2 点吊り振子の非線形振動の基礎解析

川上 誠*1*2 舟田 敏雄*1*2 マズニ アル イルファン*1 佐々木 隆吾*1
川船 雄一郎*1 中道 義之*2*3 宮内 太積*2*4 望月 孔二*2*5

Fundamental Analysis of the Nonlinear Oscillation of a Bifilar Suspension Pendulum

Makoto KAWAKAMI*1*2 Toshio FUNADA*1*2 Mazni A IRFAN*1 Ryugo SASAKI*1
Yuichirou KAWAFUNE*1 Yoshiyuki NAKAMICHI*2*3
Tatsumi MIYAUCHI*2*4 and Kouji MOCHIZUKI*2*5

Abstract: Using Taylor series expansion of geometric expressions by angular variables from an equilibrium rest state, the swinging motion of a bifilar suspension pendulum can be approximated well and the applicability is evaluated here in some typical swing configurations. Such expansion procedure is needed to solve equations of motion numerically since the exact expressions are still hard to treat as functions of time without approximation. The second order term in the horizontal and the fourth order term in the vertical are taken to express the displacements, for which the energy is assigned up to the fourth order terms. Based on this formulation, numerical computations are made to have the swinging mode of oscillations. The results show the typical features of nonlinear oscillations with symmetry-breaking.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Nonlinear Free Swinging-Oscillations of Fourth Order Approximation

1 はじめに

2 点吊り振子の力学問題[1],[2] では，2 本の糸で密度一様の棒 (遊動円木) の端を吊り下げている静止平衡状態について，座標値を用いて束縛条件が記述され，それを平面極座標による角度の非線形関数方程式として，図式解法により解いた．しかし，その座標値間の関係式の逆変換が多価関数であるため厳密な扱いは面倒になる．この静止平衡状態周りの振子運動に対し，座標値の Taylor 展開による角度変数の多項式を用い，mode 1 の非線形振動を数値解析し，代表的な振動例が得られたので，ここに報告する．

2 2 点吊り振子の静止平衡状態周りの揺動

水平面上の 2 点 C_1, C_2 (距離 $2c$) に長さ L_1 と L_2 の糸の端を繋ぎ，他端を長さ $2a$ の棒の端点 A, B に繋いで，棒を吊り下げると，重力の作用で棒を鉛直面 C_1, A, B, C_2 内で揺動させることができる．これを 2 点吊り振子 (“mode 1”) と呼ぶ．**Fig.1** には $c > a$, $L_2 = L_1$ で密度一様の円木の場合 (対称 2 点吊り振子) の静止平衡状態が示されており，破線のように運動するとき糸の振れと棒の振れ (傾き) が逆位相となり，円木は並進・回転運動する．$c < a$ の場合では糸と棒の振れが同位相となる．ほかに，並進振子 ($c = a$) の場合には，振子が揺れても棒は水平に保たれ，円木は並進運動する．$c = 0$ では物理振子となり，$a = 0$ では棒を質点と見做せて “V 字型振子” となる．

振子の配置 (**Fig.1**) を表すため，デカルト座標系 (x, y, z) の原点を O に取り，右向きに x 軸，鉛直下方に z 軸を取る．糸に束縛され，棒は $y = 0$ の鉛直面 (x-z 面) 内で運動する．この鉛直面内に取った平面極座標系 (r, θ) を用い，左側支持点 (x_0, z_0) を通る鉛直軸と糸が成す角度を θ_1 とし，右側支持点 $(x_0 + 2c, z_0)$ を通る鉛直軸と糸が成す角度を θ_2 と表すと，円木の各端点の座標は次式で表される:

$$\begin{cases} 左側端点\ A : (x_A,\ z_A) \\ \quad = (x_0 + L_1 \sin(\theta_1),\ z_0 + L_1 \cos(\theta_1))\,, \\ 右側端点\ B : (x_B,\ z_B) \\ \quad = (x_0 + 2c + L_2 \sin(\theta_2),\ z_0 + L_2 \cos(\theta_2)) \end{cases} \tag{2.1}$$

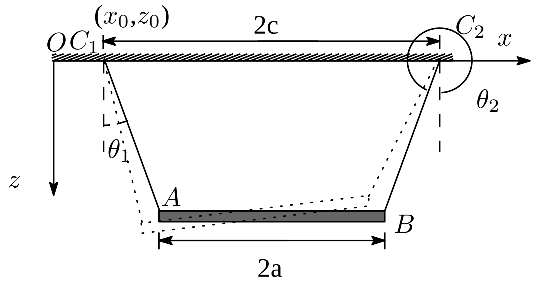

Fig.1 Bifilar suspension pendulum with $c > a$.

静止壁面の場合には (x_0, z_0) は一定値である．**Fig.1** に示されるように，水平面を基準として測った棒の傾き角度 φ は，次式で定義される:

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= -\frac{z_B - z_A}{x_B - x_A} \\ &= -\frac{L_2 \cos(\theta_2) - L_1 \cos(\theta_1)}{2c + L_2 \sin(\theta_2) - L_1 \sin(\theta_1)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで，円木が一様な線密度 ρ を持つとすると，円木の質量は $m_1 = 2a\rho$ であり，重心の位置 (x_G, z_G) は，円木の中

*1 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
*2 専攻科: Advanced Engineering Course.
*3 総合情報センター: Information Technology Center.
*4 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.
*5 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.

央になるから，$x_G = (x_A + x_B)/2, z_G = (z_A + z_B)/2$ と表される．円木の並進運動は (x_G, z_G) を用いて記述され，円木の重心回りの鉛直面内の回転 (y 軸回りの回転) は角度 φ で記述される．(2.1) 式より，棒の端点間の距離 (棒の長さ) の自乗 $(2a)^2$ が求められる:

$$(2a)^2 = (x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \tag{2.3}$$

(2.3) 式を書き換え，関数 $F(\theta_1, \theta_2)$ を次式で定義する:

$$\begin{aligned} F(\theta_1, \theta_2) &\equiv (x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - (2a)^2 \\ &= 4c^2 + 4c\,(L_2 \sin(\theta_2) - L_1 \sin(\theta_1)) + L_2^2 + L_1^2 \\ &\quad - 2L_2 L_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - (2a)^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

即ち，$F(\theta_1, \theta_2) = 0$ が (2.3) 式であり，角度 θ_1 $(-\pi/2 \le \theta_1 \le \pi/2)$ と θ_2 $(3\pi/2 \le \theta_2 \le 5\pi/2)$ の間の関係を与える超越方程式であり，解は解析的に求められる．糸の長さが等しい $(L_1 = L_2)$ とき，対称 2 点吊り振子であり，そのときの (2.4) 式を $F_s(\theta_1, \theta_2)$ と表す．

対称 2 点吊り振子の静止平衡状態は $\theta_1 = \alpha, \theta_2 = 2\pi - \alpha$, $F_s(\theta_1, \theta_2) = 0$ と表され，解 α が求められる:

$$\begin{aligned} F_s(\theta_1, \theta_2) &= F_s(\alpha, 2\pi - \alpha) = 0 \\ &= 4c^2 - 4a^2 - 8cL_1 \sin(\alpha) + 4L_1^2 \sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{c \mp a}{L_1} \ \rightarrow\ \alpha = \arcsin\left(\frac{c \mp a}{L_1}\right) \tag{2.5}$$

静止平衡解 α $(-\pi/2 \le \alpha \le \pi/2)$ が存在するための条件は，$|(c \mp a)/L_1| \le 1$ である．(2.5) 式の復号の正の場合 (区別のため $\alpha = \alpha_2$ と表す) は，襷がけ振子の静止平衡状態を表す．復号の負の場合 $(\alpha = \alpha_1)$，$c > a$ のときは **Fig.1** の配置の静止平衡状態を表す．また，$c = a$ は並進振子である．よって，$h = L_1 \cos(\alpha_1)$ とおき，parameter $\beta = c/a$ を導入し，$\beta =$ 0.5, 1, 1.5 を本報告で扱う代表的な場合とする．

対称 2 点吊り振子の場合，静止平衡解に攪乱 θ_{11}, θ_{21} を加えて，次のように表すことができる:

$$\begin{aligned} &F_s(\alpha_1 + \theta_{11}, 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21}) \\ &= d_1 + a_1 \sin\theta_{21} - b_1 \cos\theta_{21} \\ &= d_1 + c_1 \sin(\theta_{21} - \gamma) = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

ここに含まれる角度 $\gamma \equiv \gamma(\theta_{11})$ は次式で定義される:

$$\gamma = \arcsin(b_1/c_1) \ \ (-\pi/2 \le \gamma \le \pi/2) \tag{2.7}$$

ここで，(2.6) 式の係数 a_1-d_1 は次式で定義される:

$$\begin{cases} a_1 = 4cL_1 \cos(\alpha_1) - 2L_1^2 \sin(2\alpha_1 + \theta_{11}), \\ b_1 = 2L_1^2 \cos(2\alpha_1 + \theta_{11}) + 4cL_1 \sin(\alpha_1), \\ c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \\ d_1 = 4c^2 - 4a^2 + 2L_1^2 - 4cL_1 \sin(\alpha_1 + \theta_{11}) \end{cases} \tag{2.8}$$

これらを用いて，(2.6) 式を次のように書き換えることができ，θ_{21} は θ_{11} の関数で表される:

$$\theta_{21} \equiv \theta_{21}(\theta_{11}) = \gamma - \arcsin\left(\frac{d_1}{c_1}\right) \tag{2.9}$$

この解と等高線処理による図式解法で得られた解 $F_s(\alpha_1 + \theta_{11}, 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21}) = 0$ を比較すると，解析解 $\theta_{21}(\theta_{11})$ が θ_{11} の一価関数として表されている領域では完全に図式解法の解と一致していることが分かる．更に，三角関数の逆関数 (多価関数) の領域ごとの表現に対応して解析解を構成する必要がある．

(2.9) 式の $\theta_{21}(\theta_{11})$ を考慮して，φ の関係式は次のようになり，逆正接関数を用いて，φ の解析的表現 $\varphi_1 \equiv \varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$ が求められる:

$$\tan(\varphi_1) = -\frac{\cos(\alpha_1 - \theta_{21}) - \cos(\alpha_1 + \theta_{11})}{2c/L_1 - \sin(\alpha_1 - \theta_{21}) - \sin(\alpha_1 + \theta_{11})} \tag{2.10}$$

この場合，関数 $\theta_{21}(\theta_{11})$ は (2.9) 式の逆正弦関数の定義領域の制限に影響されるので注意が必要である．

攪乱 θ_{11}, $\theta_{21}(\theta_{11})$, $\varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$ を用いて対称 2 点吊り振子の運動を記述するとき，時間の未知関数 $\theta_{11}(t)$ により Lagrange 関数や運動方程式が表現され, 運動方程式を解いて攪乱の時間発展が求められる．このとき，$\theta_{21}(\theta_{11})$, $\varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$ が θ_{11} の一価関数であり，それらの時間微分の表式があまり複雑でないことが必要である．実際，(2.9), (2.10) 式の変数と parameter を文字式のままで円木・物体・小振子の座標値を表現し，角度を時間の未知関数として Lagrange 関数や運動方程式を導出することは Mathematica6J (RAM2GB) では困難であり，表式の置き換えや数値化が必要となる．ここでは，静止平衡解からの摂動として攪乱 θ_{11}, $\theta_{21}(\theta_{11})$, $\varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$ が小さいと仮定して，(2.9), (2.10) 式を $\theta_{11} = 0$ の周りで Taylor 展開する．

振子の運動では，水平変位の Taylor 展開は角度攪乱 θ_{11} の 1 次の項から始まり，鉛直変位は θ_{11} の 2 次の項から始まる．従って，水平・鉛直変位は 2 次の項まで取り，それによる運動 energy は 4 次の項まで取る．回転角は 2 次の項まで取り，その回転運動 energy は 4 次の項まで取る．一方，重力 potential energy は鉛直変位で記述されるので，4 次の項まで取る．これらを考慮して Lagrange 関数は攪乱の 4 次までの項で構成し，運動方程式が導かれる．

この方針で，(2.9), (2.10) 式を $\theta_{11} = 0$ の周りで Taylor 展開して θ_{11} の 4 次の項まで取ると，θ_{22} は θ_{11} の多項式で表される:

$$\begin{aligned} \theta_{22}(\theta_{11}) &= \theta_{220} + \theta_{221}\theta_{11} + \theta_{222}\theta_{11}^2 + \theta_{223}\theta_{11}^3 \\ &\quad + \theta_{224}\theta_{11}^4 \end{aligned} \tag{2.11}$$

但し，先の検討結果により，(2.11) 式中の係数について $\theta_{220} = 0, \theta_{221} = 1, \varphi_{20} = 0$ が成り立つ．他の係数は a, c, L_1, α_1 の関数であり，次のように表される:

$$\begin{cases} \theta_{222} = \dfrac{(1-\beta)\sqrt{\beta}}{\sqrt{2-\beta}},\ \ \theta_{223} = \dfrac{(\beta-1)^2\beta}{2-\beta}, \\ \theta_{224} = \dfrac{\sqrt{\beta}\,(1 + 15\beta - 40\beta^2 + 36\beta^3 - 12\beta^4)}{12(2-\beta)^{3/2}} \end{cases} \tag{2.12}$$

(2.11), (2.12) 式を用い，(2.10) 式の Taylor 展開を θ_{11} の 4 次の項まで取り，$\beta_1 = \beta - 1$ とおき，φ_1 は多項式 φ_2 で表される:

$$\varphi_2 = -\beta_1\theta_{11} - \frac{\theta_{222}}{2}\beta_1\theta_{11}^2 + \left(\frac{h}{2a}\theta_{222}\beta + \frac{\beta_1}{6}\left(1 - 3\theta_{223} + 3\beta_1 + 2\beta_1^2\right)\right)\theta_{11}^3$$
$$+ \left[\frac{h}{4a}\left(\theta_{222}^2 + 2\theta_{223}\right)\beta + \frac{\beta_1}{4}\left(\theta_{222}\left(1 + 3\beta_1 + 2\beta_1^2\right) - 2\theta_{224}\right)\right]\theta_{11}^4 \tag{2.13}$$

3　2 点吊り振子の配置の関係式と円木の運動

円木の重心 (x_G, z_G) と傾き角度 φ は，静止平衡状態 $(\theta_1 = \alpha_1, \theta_2 = 2\pi - \alpha_1, \sin(\alpha_1) = (c-a)/L_1, \varphi = 0)$ に攪乱を重ね合わせて，$\theta_1 = \alpha_1 + \theta_{11}, \theta_2 = 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21}, \varphi = 0 + \varphi_1$ と表し，$\theta_{21} = \theta_{21}(\theta_{11})$ (θ_{21} の多項式展開が (2.11) 式の θ_{22}), $\varphi_1 = \varphi_1(\theta_{11})$ (φ_1 の多項式展開が (2.13) 式の φ_2) を考慮して，攪乱状態を θ_{11} で記述する:

$$x_G = (x_A + x_B)/2 = c + L_1(\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1))/2 + x_0,\quad z_G = (z_A + z_B)/2 = L_1(\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1))/2 + z_0 \tag{3.1}$$

重心の座標値の多項式は，次のように表される:

$$x_G = x_0 + a\beta + h\theta_{11} + \frac{1}{2}h\theta_{222}\theta_{11}^2,\quad z_{G02} = z_0 + h - \frac{1}{2}(h - a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2, \tag{3.2}$$

$$z_G = z_{G02} - \frac{1}{2}(h\theta_{222} - a\theta_{223}\beta_1)\theta_{11}^3 + \frac{1}{24}\left(h\left(1 - 6\theta_{222}^2 - 12\theta_{223}\right) - 6a(\theta_{222} - 2\theta_{224})\beta_1\right)\theta_{11}^4 \tag{3.3}$$

z_{G02} は運動 energy の計算に用いられ，z_G は重力 potential energy に用いられる．

円木の運動を記述する Lagrange 関数は，次式となる:

$$\mathcal{L}_1 = m_1 g\left[h - \frac{1}{2}(h - a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2 - \frac{1}{2}(h\theta_{222} - a\theta_{223}\beta_1)\theta_{11}^3 - \frac{1}{24}\left(h\left(-1 + 6\theta_{222}^2 + 12\theta_{223}\right) + 6a(\theta_{222} - 2\theta_{224})\beta_1\right)\theta_{11}^4\right]$$
$$+ \frac{1}{2}J\beta_1^2(1 + \theta_{222}\theta_{11})^2\dot{\theta}_{11}^2 + \frac{1}{2}m_1\left(h^2 + 2h^2\theta_{222}\theta_{11} + \left(h^2\left(1 + \theta_{222}^2\right) - 2ah\theta_{222}\beta_1 + a^2\theta_{222}^2\beta_1^2\right)\theta_{11}^2\right)\dot{\theta}_{11}^2 \tag{3.4}$$

Lagrange 関数 $\mathcal{L}_1$ より，Lagrange の運動方程式が求められる:

$$m_1 g\left[(h - a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11} + \frac{3}{2}(h\theta_{222} - a\theta_{223}\beta_1)\theta_{11}^2 + \frac{1}{6}\left(h\left(-1 + 6\theta_{222}^2 + 12\theta_{223}\right) + 6a(\theta_{222} - 2\theta_{224})\beta_1\right)\theta_{11}^3\right]$$
$$+ \theta_{222}\left(m_1h^2 + J\beta_1^2\right)\dot{\theta}_{11}^2 + \left(m_1h^2\left(1 + \theta_{222}^2\right) - 2m_1ah\theta_{222}\beta_1 + \left(J + m_1a^2\right)\theta_{222}^2\beta_1^2\right)\theta_{11}\dot{\theta}_{11}^2 \tag{3.5}$$
$$+ \left[m_1h^2 + J\beta_1^2 + 2\theta_{222}\left(m_1h^2 + J\beta_1^2\right)\theta_{11} + \left(m_1h^2\left(1 + \theta_{222}^2\right) - 2m_1ah\theta_{222}\beta_1 + \left(J + m_1a^2\right)\theta_{222}^2\beta_1^2\right)\theta_{11}^2\right]\ddot{\theta}_{11} = 0$$

(3.5) 式の初期値問題を数値計算した結果は次節に示される．

4　2 点吊り振子の配置の具体例

円木の配置の代表的な場合として $\beta = 1$, 0.5, 1.5 について，(2.7)-(2.11), (2.13), (3.1)-(3.3) 式の近似の程度を調べるために θ_{11} $(-\pi/2 \le \theta_{11} \le \pi/2)$ に対し各関数を図示し，(3.5) 式の初期値問題を数値計算した結果を以下に示す．

4.1　並進振子 $\beta = 1$

代表的な場合として，並進振子 ($\beta = 1$) の関数を **Fig.2a-2e** に示す．$-1 < \theta_{11} < 1$ の範囲では，Taylor 展開による近似解 $(a_{1s}, b_{1s}, c_{1s}, d_{1s}, \gamma_{1s})$ は解析解 $(a_1, b_1, c_1, d_1, \gamma_1)$ に一致している．$|\theta_{11}| > 1$ では，Taylor 展開の高次項まで取ると近似の程度は上がる．**Fig.2f** では (2.6) 式の 図式解法の解と解析解 (2.9) と近似解 (2.11) がよく一致していることが分かる．系の規定値 ($m_1 = 1, g = 1, J = 1, \alpha_1 = 0, h = L_1 = 1$) に対し，初期値を $\theta_{11}(0) = 1, \dot{\theta}_{11}(0) = 0$ とおいて，時間 $0 \le t \le 2\pi \times 21$ で計算し，時間間隔 $2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 21$ の結果を **Fig.3a-3c** に示す．位相面図 (**Fig.3a**) では「円形」の軌跡で，時系列 (**Fig.3b**) は単振動に近く 10 周期が見え，specrum (**Fig.3c**) も単一の peak が見える．初期値を $\theta_{11}(0) = 0.1, \theta_{11}(0) = 0.001$ に変えても， **Fig.3a-3c** と同様の結果が得られた．

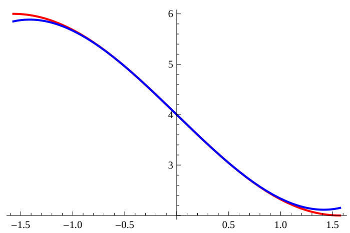

Fig.2a a_1 (red) and a_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 1$.

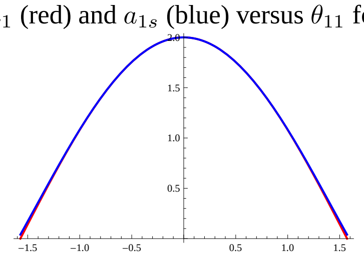

Fig.2b b_1 (red) and b_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 1$.

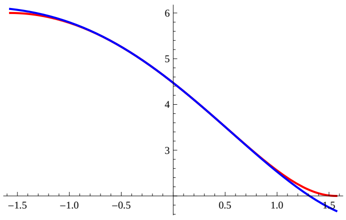

Fig.2c c_1 (red) and c_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 1$.

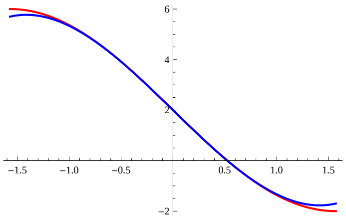

Fig.2d d_1 (red) and d_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 1$.

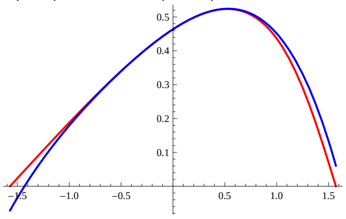

Fig.2e γ_1 (red) and γ_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 1$.

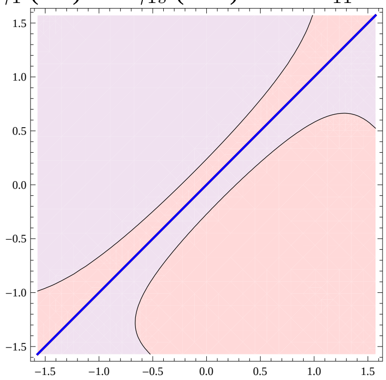

Fig.2f Contour plot of $F_s(\alpha_1 + \theta_{11}, 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21})$ on $(\theta_{11}, \theta_{21})$ plane for $c = 1$.

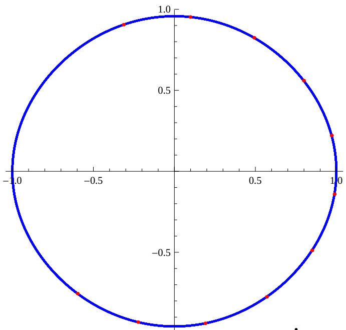

Fig.3a Phase portrait of $\theta_{11}(t)$ versus $\dot{\theta}_{11}(t)$ for $c = 1$.

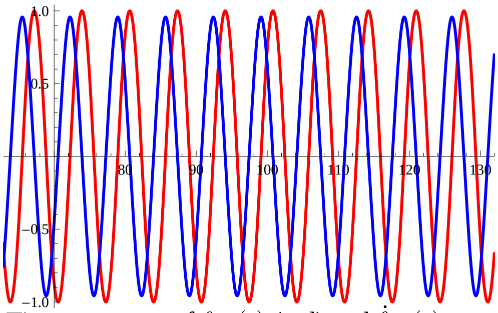

Fig.3b Time sequence of $\theta_{11}(t)$ (red) and $\dot{\theta}_{11}(t)$ versus t for $c = 1$.

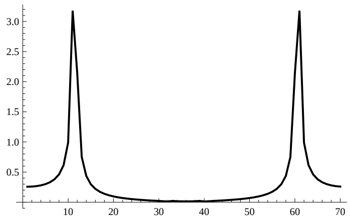

Fig.3c Fourier spectrum of $\theta_{11}(t)$ versus n for $c = 1$.

4.2 $\beta = 0.5$

$\beta = 0.5$ ($c = 0.5$) の関数を **Fig.4a-4f** に示す．$-1 < \theta_{11} < 1$ の範囲では，Taylor 展開による近似解 ($a_{1s}, b_{1s}, c_{1s}, d_{1s}, \gamma_{1s}$) は解析解 ($a_1, b_1, c_1, d_1, \gamma_1$) に一致している．$|\theta_{11}| > 1$ では，Taylor 展開の高次項まで取ると近似の程度は上がる．**Fig.4f** では φ_1 と φ_{1s} は $-1 < \theta_{11} < 1$ の範囲で良く一致している．**Fig.4g** では (2.6) 式の 図式解法の解と解析解 (2.9) と近似解 (2.11) がよく一致していることが分かる．系の規定値 ($m_1 = 1, g = 1, J = 1, \alpha_1 = -\pi/6, h = L_1\sqrt{3}/2$) に対し，初期値を $\theta_{11}(0) = 1, \dot{\theta}_{11}(0) = 0$ とおいて，時間 $0 \le t \le 2\pi \times 21$ で計算し，時間間隔 $2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 21$ の結果を **Fig.5a-5c** に示す．位相面図 (**Fig.5a**) では左右非対称で上下対称の軌跡で，時系列 (**Fig.5b**) は単振動から少し外れて 8.5 周期が見られ，specrum (**Fig.5c**) も大きな peak と小さな peak 値が見える．

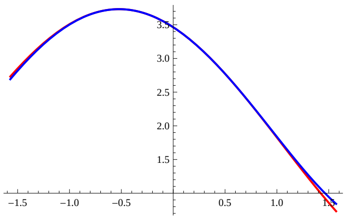

Fig.4a a_1 (red) and a_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 0.5$.

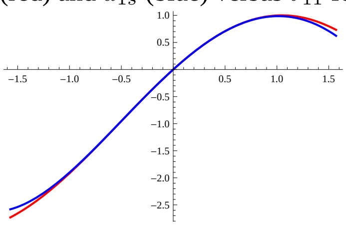

Fig.4b b_1 (red) and b_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 0.5$.

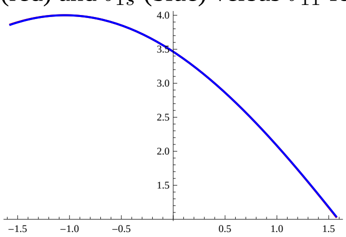

Fig.4c c_1 (red) and c_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 0.5$.

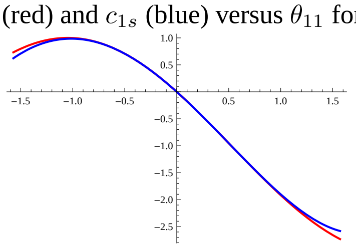

Fig.4d d_1 (red) and d_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 0.5$.

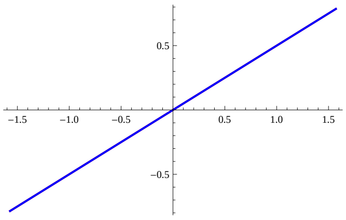

Fig.4e γ_1 (red) and γ_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 0.5$.

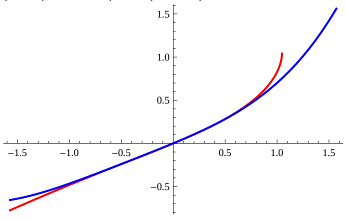

Fig.4f φ_1 (red) and φ_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 0.5$.

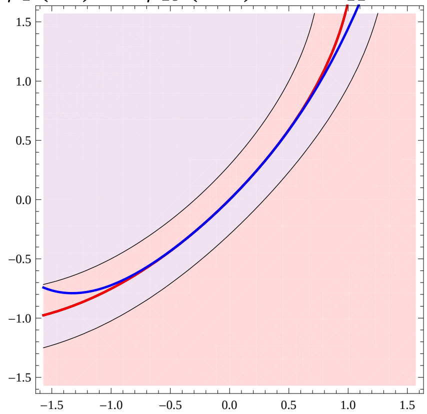

Fig.4g Contour plot of $F_s(\alpha_1 + \theta_{11}, 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21})$ on $(\theta_{11}, \theta_{21})$ plane for $c = 0.5$.

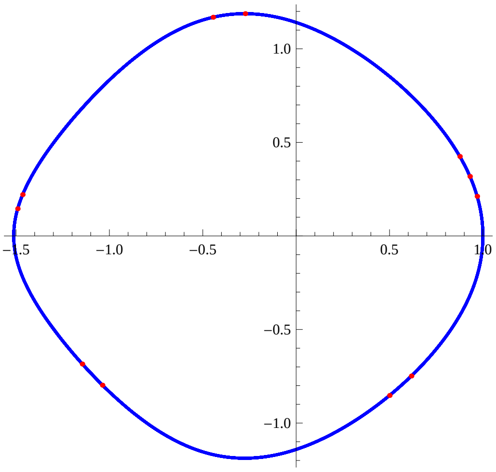

Fig.5a Phase portrait of $\theta_{11}(t)$ (rotated by 90○) versus $\dot{\theta}_{11}(t)$ for $c = 0.5$.

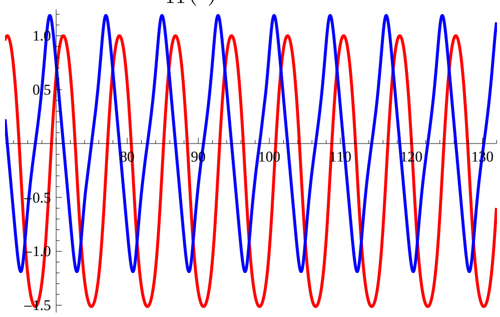

Fig.5b Time sequence of $\theta_{11}(t)$ (red) and $\dot{\theta}_{11}(t)$ versus t for $c = 0.5$.

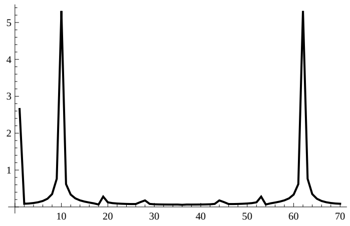

Fig.5c Fourier spectrum of $\theta_{11}(t)$ versus n for $c = 0.5$.

4.3 $\beta = 1.5$

$\beta = 1.5$ ($c = 1.5$) の関数を **Fig.6a-6f** に示す．$-1 < \theta_{11} < 1$ の範囲では，Taylor 展開による近似解 (a_{1s}, b_{1s}, c_{1s}, d_{1s}, γ_{1s}) は解析解 (a_1, b_1, c_1, d_1, γ_1) に一致している．しかし，**Fig.6f** では近似可能な θ_{11} の範囲が狭まっているが，$-0.3 < \theta_{11} < 0.3$ の範囲では良く一致していると言える．$|\theta_{11}| > 1$ では，Taylor 展開の高次項まで取ると近似の程度はさらに上がる．

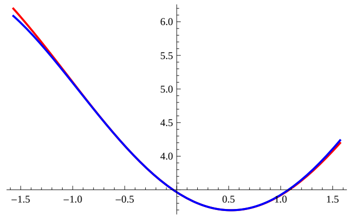

Fig.6a a_1 (red) and a_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 1.5$.

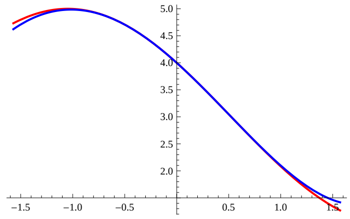

Fig.6b b_1 (red) and b_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 1.5$.

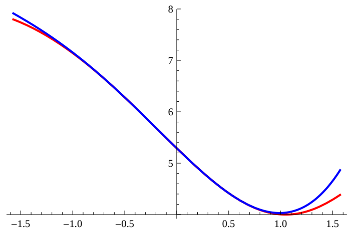

Fig.6c c_1 (red) and c_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 1.5$.

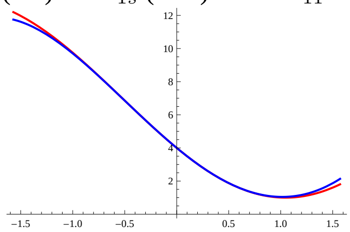

Fig.6d d_1 (red) and d_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 1.5$.

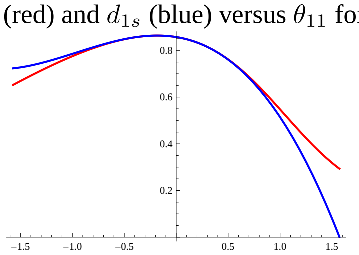

Fig.6e γ_1 (red) and γ_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 1.5$.

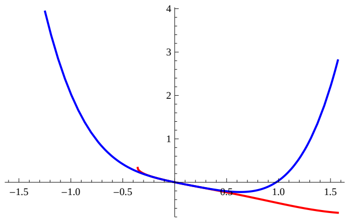

Fig.6f φ_1 (red) and φ_{1s} (blue) versus θ_{11} for $c = 1.5$.

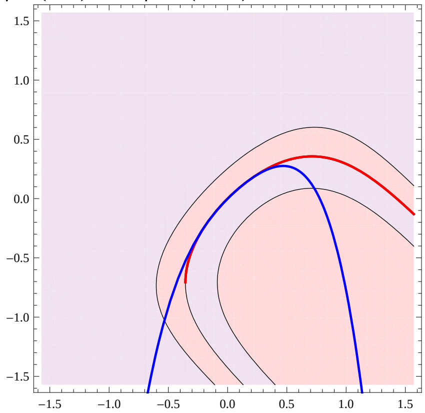

Fig.6g Contour plot of $F_s(\alpha_1 + \theta_{11}, 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21})$ on $(\theta_{11}, \theta_{21})$ plane for $c = 1.5$.

Fig.6g の $-0.3 < \theta_{11} < 0.5$ の範囲では，(2.6) 式の 図式解法の解と解析解 (2.9) と近似解 (2.11) がよく一致していることが分かる．

系の規定値 ($m_1 = 1$, $g = 1$, $J = 1$, $\alpha_1 = \pi/6$, $h = L_1\sqrt{3}/2$) に対し，初期値を $\theta_{11}(0) = 1$, $\dot{\theta}_{11}(0) = 0$ とおいて，時間 $0 \le t \le 2\pi \times 21$ で計算し，時間間隔 $2\pi \times 10 \le t \le 2\pi \times 21$ の結果を **Fig.7a-7c** に示す．位相面図 (**Fig.7a**) では左右非対称で上下対称の軌跡で，時系列 (**Fig.7b**) は単振動から少し外れて 12.5 周期が見られ，specrum (**Fig.7c**) も大きな peak と小さな peak 値が見える．

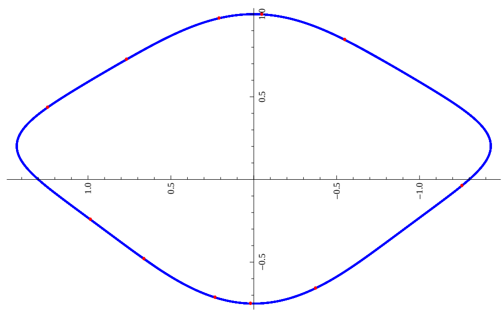

Fig.7a Phase portrait of $\theta_{11}(t)$ versus $\dot{\theta}_{11}(t)$ for $c = 1.5$. The figure is rotated by 90°.

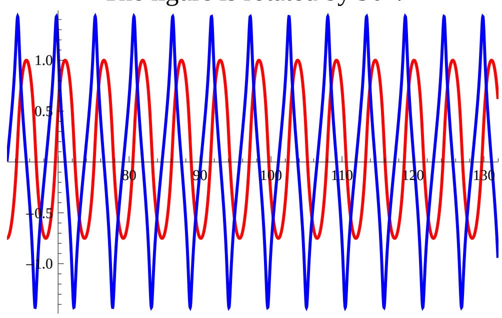

Fig.7b Time sequence of $\theta_{11}(t)$ (red) and $\dot{\theta}_{11}(t)$ versus t for $c = 1.5$.

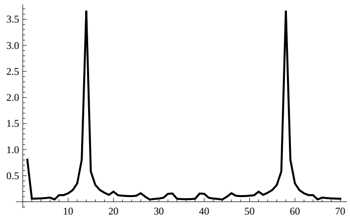

Fig.7c Fourier spectrum of $\theta_{11}(t)$ versus n for $c = 1.5$.

5 おわりに

前報[1],[2] では，2 点吊り振子の 3 つの振動 mode の特徴を述べ，それらの振子の静止平衡状態を表す幾何学的関係式を図式解法により解いた．それに続き，本報告では，対称 2 点吊り振子の mode 1 の「遊動円木」に焦点をあて，静止平衡状態の幾何学的関係式を解析的に解き，撹乱状態の角度変数を用いて円木の座標値を Taylor 展開して近似値を求め，精度を評価した．振子の運動では，水平変位の Taylor 展開は角度撹乱 θ_{11} の 2 次の項まで取り，回転角は 2 次の項まで取る．一方，重力 potential energy は鉛直変位で記述されるので，4 次の項まで取る．これらを考慮して Lagrange 関数は撹乱の 4 次までの項で構成し，運動方程式を導くことができる．本報告では，円木の非線形振動を記述する Lagrange の運動方程式を数値解析して，代表的な自由振動例を求め，数値的に解の対称性の破れを示した．この非線形問題の解析は始まったばかりであり，さらに円木と物体の運動の数値解析を進めて，新たな知見が得られることが期待される．

なお，本報告の一部は，先に講演発表したもの[3],[4] であることを付記する．

参考文献

[1] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (3): 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.63-70.

[2] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の基礎運動解析” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.

[3] 舟田 敏雄，宮内 太積，望月 孔二，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成振動の数値解析” 第 58 回理論応用力学講演会 講演論文集 NCTAM2009, pp.255-256. 第 58 回理論応用力学講演会，日本学術会議，2009 年 6 月 9 日 (火)〜11 日 (木), OS15 連成現象・複合現象のシミュレーション 講演番号 2B13 (6/10).

[4] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之，大庭 勝久: “2 点吊り振子の基礎運動解析と PSD による簡易計測システム試作計画” 第 29 回高専情報処理教育研究発表会 論文集第 29 号, pp.8-11.