

Fig.7c Strobo plot of $\theta_{11}(t_n)$ versus F_1 for $\beta = 1.1$ and $c_1 = 0.27$.

4.2 $\beta = 0.6$

$\beta < 1$ のときの系の特性を調べるために，系の規定値を $L_2 = L_1 = 1$, $a = 1$, $c = 0.6$, $\alpha_1 = \arcsin[(c-a)/L_1]$, $\beta = 0.6$, $h = L_1\cos(\alpha_1)$, $m_2 = 1$, $g = 1$, $J_2 = 1$, $h_g = 0$ と設定して，初期値を $\theta_{11}(0) = 0.001$, $\dot{\theta}_{11}(0) = 0$ と取り，c_1, F_1, ω を変えて計算時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi\times 121$) で数値計算して，ω を基準に採取時間 $t_s \leq t \leq t_e$ ($t_s = 2\pi\times 20$) の data を抽出する．

$\beta = 0.6$ の場合の strobo plot (**Fig.10a-10d**) と連続時間での解の振舞を **Fig.8**, **9** に示す．$c_1 = 0.04$ で $F_1 = 4$ の **Fig.8a** では規則的な軌道を取り，spectrum は 3 つの peak 値 (**Fig.8b**) が見られる．$F_1 = 4.5$ の **Fig.9a** では軌道が少しずつずれて，spectrum に 3 つの peak 値 (**Fig.8b**) が見られるが高振動数側の spectrum が高くなっている．**Fig.10a-10c** では，c_1 の値が小さくなるに連れ，軌道点の数が増えて振幅値が広がっており，カオス化の傾向が見られる．

ほかの parameter 値に対する数値計算はまだ進行中であり，$\beta < 1$ の場合にも $\beta > 1$ の場合に見られたカオスが発生するか否かはまだ結論を見ていない．

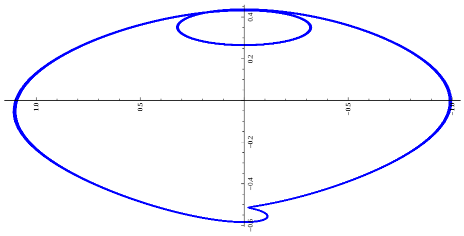

Fig.8a Phase portrait of $(\theta_{11}, \dot{\theta}_{11})$ in $2\pi\times 20 \leq t \leq 2\pi\times 71$. $\beta = 0.6$, $F_1 = 4$ and $c_1 = 0.04$. The figure is rotated by 90°.

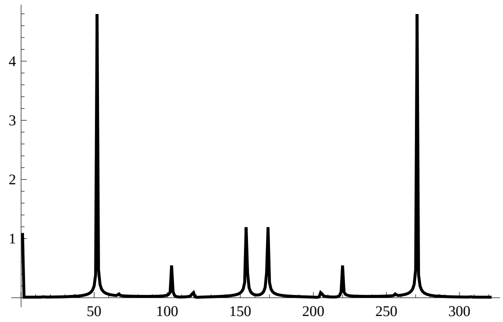

Fig.8b Spectrum of $\theta_{11}(t)$ in $2\pi\times 20 \leq t \leq 2\pi\times 71$. $\beta = 0.6$, $F_1 = 4$ and $c_1 = 0.04$.

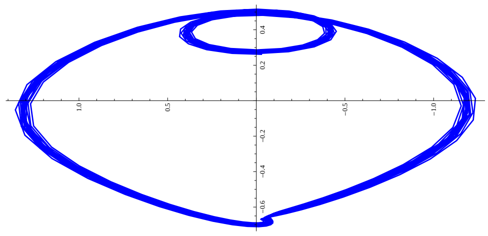

Fig.9a Phase portrait of $(\theta_{11}, \dot{\theta}_{11})$ in $2\pi\times 20 \leq t \leq 2\pi\times 71$. $\beta = 0.6$, $F_1 = 4.5$ and $c_1 = 0.04$. The figure is rotated by 90°.

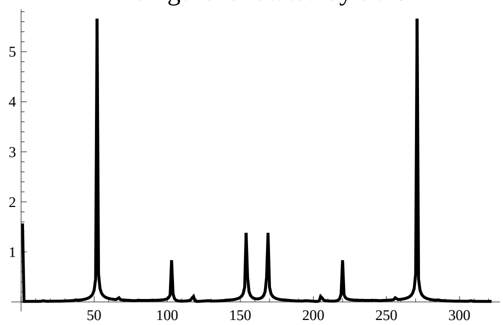

Fig.9b Spectrum of $\theta_{11}(t)$ in $2\pi\times 20 \leq t \leq 2\pi\times 71$. $\beta = 0.6$, $F_1 = 4.5$ and $c_1 = 0.04$.

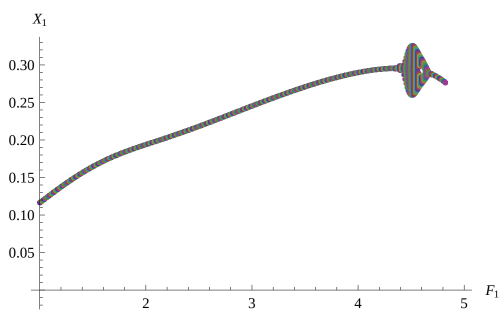

Fig.10a Strobo plot of $\theta_{11}(t_n)$ versus F_1 for $\beta = 0.6$ and $c_1 = 0.040$.

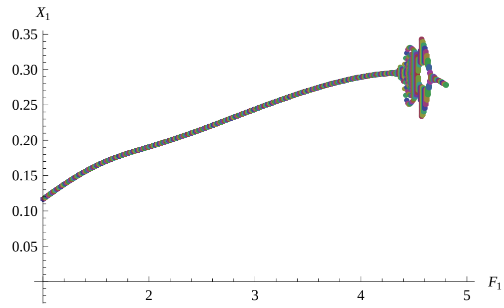

Fig.10b Strobo plot of $\theta_{11}(t_n)$ versus F_1 for $\beta = 0.6$ and $c_1 = 0.036$.

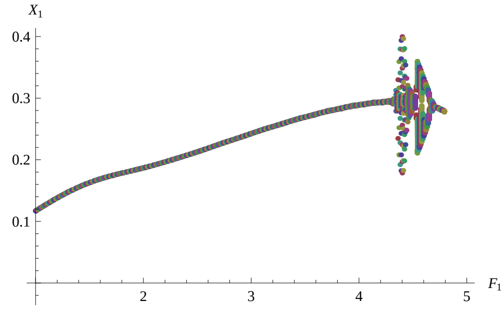

Fig.10c Strobo plot of $\theta_{11}(t_n)$ versus F_1 for $\beta = 0.6$ and $c_1 = 0.032$.

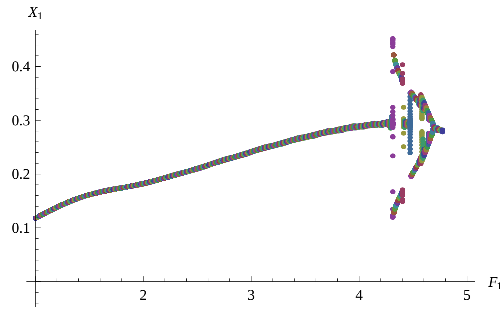

Fig.10d Strobo plot of $\theta_{11}(t_n)$ versus F_1 for $\beta = 0.6$ and $c_1 = 0.028$.

5　おわりに

前報[1]–[3] では，2 点吊り振子の 3 つの振動 mode の特徴を述べ，それらの振子の静止平衡状態を表す幾何学的関係式を図式解法により解いた．それに続き，対称 2 点吊り振子の mode 1 の「遊動円木」に焦点をあて，静止平衡状態の幾何学的関係式を解析的に解き，攪乱状態の角度変数を用いて円木と物体の重力 potential energy 特性を示した[4]．また，円木の非線形振動を記述する Lagrange 関数を求めて Lagrange の運動方程式を導き，数値解析して，非線形振動の特徴を示した．本報告では物体の非線形振動を記述する Lagrange 関数を求めて Lagrange の運動方程式を導き，数値解析して，カオス解を求めた．$\omega = 1/3$ のときのカオス解の出現する減衰係数の範囲は，物体の運動の場合 ($\beta = 1.2$, 1.1 で，$h_g = 0.1$) と円木の運動の場合 ($\beta = 0.6$ で，$h_g = 0$) で異なることが示された．2 点吊り振子の特徴を表す parameter β の値により，また，円木と物体の運動に現れる重心の高さの parameter h_g により，周期解とカオス解がどう出現するかが本研究の注目点である．さらに数値解析を進め，それらの点の解明が求められる．

なお，一連の報告[1]–[6] では，円木と物体の mode 1 の線形/非線形運動の解明が進められて来たが，本報告の非線形運動の解明で一区切りとなった．この問題は工学的に重要であるにも関わらず未解決な点が多かったが，本研究はその解明に一定の役割を果たしたものと思われる．以降では，2 点吊り振子と小振子の連成運動[7] 等の解析問題に取り組む．また，鉛直軸回りの円木の捩れ運動の mode 3 については，稿を改めて，解明する予定である．

最後に，本報告の一部は，先に講演発表したもの[3],[8] であることを付記する．

参考文献

[1] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (3): 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.63-70.

[2] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (4): 2 点吊り振子の実験と解析” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.71-78.

[3] 舟田 敏雄，宮内 太積，望月 孔二，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成振動の数値解析” 第 58 回理論応用力学講演会 講演論文集 NCTAM2009, pp.255-256. 第 58 回理論応用力学講演会，日本学術会議，2009 年 6 月 9 日 (火)〜11 日 (木), OS15 連成現象・複合現象のシミュレーション 講演番号 2B13 (6/10).

[4] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の基礎運動解析” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.

[5] 川上 誠，舟田 敏雄，マズニ アル イルファン，佐々木 隆吾，川船 雄一郎，中道 義之，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の非線形振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[6] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.

[7] 宮内 太積，望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，川船 雄一郎，マズニ アル イルファン，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[8] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之，大庭 勝久: “2 点吊り振子の基礎運動解析と PSD による簡易計測システム試作計画” 第 29 回高専情報処理教育研究発表会 論文集第 29 号，pp.8-11.