

2 点吊り振子と小振子の連成振動の制振評価: 静岡県の「プロジェクト TOUKAI (東海・倒壊)-0 (ゼロ)」による教材の開発 (3)

川上 誠^{*1*2} 舟田 敏雄^{*1*2} 佐々木 隆吾^{*1} 川船 雄一郎^{*1}

マズニ アル イルファン^{*1} 岩本 大^{*1} 清水 啓介^{*1} 船津 佑介^{*1} 大庭 勝久^{*1*2}

中道 義之^{*2*3} 宮内 太積^{*2*4} 望月 孔二^{*2*5}

Seismic Analysis of the Coupling of a Bifilar Suspension Pendulum and Small Pendulums: Development of Education Materials on the Mitigation Project “TOUKAI-0” in Shizuoka Prefecture (3)

Makoto KAWAKAMI^{*1*2} Toshio FUNADA^{*1*2} Ryugo SASAKI^{*1} Yuichirou KAWAFUNE^{*1}

Mazni Al IRFAN^{*1} Dai IWAMOTO^{*1} Keisuke SHIMIZU^{*1} Yusuke FUNATSU^{*1}

Katsuhisa Ooba^{*1*2} Yoshiyuki NAKAMICHI^{*2*3} Tatsumi MIYAUCHI^{*2*4} and Kouji MOCHIZUKI^{*2*5}

Abstract: A uniform density bar is suspended at its two ends by two strings whose two end points are attached to an upper static wall. The bar may swing or make torsional oscillation in a vertical plane from its equilibrium rest state, which is called bifilar suspension pendulum. When the distance between the two points is longer or shorter than the bar length, the bar attitude may change during swinging of the bar. When it is just the same, the bar swings with keeping the attitude horizontal. Taking into account this particular property of the pendulum, some device for seismic mitigation has been proposed. Based upon the fixed point theory, we may evaluate the pendulum system to suppress the response to the external excitation.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Seismic Analysis for Mitigation, Fixed Point Theory

1 はじめに

静岡県の『プロジェクト TOUKAI (東海・倒壊)-0 (ゼロ)』^[1]は、「減災 (mitigation) の考え方を基本とした静岡県地震対策アクションプログラム 2006 の理念に基づき行われている施策である」ことが謳われている。その趣旨に沿って、地元の高専として、「減災」を学生の教育研究の一環に位置づけ、工学的視点から地震対策の啓蒙あるいは防災・減災を探索することは、本校の地域貢献課題の一つとしても極めて重要で且つ意義あることと思われる。

本論文では、2 点吊り振子の円木と小振子の線形連成自由振動の mode 解析を行い、固有角振動数を求め、振動特性を論ずる。また、運動方程式の初期値問題を数値解析する。線形問題であるから解は解析的にも求められるが、本報告に引き続いて非線形振動問題を数値解析するので、数値計算アルゴリズムの検討も兼ねる。

本報告では、前報^[9]の円木と物体の線形振動の解析に続き、円木の下側に小振子を取り付けた場合の線形連成振動

を解析する。2 節では、小振子が 1 つの場合、2 つあるいは 3 つの場合の力学問題を定式化し、線形化運動方程式の mode 解析を行う。これらの系の強制振動系への拡張並びに制振問題の定点理論による解析は続報で検討される。

2 円木と小振子の連成運動

Fig1(a) の 2 点吊り振子の円木と小振子の静止平衡状態周りの運動を解析する。壁面に沿って水平方向に x 軸、鉛直下方を z 軸とするデカルト座標系 (x, y, z) を取り、2 点吊り振子の支持点 C_1 の位置を (x_0, z_0) と表す。 C_2 の位置は $(x_0 + 2c, z_0)$ である。各支持点から長さ L_1, L_2 の糸を円木の端点 A, B に結びつけ、長さ $2a$ の円木を吊り下げる。 $y = 0$ の鉛直面内で、円木と小振子は静止平衡状態にあり、その周りで振子運動する。

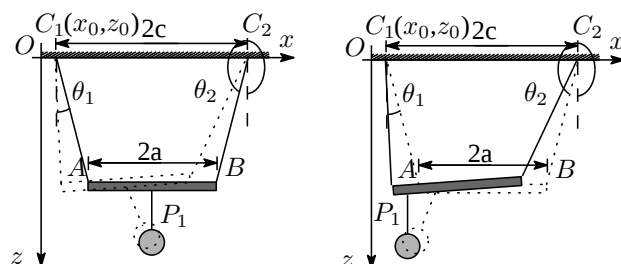


Fig.1 Bifilar suspension pendulum of $c > a$ with a small pendulum. (a) Symmetric configuration and (b) Asymmetric configuration.

^{*1} 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.

^{*2} 専攻科: Advanced Engineering Course.

^{*3} 総合情報センター: Information Technology Center.

^{*4} 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.

^{*5} 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.

先の解析^[9]に因ると、対称 2 点吊り振子 (系の長さが等しい $L_2 = L_1$ 場合) では、線密度 ρ の一様な円木の質量は $m_1 = 2a\rho$ で重心 (x_G, z_G) は中央にあり、重心回りの慣性 moment は $J = 2a^3\rho/3 = m_1a^2/3$ である。静止平衡状態を表す parameter は次に示される:

$$\begin{cases} \sin(\alpha) = \frac{c-a}{L_1}, & \beta = \frac{c}{a}, & \gamma = \frac{L_1}{a}, \\ h = L_1 \cos(\alpha) \end{cases} \quad (2.1)$$

円木の運動は 1 自由度であり、静止平衡状態の周りの角度攪乱 θ_{11} で記述できる。並進振子の場合 ($a = c, \beta = 1$) には、運動中に円木は姿勢を変えない。 $a \neq c$ のとき、円木は重心の並進運動に伴い重心回りに回転する。水平面から測った重心回りの回転角を φ と表すと、 $\beta > 1$ のとき θ_{11} と φ とは逆位相であり、 $\beta < 1$ のときには θ_{11} と φ とは同位相となる。円木の重心位置 (x_G, z_G) から水平距離 a_{p1} の位置に長さ L_{p1} の系を取り付け、系の他端に質量 m_{p1} の質点を結びつける。 $a_{p1} = 0$ の場合 (Fig1(a)) に対し、 $a_{p1} \neq 0$ の場合には静止平衡状態は非対称な配置 (Fig1(b)) となる。円木から吊り下げられた小振子の運動 (Fig1) は 2 自由度であり、鉛直軸から測った系の傾き角度 θ_{p1} と θ_{11} で記述される。それ故、固有角振動数は 2 つあり、初期値問題の解では θ_{p1} と θ_{11} が同位相で振動する場合と逆位相で振動する場合が起こり得る。

長さ $2a$ で質量 m_1 の円木の重心位置 (x_G, z_G) から、左側に距離 a_{p1} の位置に長さ L_{p1} の系を取り付け、系の他端に質量 m_{p1} の質点を結びつける。また、右側に距離 a_{p2} の位置に長さ L_{p2} の系を取り付け、系の他端に質量 m_{p2} の質点を結びつける (Fig.2)。この場合の運動の自由度は 3 で、 $\theta_{11}, \theta_{p1}, \theta_{p2}$ で表される。静止平衡状態で 2 つの小振子の重力の moment の釣合が対称な配置が実現される条件を与える。円木の上に質量 m_2 で重心回りの慣性 moment J_2 の物体を置いた場合が Fig.3 に示される。このとき、円木の重心から物体重心までの高さは h_g である。

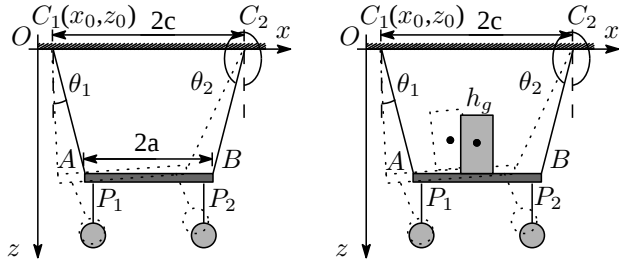


Fig.2 Bifilar suspension pendulum of $c > a$ with two small pendulums. Fig.3 Bifilar suspension pendulum of $c > a$ with a body of the height of its center of mass h_g and two small pendulums.

Fig.1, Fig.2 の円木の端点 A, B , 重心 (x_G, z_G) , 円木の長さ (θ_1 と θ_2 の関係式), 重心回りの回転角 φ ($\varphi \equiv \varphi(\theta_1, \theta_2)$)

は、次のように表される:

$$\begin{cases} x_A = x_0 + L_1 \sin(\theta_1), \\ z_A = z_0 + L_1 \cos(\theta_1), \\ x_B = x_0 + 2c + L_2 \sin(\theta_2), \\ z_B = z_0 + L_2 \cos(\theta_2), \\ x_G = (x_A + x_B)/2, \\ z_G = (z_A + z_B)/2, \\ 2a = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2}, \\ \tan \varphi = -\frac{z_B - z_A}{x_B - x_A} \end{cases} \quad (2.2)$$

小振子 P_1 (Fig.1, Fig.1) と小振子 P_2 (Fig.2) の錘の座標は次のように表される:

$$\begin{cases} x_{p1} = x_G - a_{p1} \cos(\varphi) + L_{p1} \sin(\theta_{p1}), \\ z_{p1} = z_G + a_{p1} \sin(\varphi) + L_{p1} \cos(\theta_{p1}), \\ x_{p2} = x_G + a_{p2} \cos(\varphi) + L_{p2} \sin(\theta_{p2}), \\ z_{p2} = z_G - a_{p2} \sin(\varphi) + L_{p2} \cos(\theta_{p2}) \end{cases} \quad (2.3)$$

Fig.1 の系の静止平衡状態における力と力の moment の釣合は、次のように表される:

$$\begin{cases} -S_1 \sin(\theta_1) + S_2 \sin(2\pi - \theta_2) = 0, \\ S_1 \cos(\theta_1) + S_2 \cos(2\pi - \theta_2) = (m_1 + m_{p1})g, \\ 2cS_2 \cos(2\pi - \theta_2) = (c - a_{p1})m_{p1}g + cm_1g, \\ (c + a_{p1})m_{p1}g + cm_1g + 2cS_1 \cos(\theta_1) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

ここで、対称な配置の静止平衡解 $\theta_1 = \alpha = 2\pi - \theta_2$ が成り立つならば、(2.4) の第 1 式から $S_1 = S_2$ を得る。第 2 式は $2S_1 \cos(\alpha) = m_1g + m_{p1}g$ となり、第 3, 4 式より $a_{p1}m_{p1}g = 0$ を得る。つまり、 $a_{p1} = 0$ ならば、Fig.1(a) の左右対称の配置が成り立つ。同様にして、Fig.2 の静止平衡状態の力と力の moment の釣合により、 $m_{p1}ga_{p1} - m_{p2}ga_{p2} = 0$ であれば Fig.2 の左右対称の配置が成り立つことが導かれる。これらの点に留意して、以下では Fig.2 の系の運動方程式を解き、その特別な場合として Fig.1(a) の系の運動を扱う。

静止平衡解に角度攪乱を加えて、 $\theta_1 = \alpha + \theta_{11}$, $\theta_2 = 2\pi - \alpha + \theta_{21}$, $\theta_{p1} = 0 + \theta_{p1}$, $\theta_{p2} = 0 + \theta_{p2}$ と表し、攪乱が小さいと仮定して (2.2) 式を Taylor 展開する。 x 方向には攪乱の 1 次まで取り、 z 方向には攪乱の 2 次まで取る。そして、攪乱の 1 次まで取って運動・回転 energy を評価し、攪乱の 1 次まで取って重力の potential energy を評価する。これらを考慮して、(2.2) 式の座標値は次のように表

される:

$$\begin{cases} x_g = a\beta + h\theta_{11}, \\ z_g = h - \frac{1}{2}(h - a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2, \\ x_{g2} = a\beta + (h + h_g\beta_1)\theta_{11}, \\ z_{g2} = h - h_g - \frac{1}{2}(h - a\theta_{222}\beta_1 - h_g\beta_1^2)\theta_{11}^2, \\ x_{p1} = a\beta - a_{p1} + h\theta_{11} + L_{p1}\theta_{p1}, \\ z_{p1} = h + L_{p1} - a_{p1}\beta_1\theta_{11}, \\ -\frac{1}{2}(h - (a - a_{p1})\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2 - \frac{1}{2}L_{p1}\theta_{p1}^2, \\ x_{p2} = a\beta + a_{p2} + h\theta_{11} + L_{p2}\theta_{p2}, \\ z_{p2} = h + L_{p2} + a_{p2}\beta_1\theta_{11} \\ -\frac{1}{2}(h - (a + a_{p2})\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2 - \frac{1}{2}L_{p2}\theta_{p2}^2, \\ \varphi_L = -\beta_1\theta_{11} \end{cases} \quad (2.5)$$

但し, $\beta_1 = \beta - 1$ とおいた.

Fig.2 の系は θ_{11} , θ_{p1} , θ_{p2} で記述され, 壁面の水平変位 $x_0 = X_0 \exp(I\omega t) + c.c.$ を考慮して, その線形振動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{m_1}{2}g(2h + (-h + a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2) \\ & + \frac{m_{p1}}{2}g(2(h + L_{p1}) - 2a_{p1}\beta_1\theta_{11} \\ & - (h - (a - a_{p1})\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2 - L_{p1}\theta_{p1}^2) \\ & + \frac{m_{p2}}{2}g(2(h + L_{p2}) + 2a_{p2}\beta_1\theta_{11} \\ & - (h - (a + a_{p2})\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2 - L_{p2}\theta_{p2}^2) \\ & + \frac{1}{2}\left[m_1(\dot{x}_0 + h\dot{\theta}_{11})^2 + J\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2\right] \\ & + \frac{m_{p1}}{2}\left[a_{p1}^2\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2 + (\dot{x}_0 + h\dot{\theta}_{11} + L_{p1}\dot{\theta}_{p1})^2\right] \\ & + \frac{m_{p2}}{2}\left[a_{p2}^2\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2 + (\dot{x}_0 + h\dot{\theta}_{11} + L_{p2}\dot{\theta}_{p2})^2\right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

これにより, Lagrange の運動方程式は, 次のように表される:

$$\begin{cases} a_{00} + a_{110}\theta_{11} + a_{111}\ddot{\theta}_{11} \\ + a_{121}\ddot{\theta}_{p1} + a_{131}\ddot{\theta}_{p2} = b_{11}\ddot{x}_0, \\ a_{211}\ddot{\theta}_{11} + a_{220}\theta_{p1} + a_{221}\ddot{\theta}_{p1} = b_{21}\ddot{x}_0, \\ a_{311}\ddot{\theta}_{11} + a_{330}\theta_{p2} + a_{331}\ddot{\theta}_{p2} = b_{31}\ddot{x}_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

ここで, 係数 a_{00} - a_{331} は次式で与えられる:

$$\begin{cases} M = m_1 + m_{p1} + m_{p2}, \\ a_{000} = g(m_{p1}a_{p1} - m_{p2}a_{p2})\beta_1, \\ a_{110} = g[Mh + (m_{p1}a_{p1} - m_{p2}a_{p2} - Ma) \\ \times \theta_{222}\beta_1], \\ a_{111} = (J + m_{p1}a_{p1}^2 + m_{p2}a_{p2}^2)\beta_1^2 + Mh^2, \\ a_{121} = m_{p1}hL_{p1}, \quad a_{131} = m_{p2}hL_{p2}, \\ b_{11} = -Mh, \\ a_{211} = m_{p1}hL_{p1}, \\ a_{220} = m_{p1}gL_{p1}, \quad a_{221} = m_{p1}L_{p1}^2, \\ b_{21} = -m_{p2}L_{p1}, \\ a_{311} = m_{p2}hL_{p2}, \\ a_{330} = m_{p2}gL_{p2}, \quad a_{331} = m_{p2}L_{p2}^2, \quad b_{31} = -m_{p2}L_{p2} \end{cases} \quad (2.8)$$

また, $L_2 = L_1 = a = 1$, $\beta = c/a$ ($0 < \beta < 2$) と取ると, θ_{222} は次のように表される:

$$\theta_{222} = \frac{(1 - \beta)\sqrt{\beta}}{\sqrt{2 - \beta}} \quad (2.9)$$

(2.7) 式は定数係数の線形同次連立微分方程式であり, 解は $\exp(i\omega t)$ (ω 一般には複素定数) と表現できる. これを (2.7) 式に代入して整理すると連立代数方程式を得るから, 可解条件は ω の 3 次代数方程式となる:

$$\begin{vmatrix} a_{110} - a_{111}\omega^2 & -a_{121}\omega^2 & -a_{131}\omega^2 \\ -a_{211}\omega^2 & a_{220} - a_{221}\omega^2 & 0 \\ -a_{311}\omega^2 & 0 & a_{330} - a_{331}\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

なお, Fig.1(a) の場合, $a_{131} = a_{311} = a_{330} = a_{331} = 0$ となり, 可解条件は ω の 2 次代数方程式となる.

Fig.1(a) の系の規定値を $m_1 = 1$, $a_{p1} = 0$, $L_{p1} = 1$ と設定し, 3 つの場合 ($m_{p1} = 0.2, 1, 2$) について, β の値を変化させたときの固有角振動数を Fig.4 に示す.

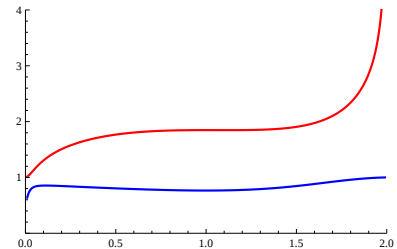


Fig.4a Natural angular frequency ω versus β , for $m_{p1} = 1$.

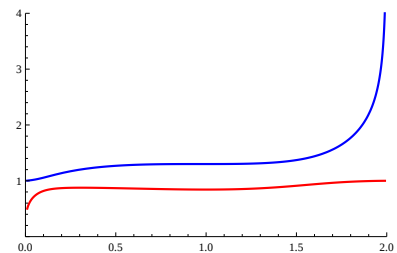


Fig.4b Natural angular frequency ω versus β , for $m_{p1} = 0.2$.

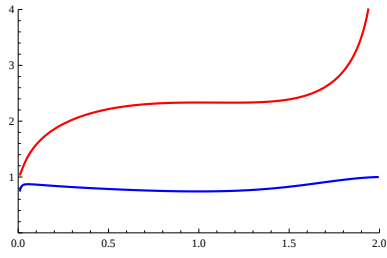
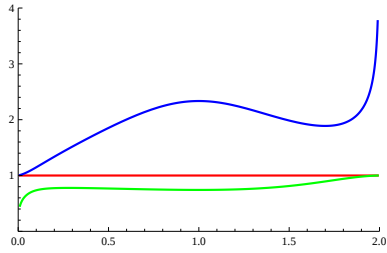
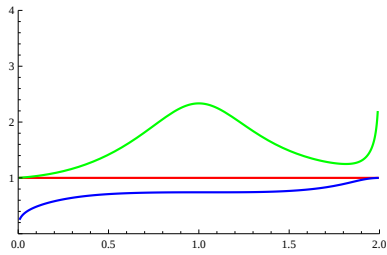
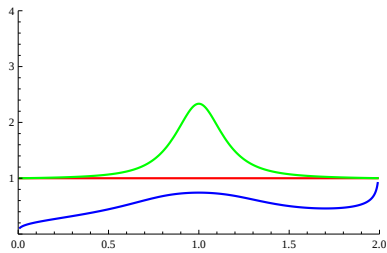
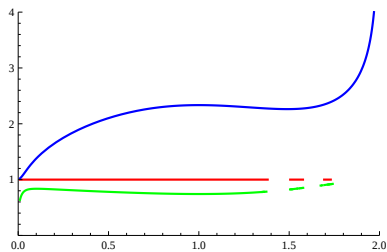
Fig.4c Natural angular frequency ω versus β , for $m_{p1} = 2$.

Fig.2 の系の規定値を $m_1 = 1$, $m_{p1} = m_{p2} = 1$, $a_{p1} = a_{p2}$, $L_{p1} = L_{p2} = 1$ と設定し, 4 つの場合 ($a_{p1} = 1, 2, 5, 0.5$) について, β の値を変化させたときの固有角振動数を Fig.5 に示す.

Fig.5a Natural angular frequency ω versus β , for $a_{p1} = 1$.Fig.5b Natural angular frequency ω versus β , for $a_{p1} = 2$.Fig.5c Natural angular frequency ω versus β , for $a_{p1} = 5$.Fig.5d Natural angular frequency ω versus β , for $a_{p1} = 0.5$.

2.1 定点理論による解析

これらを無次元表現するために, それぞれの振子の固有角振動数 $\omega_1, \omega_{p1}, \omega_{p2}$, 質量比 μ, μ_2 , 角振動数比 p, p_2 , 減

衰率 Z, z, z_2 を次のように定義する:

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L_1}}, & \omega_{p1} = \sqrt{\frac{g}{L_{p1}}}, & \omega_{p2} = \sqrt{\frac{g}{L_{p2}}}, \\ \mu = \frac{m_{p1}}{m_1}, & \mu_2 = \frac{m_{p2}}{m_1}, & p = \frac{\omega_1}{\omega_{p1}} = \sqrt{\frac{L_{p1}}{L_1}}, \\ p_2 = \frac{\omega_1}{\omega_{p2}} = \sqrt{\frac{L_{p2}}{L_1}}, & Z = \frac{c_1}{2m_1L_1^2\omega_1}, \\ z = \frac{c_{p1}}{2m_{p1}L_{p1}^2\omega_1} = \frac{c_{p1}}{2\mu p^4 m_1 L_1^2 \omega_1}, \\ z_2 = \frac{c_{p2}}{2m_{p2}L_{p2}^2\omega_1} = \frac{c_{p2}}{2\mu p_2^4 m_1 L_1^2 \omega_1} \end{cases} \quad (2.11)$$

これに伴い, 変数を無次元表現する:

$$\tau = \omega_1 t, \quad X_0 = \frac{x_0}{L_1} \quad (2.12)$$

よって, (2.7) の第 1,2 式は次のように無次元表現される:

$$\begin{cases} (1 + \mu) [\ddot{\theta}_1 + \ddot{X}_0] + \mu p^2 \ddot{\theta}_2 \\ + (1 + \mu) \theta_1 + 2Z \dot{\theta}_1 \\ p^2 \ddot{\theta}_2 + \ddot{X}_0 + \ddot{\theta}_1 + \theta_2 + 2z p^2 \dot{\theta}_2 \end{cases} = 0, \quad (2.13)$$

定点理論の用語に従えば, (2.13) の第 1 式が主系 (primary system) の運動方程式, 第 2 式が動吸振器 (dynamic vibration absorber) の運動方程式であり, それらは定数係数を持つ非同次の連立線形微分方程式である. 支持点の周期的変位 X_0 に対する主系の応答の最大利得を最小にするように, 主系の parameter μ , $Z = 0$ を与えて, 動吸振器の parameter p, z を決定する制振設計がここでの課題である.

支持点の周期的変位 $X_0 = A_0 \exp(i\omega t) + c.c.$ (A_0 : 複素振幅, ω : 角振動数) に対し, 定数係数の線形連立微分方程式 (2.13) の非同次解を

$$\begin{cases} \theta_1 = A_1 \exp(i\omega t) + c.c., \\ \theta_2 = A_2 \exp(i\omega t) + c.c. \end{cases} \quad (2.14)$$

と仮定して方程式 (2.13) に代入すると, 次の非同次線形代数方程式を得る:

$$\begin{cases} a_{11}A_1 + a_{12}A_2 = b_1A_0, \\ a_{21}A_1 + a_{22}A_2 = b_2A_0, \end{cases} \quad (2.15)$$

この係数は次式で与えられる:

$$\begin{cases} a_{11} = (1 + \mu)(1 + s^2) + 2Zs, \\ a_{12} = \mu p^2 s^2, & b_1 = -(1 + \mu)s^2, \\ a_{21} = s^2, & a_{22} = 1 + p^2 s^2 + 2p^2 z s, \\ b_2 = -s^2 \end{cases} \quad (2.16)$$

さらに, 系の応答関数を表すために, 係数を整理する:

$$\begin{cases} d_1(s) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ = (1 + \mu)(1 + s^2 + p^2 s^2) + p^2 s^4 \\ + 2s(1 + p^2 s^2)Z \\ + 2zp^2 s((1 + \mu)(1 + s^2) + 2Zs) \\ n_1(s) = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ = -(1 + 2zp^2 s)s^2(1 + \mu) - p^2 s^4, \\ n_2(s) = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ = -2Zs^3 - s^2(1 + \mu) \end{cases} \quad (2.17)$$

これらにより, 角変位の応答関数 $G_1(\omega)$, $G_2(\omega)$ と利得の二乗は次のように表される:

$$G_1(\omega) = \frac{n_1(i\omega)}{d_1(i\omega)}, \quad G_2(\omega) = \frac{n_2(i\omega)}{d_1(i\omega)}, \quad (2.18)$$

$$|G_1(\omega)|^2 = \frac{n_1(i\omega)}{d_1(i\omega)} \frac{n_1(-i\omega)}{d_1(-i\omega)}, \quad (2.19)$$

$$|G_2(\omega)|^2 = \frac{n_2(i\omega)}{d_1(i\omega)} \frac{n_2(-i\omega)}{d_1(-i\omega)} \quad (2.20)$$

これらから, 角速度の応答関数 $G_{v1}(\omega)$, $G_{v2}(\omega)$, 角加速度の応答関数 $G_{a1}(\omega)$, $G_{a2}(\omega)$ は次式で定義される:

$$G_{v1}(\omega) = i\omega \frac{n_1(i\omega)}{d_1(i\omega)}, \quad G_{v2}(\omega) = i\omega \frac{n_2(i\omega)}{d_1(i\omega)}, \quad (2.21)$$

$$G_{a1}(\omega) = -\omega^2 \frac{n_1(i\omega)}{d_1(i\omega)}, \quad G_{a2}(\omega) = -\omega^2 \frac{n_2(i\omega)}{d_1(i\omega)} \quad (2.22)$$

(2.21), (2.22) 式に対しても定点理論を適用できるが, 以下では角変位の応答関数のみを扱う.

3 定点理論による応答関数の解析例 ($Z = 0$)

$Z = 0$ のときの角変位の応答関数 $G_1(\omega)$ の利得の二乗 (2.19) は, z^2 に関する項を整理して, 次の分数式:

$$\begin{aligned} |G_1(\omega)|^2 &= \frac{A_2 z^2 + B_2}{A_1 z^2 + B_1} = \frac{A_2 z^2 + B_2/A_2}{A_1 z^2 + B_1/A_1} \\ &= \frac{B_2}{B_1} \frac{A_2 z^2/B_2 + 1}{A_1 z^2/B_1 + 1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

となり, 定点において, 次のように書き換えられる:

$$|G_1(\omega)|^2 = \frac{A_2 z^2 + B_2}{A_1 z^2 + B_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} \quad (3.2)$$

ここで, 係数は, (2.19) 式により, 次式で定義されている:

$$\begin{cases} B_1 = [(1+\mu)(1+p^2)\omega^2 - 1] - p^2\omega^4, \\ A_1 = 4p^4(1+\mu)^2\omega^2(\omega^2 - 1)^2, \\ B_2 = \omega^4(1+\mu - p^2\omega^2)^2, \\ A_2 = 4p^4(1+\mu)^2\omega^6 \end{cases} \quad (3.3)$$

(3.2) 式を書き換えて, 定点で成立すべき ω の代数方程式を得る:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2} \rightarrow A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \quad (3.4)$$

これは ω^2 の 6 次の代数方程式であり, $\omega^8 = 0$ (ω の根は zero 根が 8 個) と ω^2 の 2 次方程式に分離できる:

$$c_2\omega^4 + c_1\omega^2 + c_0 = 0 \quad (3.5)$$

この係数は次式で定義される:

$$\begin{cases} c_2 = 8p^8\mu(1+\mu)^2 = c_{00}2p^2, \\ c_1 = -4p^6\mu(1+\mu)^2(2+2p^2+2\mu+p^2\mu) \\ \quad = -c_{00}(2+2p^2+2\mu+p^2\mu), \\ c_0 = 8p^6\mu(1+\mu)^3 = c_{00}[2(1+\mu)], \\ c_{00} = 4p^6\mu(1+\mu)^2 \end{cases} \quad (3.6)$$

これにより, ω^2 の 2 次方程式は次のように整理できる:

$$\begin{aligned} 2p^2\omega^4 - (2+2p^2+2\mu+p^2\mu)\omega^2 + 2(1+\mu) &= 0, \\ \omega^4 - 2q\omega^2 + \frac{1+\mu}{p^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

但し, q は次式で定義される:

$$q = \frac{2+2p^2+2\mu+p^2\mu}{4p^2} \quad (3.8)$$

よって, (3.7) 式の根 ω^2 は次の 2 つである:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = q - \sqrt{q^2 - \frac{1+\mu}{p^2}}, \\ \omega_2^2 = q + \sqrt{q^2 - \frac{1+\mu}{p^2}} \end{cases} \quad (3.9)$$

つまり, 定点は $\omega = \omega_1, \omega_2$ (いずれも正の根で, $\omega_1 < \omega_2$ であり, μ と p に依存する) にあり, 定点での利得が次式で与えられる:

$$\begin{cases} |G_1(\omega_1)| = \left(\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \right)_{\omega=\omega_1} = \frac{\omega_1^2}{|\omega_1^2 - 1|}, \\ |G_1(\omega_2)| = \left(\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \right)_{\omega=\omega_2} = \frac{\omega_2^2}{|\omega_2^2 - 1|} \end{cases} \quad (3.10)$$

これらが等しいことを要請し, その関係式を p の方程式と見做すことができる:

$$\begin{aligned} |G_1(\omega_1)| = |G_1(\omega_2)| &\rightarrow \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - 1} = -\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - 1} \\ \omega_1^2(\omega_2^2 - 1) + \omega_2^2(\omega_1^2 - 1) &= 0 \\ 2q - 2\frac{1+\mu}{p^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

これを整理すると, p^2 の 1 次方程式となり, 根は次のように表される:

$$p^2 = \frac{2(1+\mu)}{2+\mu} \rightarrow p = \sqrt{\frac{2(1+\mu)}{2+\mu}} \equiv p_m \quad (3.12)$$

即ち, p_m は μ の関数として計算される. p_m を用いて ω_1^2 , ω_2^2 を書き換え ω_{1p}^2 , ω_{2p}^2 とおく:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = q - \sqrt{q^2 - \frac{1+\mu}{p^2}} \\ \quad = \frac{2+\mu}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}} \right) \equiv \omega_{1p}^2, \\ \omega_2^2 = q + \sqrt{q^2 - \frac{1+\mu}{p^2}} \\ \quad = \frac{2+\mu}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}} \right) \equiv \omega_{2p}^2 \end{cases} \quad (3.13)$$

定点での利得は, $\omega_{1p}, \omega_{2p}, p_m$ を用いて, 次の値となる:

$$\begin{cases} |G_1(\omega_1)| = \sqrt{\frac{2+\mu}{\mu}}, \\ |G_1(\omega_2)| = \sqrt{\frac{2+\mu}{\mu}} \end{cases} \quad (3.14)$$

即ち, 2 つの定点で利得の値が等しいことが確認された.

さらに、定点での利得が、 ω に関して極大値となる条件を課すと、

$$\frac{d|G_1(\omega)|^2}{d\omega} = \frac{1}{A_1 z^2 + B_1} \left(\frac{dA_2}{d\omega} z^2 + \frac{dB_2}{d\omega} \right) - \frac{A_2 z^2 + B_2}{(A_1 z^2 + B_1)^2} \left(\frac{dA_1}{d\omega} z^2 + \frac{dB_1}{d\omega} \right) = 0 \quad (3.15)$$

となり、定点での関係式 (3.2) を用いて書き換えられる:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dA_2}{d\omega} z^2 + \frac{dB_2}{d\omega} \right) / \left(\frac{dA_1}{d\omega} z^2 + \frac{dB_1}{d\omega} \right) \\ &= \frac{A_2 z^2 + B_2}{A_1 z^2 + B_1} = \frac{A_2}{A_1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

これを書き換えると、 z^2 の 1 次方程式となる:

$$\left(\frac{dA_2}{d\omega} A_1 - \frac{dA_1}{d\omega} A_2 \right) z^2 = - \left(\frac{dB_2}{d\omega} A_1 - \frac{dB_1}{d\omega} A_2 \right) \quad (3.17)$$

(3.17) 式の係数に ω_1, p_m を代入して z は μ の関数として計算できる.

$$z_1^2 = \frac{\mu(2+\mu)}{16(1+\mu)^2} \left(3 - \sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}} \right) \quad (3.18)$$

一方、(3.17) 式の係数に ω_2, p_m を代入して z は μ の関数として計算できる.

$$z_2^2 = \frac{\mu(2+\mu)}{16(1+\mu)^2} \left(3 + \sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}} \right) \quad (3.19)$$

従って、 $z_1^2 \neq z_2^2$ であるから、 z_1^2 は、定点 ω_{1p} での利得が極大値である条件を満たしているが、定点 ω_{2p} での利得が極大値である条件を満たさない. 同様に、 z_2^2 は、定点 ω_{2p} での利得が極大値である条件を満たしているが、定点 ω_{1p} での利得が極大値である条件を満たさない.

さらに、 z_1^2 と z_2^2 の平均値を z_m^2 と定義して、 z_m を得る:

$$z_m = \sqrt{\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}} = \frac{\sqrt{3\mu(2+\mu)}}{4(1+\mu)} \quad (3.20)$$

この表式は、簡単であり、後にみるように良い近似式であるので、実用上は便利であろう.

以上のように、係数に ω_1 (あるいは ω_2)、 p_m を代入して z は μ の関数として計算できる. 2 つの定点での利得の値が極大値となることは同時には成立しない. その意味で、定点理論は近似理論である.

4 おわりに

前報^{[2],[3]} では、2 点吊り振子の 3 つの振動 mode の特徴を述べ、それらの振子の静止平衡状態を表す幾何学的関係式を図式解法により解いた. それに続き、本報告では、対称 2 点吊り振子の mode 1 の「遊動円木」に焦点をあて、静止平衡状態の幾何学的関係式を解析的に解き、攪乱状態の角度変数を用いて円木と物体の重力 potential energy 特性を

示した. また、線形振動を記述する Lagrange 関数を求めて Lagrange の運動方程式を導き、固有角振動数の特性を議論した. 関連する解析は、次報⁷ で扱う.

なお、本報告の一部は、先に講演発表したもの^{[13],[14]} であることを付記する.

参考文献

- [1] 静岡県総務部防災局防災情報室: “プロジェクト「TOUKAI (東海・倒壊) - 0 (ゼロ) の概要”
<http://www.pref.shizuoka.jp/bousai/chosa/toukai0/toukai0gai.htm>
- [2] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 内堀 晃彦, 宮内 太積, 川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (3): 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告 第 43 号 (2009), pp.63-70.
- [3] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 内堀 晃彦, 宮内 太積, 川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (4): 2 点吊り振子の実験と解析” 沼津高専研究報告 第 43 号 (2009), pp.71-78.
- [4] 望月 孔二, 宮内 太積, 内堀 晃彦, 川上 誠, 中道 義之, Mazni Al Irfan, 川船 雄一郎, 佐々木 隆吾, 舟田 敏雄: “PSD 簡易計測システム試作と 2 点吊り振子の実験・解析” 電子情報通信学会 2009 年総合大会 2009 年 3 月 17 日 (火) ~ 20 日 (金) 愛媛大 (松山市) 3 月 18 日 (水) 午前, 「D-15 教育工学」 (一般セッション), 講演番号: D-15-24 「電子情報通信学会 2009 年 総合大会講演論文集」の DVD 情報・システムソサイエティ p.202. file: d_15_024.pdf
- [5] 宮内 太積, 望月 孔二, 内堀 晃彦, 川上 誠, 中道 義之, 舟田 敏雄: “水平加振による非線形振動系の実験と振動解析 (振動学教材開発)” 日本機械学会東海支部第 58 期総会・講演会 2009 年 3 月 17 日 (火), 18 日 (水) 岐阜大学 工学部 3 月 18 日 (水) 12:45-14:00 GS 機械力学 講演番号 263. 日本機械学会 東海支部 第 58 回総会講演会 講演論文集 ('09.3.17-18) No.093-1, pp.133-134.
- [6] 舟田 敏雄, 内堀 晃彦, 望月 孔二, 宮内 太積, 川上 誠, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン: “静岡県の「プロジェクト TOUKAI (東海・倒壊) - 0 (ゼロ)」による教材の開発 (1): 定点理論による制振設計の教材” 沼津高専研究報告 第 43 号 (2009), pp.139-146.
- [7] 内堀 晃彦, 舟田 敏雄, 望月 孔二, 宮内 太積, 川上 誠, 中道 義之, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン: “静岡県の「プロジェクト TOUKAI (東海・倒壊) - 0 (ゼロ)」による教材の開発 (2): 二重振子の強制振

- 動に対する定点理論による制振設計” 沼津高専研究報告 第 43 号 (2009), pp.193-200.
- [8] 舟田 敏雄, 宮内 太積, 望月 孔二, 内堀 晃彦, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成振動の数値解析” 第 58 回理論応用力学講演会 講演論文集 NCTAM2009, pp.255-256. 第 58 回理論応用力学講演会、日本学術会議、2009 年 6 月 9 日 (火) ~ 11 日 (木) OS15 連成現象・複合現象のシミュレーション 講演番号 2B13 (6/10).
- [9] 望月 孔二, 宮内 太積, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アル イルファン, 川船 雄一郎, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子の基礎運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [10] 川上 誠, 舟田 敏雄, マズニ アル イルファン, 佐々木 隆吾, 川船 雄一郎, 中道 義之, 宮内 太積, 望月 孔二: “2 点吊り振子の非線形振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [11] 望月 孔二, 宮内 太積, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アル イルファン, 川船 雄一郎, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [12] 川上 誠, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 中道 義之, 大庭 勝久, 望月 孔二, 宮内 太積: “2 点吊り振子と物体の強制振動によるカオスの数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [13] 宮内 太積, 望月 孔二, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, 川船 雄一郎, マズニ アル イルファン, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [14] 宮内 太積, 舟田 敏雄, 岩本 大, 中道 義之, 望月 孔二, 川上 誠: “非対称 2 点吊り振子と小振子の連成運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [15] 中道 義之, 舟田 敏雄, 望月 孔二, 宮内 太積, 川上 誠: “2 点吊り振子と幾つかの小振子の連成運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [16] 川上 誠, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, 川船 雄一郎, マズニ アル イルファン, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 大庭 勝久, 中道 義之, 宮内 太積, 望月 孔二: “2 点吊り振子と小振子の連成振動の制振評価: 静岡県 of 「プロジェクト TOUKAI (東海・倒壊)-0 (ゼロ)」 による教材の開発 (3)” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [17] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 中道 義之: “2 点吊り振子の捩り振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [18] 舟田 敏雄, 舟田 孝和, 岩本 大, 中道 義之, 大庭 勝久: “円筒形容器における液体スロッシングの粘性ポテンシャル流解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [19] 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 石本 拓也, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠, 望月 孔二: “出前授業のための「振子」教材の整備” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [20] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 船津 佑介, 岩本 大, 清水 啓介, 石本 拓也, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠: “出前授業のための「振子」教材の整備: Pendulum Snake と 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [21] 舟田 敏雄, Kim Hyungjun, Joseph D. Daniel: “周辺支持の液滴・気泡の粘性による非回転的減衰振動” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [22] 舟田 敏雄: “Kelvin-Helmholtz 不安定の散逸法による解析と粘性ポテンシャル流解析との比較” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [23] 舟田 敏雄, 岩本 大: “揺動 Wilberforce 振子の強制振動の基礎解析: 球面振子” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [24] 宮内 太積, 舟田 敏雄, 望月 孔二, 大庭 勝久, 中道 義之, 川上 誠: “技術者教育のための「片持ち梁の振動実験」の分析・評価並びに高度化・展開 (2)” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [25] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (5): 2 点吊り振子の捩れ振動” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [26] 中道 義之, 舟田 敏雄, 清水 啓介, 岩本 大, 船津 佑介, 大庭 勝久: “Wilberforce 振子の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [27] 宮内 太積, 柴本 将志, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 望月 孔二, 川上 誠, 大庭 勝久, 中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成運動の実験と運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [28] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 中道 義之: “2 点吊り振子の捩り振動の強制振動の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [29] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 中道 義之: “2 点吊り振子の捩り振動のパラメトリック励振の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [30] 中道 義之, 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介: “球面振子の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [31] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 中道 義之: “非線形回路の数値 simulation: Lorenz-

Chen-Lü 方程式” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[32] 中道 義之, 舟田 敏雄, 清水 啓介, 岩本 大, 大庭 勝久: “揺動 Wilberforce 振子の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[33] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 中道 義之, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介: “揺動 Atwood 機械の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[34] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 杉山 清隆, 藤田 将喜, 漆畑 勇太, 中道 義之, 川上 誠, 望月 孔二, 宮内 太積: “揺動 Atwood 機械の数値 simulation: 球面振子” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[35] 大庭 勝久, 中道 義之, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介: “変形球面振子の解析とその強制減衰振動の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[36] 中道 義之, 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介: “支持点の励振による球面振子の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[37] 中道 義之, 舟田 敏雄, 大庭 勝久, 川上 誠, 宮内 太積, 望月 孔二: “揺動 Wilberforce 振子の壁面からの励振の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[38] 中道 義之, 舟田 敏雄, 大庭 勝久, 川上 誠, 宮内 太積, 望月 孔二: “揺動 Wilberforce 振子の強制振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[39] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 中道 義之, 杉山 清隆, 藤田 将喜, 漆畑 勇太: “揺動 Atwood 機械の鉛直面内回転的パラメトリック励振の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[40] 舟田 敏雄, 大庭 勝久, 中道 義之, 清水 啓介, 岩本 大, 船津 佑介: “準共振の理論モデル例” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[41] 中道 義之, 舟田 敏雄, 岩本 大, 大庭 勝久, 杉山 清隆, 藤田 将喜, 漆畑 勇太: “揺動 Atwood 機械の水平方向パラメトリック励振の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[42] 川上 誠, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 石本 拓也, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 望月 孔二: “出前授業のための「振子」教材の整備: 工学的拡張と応用” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[43] 舟田 敏雄, 大庭 勝久, 中道 義之, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介: “揺動 Atwood 機械の鉛直方向パラメトリック励振の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[44] 舟田敏雄, 岩本大: “揺動 Atwood 機械の数値 simulation: 物理振子” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

目次

1	はじめに	801
2	円木と小振子の連成運動	801
2.1	定点理論による解析	804
3	定点理論による応答関数の解析例 ($Z = 0$)	805
4	おわりに	806