

2 点吊り振子の捩り振動のパラメトリック励振の数値解析

大庭 勝久^{*1*2} 舟田 敏雄^{*1*2} 岩本 大^{*1} 清水 啓介^{*1} 中道 義之^{*2*3}

Fundamental Analysis of the Torsional Vibration of a Bifilar Suspension Pendulum with Parametric Excitation

Katsuhisa OOBA^{*1*2} Toshio FUNADA^{*1*2} Dai IWAMOTO^{*1}
Keisuke SHIMIZU^{*1} and Yoshiyuki NAKAMICHI^{*2*3}

Abstract: A uniform density bar is suspended at its two ends by two strings whose two end points are attached to an upper static wall. The bar may swing or make torsional oscillation in a vertical plane from its equilibrium rest state, which is called bifilar suspension pendulum. For three configurations of this pendulum, the nonlinear oscillation of torsional mode of the pendulum is caused due to a vertical parametric excitation, which is analyzed numerically in this report. The results obtained are expected to provide new education materials and to apply in Earthquake Engineering and Seismic Design.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Nonlinear Oscillation of Torsional Mode Due to Parametric Excitation

1 はじめに

2 本吊り振子の力学問題は, 2 本の吊り材で吊られた有限大の物体の重力場での運動であり, 質量中心の並進運動とその回りの回転運動で記述され, 束縛条件の下で解析される. この問題は, 前報^[1] で述べた「静止平衡状態に攪乱状態を重ね合わせて運動を調べるもの」であり, 従来から取り上げられて来た代表的な力学現象の一つで, 教材としても非常に有効である. この振子は “bifilar-suspension-pendulum” と呼ばれ, 最近の非線形力学の格好の教材となっている.

ここでは, 系の長さが等しく棒の配置が左右対称な「対称 2 点吊り振子」を取り上げる. この問題では, 2 本の糸で棒 (遊動円木) の端を吊り下げている静止平衡状態について, 座標値を用いて束縛条件が記述され, それが座標値間の関係式を導く. この静止平衡状態の回りの振子運動は, 糸と棒の成す鉛直面内で起こる “mode 1”^{[2]-[6]} とそれとは垂直な鉛直面内で起こる “mode 2”^{[7], [8]} がある. 一方, 教科書^[9] では「2 本吊り」として, 鉛直軸回りの棒の捩れ振動 “mode 3” が扱われている. これは, 円木の重心を通る鉛直軸を回転軸として, 振子の上下移動による重力 potential energy の変化に起因して起こり, 円木の長さ 2 点吊りの糸の間隔並びに糸の長さにより振動特性が変化する^[10]. その糸の支持点が周期的に励振される場合の捩れ振動の数値解析結果をここに報告する.

2 2 点吊り振子の鉛直軸まわりの捩れ振動

水平面上の O' 点と C 点 (距離 $2c$) に長さ L_1 と L_2 の糸の端を繋ぎ, 他端を長さ $2a$ の棒の端点 A, B に繋いで, 棒を鉛直面内で吊り下げ, 鉛直軸回りに棒を捩れ振動させることができる (Fig.1). O', A, B, C 点の位置を表すために,

デカルト座標系 (x, y, z) の原点を O に, 右向きに x 軸, 鉛直下方に z 軸を取る. この鉛直面内に取った平面極座標系 (r, θ) を用い, O' 点を通る鉛直軸と糸 $O'A$ が成す角度を θ_1 とし, C 点を通る鉛直軸と糸 CB が成す角度を θ_2 と表すと, 静止平衡状態で, 各点の座標は次のように表される:

$$\begin{cases} O : (0, 0), O' : (0, z_0), C : (2c, z_0), \\ A : (x_A, z_A) = (L_1 \sin(\theta_1), z_0 + L_1 \cos(\theta_1)), \\ B : (x_B, z_B) = (2c + L_2 \sin(\theta_2), z_0 + L_2 \cos(\theta_2)) \end{cases} \quad (2.1)$$

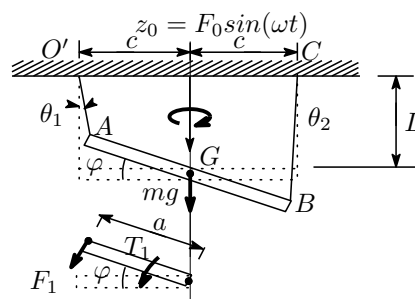


Fig.1 Torsional vibration of bifilar pendulum.

糸の長さが等しく棒の配置が左右対称な「対称 2 点吊り振子」の場合, $L_1 = L_2 = L, \theta_1 = \alpha, \theta_2 = 2\pi - \alpha$ (即ち, $z_A = z_B$) で, 幾何学的関係式が成り立つ:

$$\begin{cases} L_1 \cos(\theta_1) = L_2 \cos(\theta_2) = L \cos(\alpha) = h, \\ L_1 \sin(\theta_1) = -L_2 \sin(\theta_2) = c - a, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$a = c - L \sin(\alpha) \quad (2.3)$$

さらに, この系の静止平衡状態は, 糸の張力 S_1, S_2 と棒の重力による力の釣り合いで与えられる. 棒が一樣な線密度分布 ρ を持つとすると, 棒の質量は $m = 2a\rho$ であり, 重心 G の位置 (x_G, y_G, z_G) は, 棒の中央になる: $x_G = (x_A + x_B)/2, y_G = 0, z_G = (z_A + z_B)/2$. これらは θ_1, θ_2 の関数で, $L_1 = L_2 = L$ のとき棒の配置は重心回りに回転対称であり, $\theta_1 = 2\pi - \theta_2 = \theta$ を得る.

^{*1} 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.

^{*2} 専攻科: Advanced Engineering Course.

^{*3} 総合情報センター: Information Technology Center.

この平衡状態から棒が振れ振動する．鉛直面内の平面極座標系と共に，重心を含む水平面内にとった平面極座標系 (r, φ) (重心を通る鉛直軸を中心軸とする円柱座標 (r, φ, z)) を用いる．この場合は棒の重心の並進運動は，水平面内には生じず，高さ方向 (z 方向) に $z_G = z_0 + L \cos(\theta)$ と表され，鉛直方向の周期的励振は $z_0 \equiv z_0(t)$ により与えられる．重心の位置 (x_G, y_G, z_G) は， $(x_G, y_G, z_G) = (c, 0, z_0 + L \cos(\theta))$ と表され，棒の重心を通る鉛直軸回りの回転運動 (振れ運動) は，角度 φ で記述される．重心回りの棒の慣性 moment J は $J = 2\rho a^3/3 = ma^2/3$ と求められるので，回転の運動 energy は $J\dot{\varphi}^2/2$ となる．ここで，重心回りに振れた棒を上から観ると (Fig.1)，線分 $O'A, AG, GO$ が成す三角形に対する余弦定理が次式で表され， θ は φ の関数で表される：

$$L \sin(\theta) = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca \cos(\varphi)} \quad (2.4)$$

これは， θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) と φ ($-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$) の間の関係を与える． $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$ の場合，根号の前に負号を付ける．(2.4) 式を考慮して，重心回りの棒の振れ運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は，運動 energy K ，重力 potential energy U を用いて，次のように表される：

$$\begin{cases} \mathcal{L} = K - U, & E = K + U, & K = \frac{m}{2} \dot{z}_G^2 + \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2 \\ U = -mgz_G = -mgL[z_0 + L \cos(\theta)] \\ \quad = -mg[z_0 + \sqrt{L^2 - (c^2 + a^2 - 2ca \cos(\varphi))}] \end{cases} \quad (2.5)$$

もし通常の線形理論のように上下運動を無視すると， z_0 は重力 potential energy に含まれるだけで運動方程式には現れないので，鉛直励振は発生しない．

(2.5), (2.4) 式に基づき，この系の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は，次のように表わされる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \left(\dot{z}_0 - \frac{ac \sin(\varphi) \dot{\varphi}}{\sqrt{L^2 - a^2 - c^2 + 2ac \cos(\varphi)}} \right)^2 \\ & + mg \sqrt{L^2 - a^2 - c^2 + 2ac \cos(\varphi)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

これにより，Lagrange の運動方程式が求められる：

$$\begin{aligned} & \frac{acmg \sin(\varphi)}{\sqrt{L^2 - a^2 - c^2 + 2ac \cos(\varphi)}} \\ & + \frac{2(L^2 - a^2 - c^2) \cos(\varphi) + ac(3 + \cos(2\varphi))}{2(L^2 - a^2 - c^2 + 2ac \cos(\varphi))^2} \\ & \times ma^2 c^2 \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 \\ & - \frac{acLm \sin(\varphi)}{\sqrt{L^2 - a^2 - c^2 + 2ac \cos(\varphi)}} \ddot{z}_0 \\ & + \left[J + \frac{a^2 c^2 m (1 - \cos(2\varphi))}{2(L^2 - a^2 - c^2 + 2ac \cos(\varphi))} \right] \ddot{\varphi} \\ & = -c_d \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで，右辺は減衰項であり， c_d は減衰係数を表す．(2.7) 式の初期値問題を数値解析し，励振の条件を変化させるときの系の振舞を求める．

3 励振による 2 点吊り振子の鉛直軸回りの振れ振動 (1)

2 点吊り振子の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, L = 1, a = 1, c = 0.5, F_0 = 0.1, c_d = 0.01, \omega = 0.759836$ とおく．微分方程式系 (2.7) 式の初期値を $\varphi(0) = 0.1, \dot{\varphi}(0) = 0$ と設定して，(2.7) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を Fig.2a-2c に示す．周期振動し，徐々に減衰しているのが分かる．

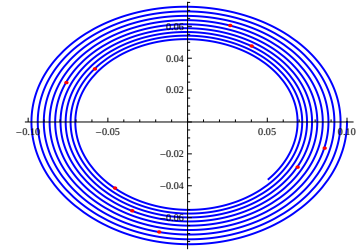


Fig.2a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$.

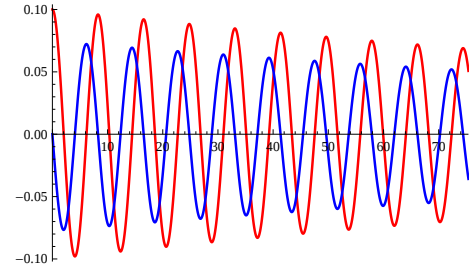


Fig.2b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

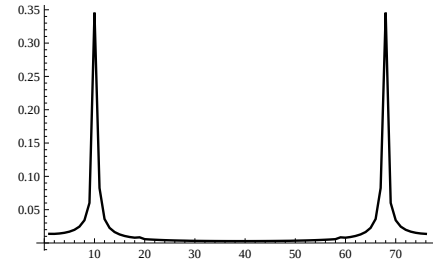


Fig.2c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, L = 1, a = 1, c = 1.5, F_0 = 0.1, c_d = 0.01, \omega = 0.759836$ とおく．微分方程式系 (2.7) 式の初期値を $\varphi(0) = 0.1, \dot{\varphi}(0) = 0$ と設定して，(2.7) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を Fig.3a-3c に示す． $c = 1.5$ であるため，Fig.2 に比べ角振動数が増えている．

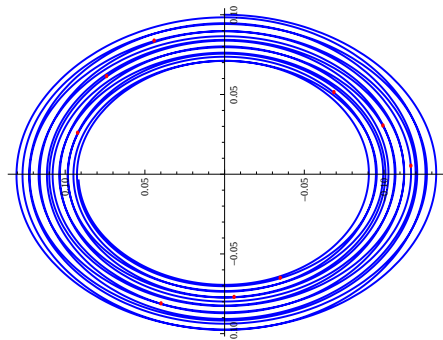


Fig.3a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$. The figure is rotated by 90° .

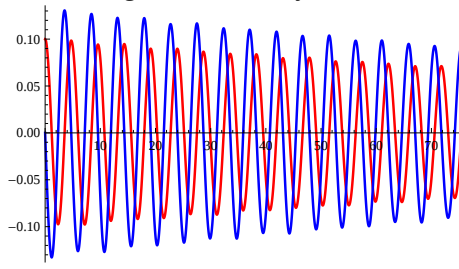


Fig.3b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

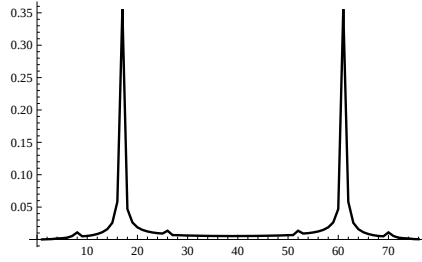


Fig.3c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

2 点吊り振子の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, L = 1, a = 1, c = 1.01, F_0 = 0.1, c_d = 0.01, \omega = 0.759836$ とおく . 微分方程式系 (2.7) 式の初期値を $\varphi(0) = 0.1, \dot{\varphi}(0) = 0$ と設定して , (2.7) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を Fig.4a-4c に示す .

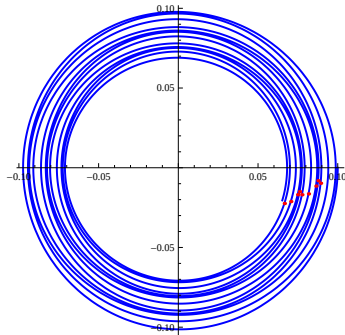


Fig.4a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$.

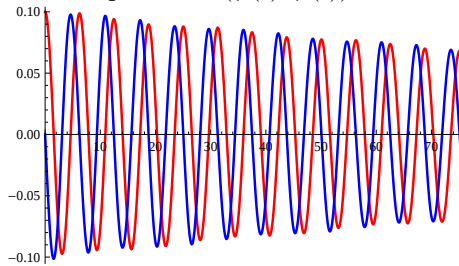


Fig.4b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

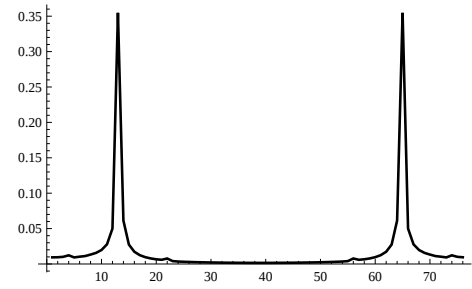


Fig.4c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

2 点吊り振子の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, L = 1, a = 1, c = 0.5, F_0 = 0.5, c_d = 0.01, \omega = 1$ とおく . 微分方程式系 (2.7) 式の初期値を $\varphi(0) = 0.4, \dot{\varphi}(0) = 0$ と設定して , (2.7) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値積分した結果を Fig.5a-5c に示す . この場合 , 振動しながら減衰が見られるが , 外力の振幅が大きくなっており , Fig.2 と比べ複雑化がみられる .

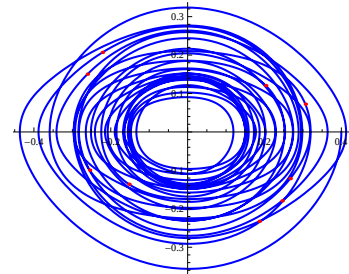


Fig.5a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$.

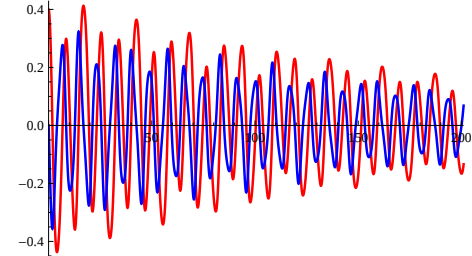


Fig.5b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

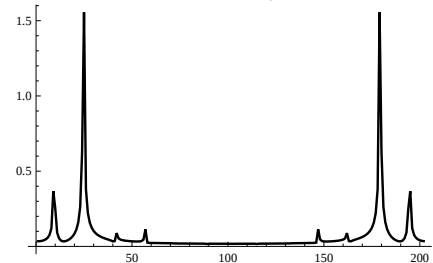


Fig.5c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

4 励振による 2 点吊り振子の鉛直軸回りの捩れ振動 (2)

2 点吊り振子の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, L = 1, a = 1, c = 1.5, F_0 = 0.5, c_d = 0.01, \omega = 1$ とおく . 微分方程式系 (2.7) 式の初期値を $\varphi(0) = 0.4, \dot{\varphi}(0) = 0$ と設定して , (2.7) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値積分した結果を Fig.6a-6c に示す . 外力の角振動数を換えて計算しており , 複雑化がみられる .

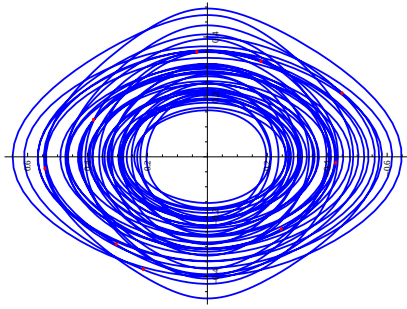


Fig.6a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$. The figure is rotated by 90° .

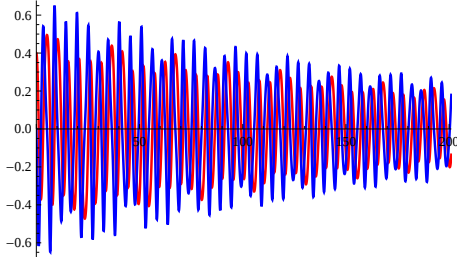


Fig.6b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

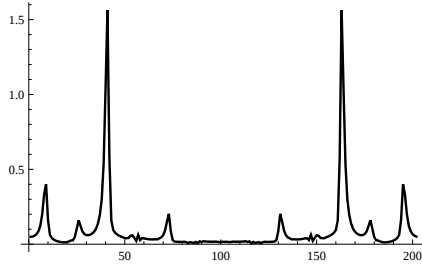


Fig.6c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

2 点吊り振子の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, L = 1, a = 1, c = 1.3, F_0 = 0.55, c_d = 0.01, \omega = 1$ とおく . 微分方程式系 (2.7) 式の初期値を $\varphi(0) = 0.4, \dot{\varphi}(0) = 0$ と設定して , (2.7) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値積分した結果を Fig.7a-7c に示す .

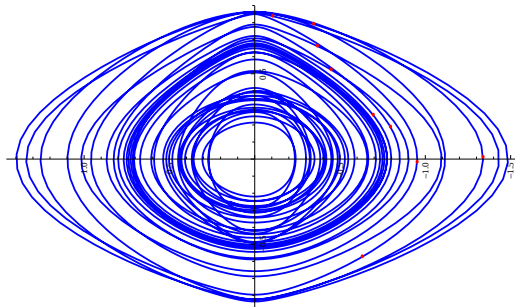


Fig.7a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$. The figure is rotated by 90° .

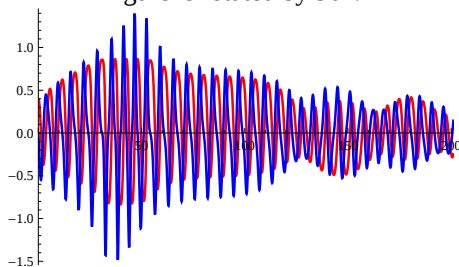


Fig.7b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

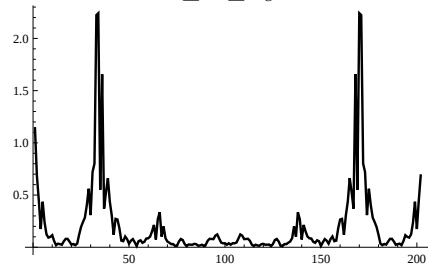


Fig.7c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

2 点吊り振子の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, L = 1, a = 1, c = 1.3, F_0 = 0.56, c_d = 0.01, \omega = 1$ とおく . 微分方程式系 (2.7) 式の初期値を $\varphi(0) = 0.4, \dot{\varphi}(0) = 0$ と設定して , (2.7) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値積分した結果を Fig.8a-8c に示す . 初期から過渡的な状態を経て, 定常的振動に移るように見える.

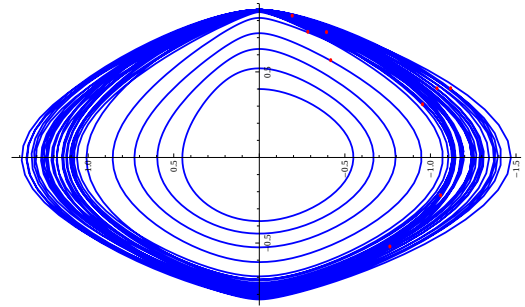


Fig.8a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$. The figure is rotated by 90° .

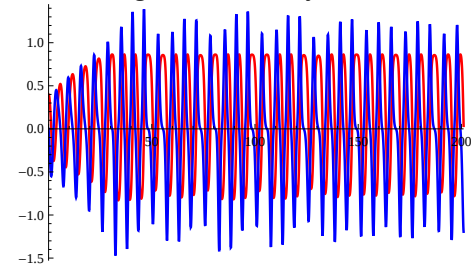


Fig.8b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

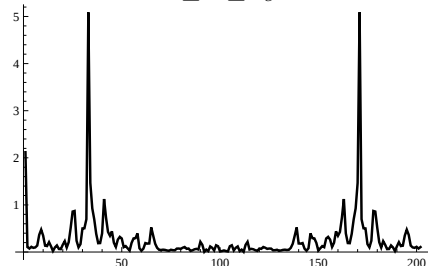


Fig.8c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

2 点吊り振子の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, L = 1, a = 1, c = 1, F_0 = 0.55, c_d = 0.01, \omega = 1$ とおく . 微分方程式系 (2.7) 式の初期値を $\varphi(0) = 0.4, \dot{\varphi}(0) = 0$ と設定して , (2.7) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 72$) で数値積分した結果を Fig.9a-9c に示す .

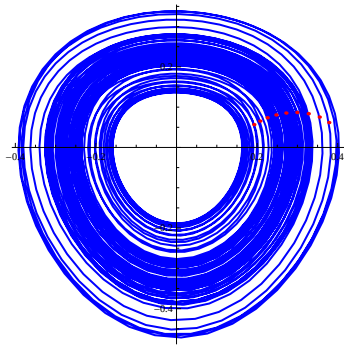


Fig.9a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$.

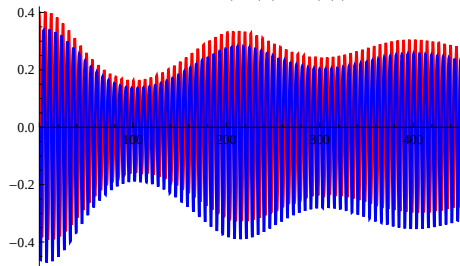


Fig.9b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

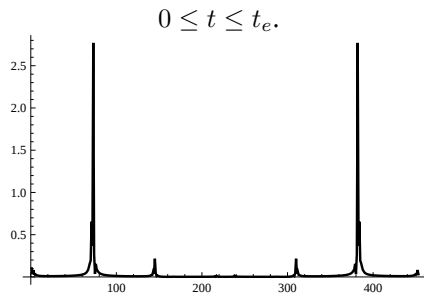


Fig.9c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

2 点吊り振子の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, L = 1, a = 1, c = 1.5, F_0 = 0.53, c_d = 0.01, \omega = 1.1$ とおく . 微分方程式系 (2.7) 式の初期値を $\varphi(0) = 0.4, \dot{\varphi}(0) = 0$ と設定して , (2.7) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値積分した結果を **Fig.10a-10c** に示す.

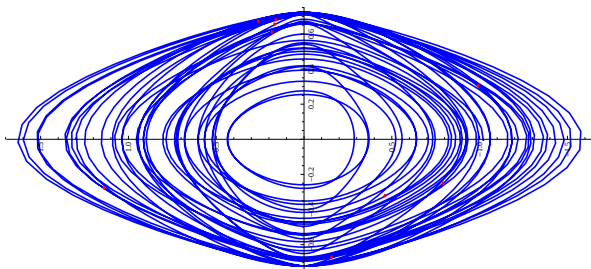


Fig.10a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$. The figure is rotated by 90° .

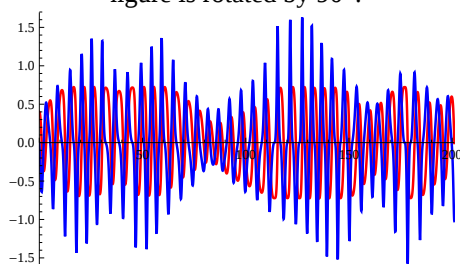


Fig.10b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

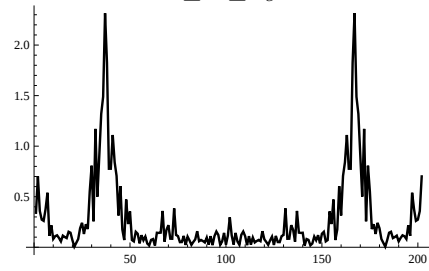


Fig.10c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

2 点吊り振子の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, L = 1, a = 1, c = 1.5, F_0 = 0.5, c_d = 0.01, \omega = 1.3$ とおく . 微分方程式系 (2.7) 式の初期値を $\varphi(0) = 0.4, \dot{\varphi}(0) = 0$ と設定して , (2.7) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値積分した結果を **Fig.11a-11c** に示す.

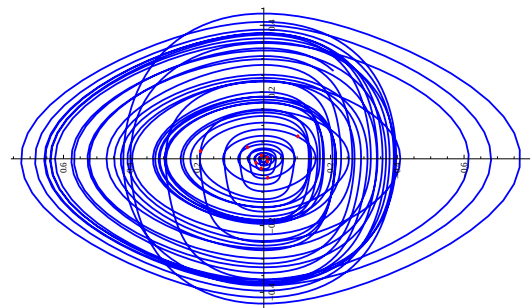


Fig.11a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$. The figure is rotated by 90° .

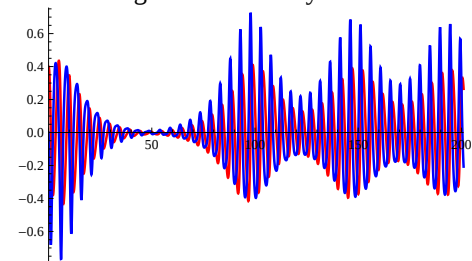


Fig.11b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

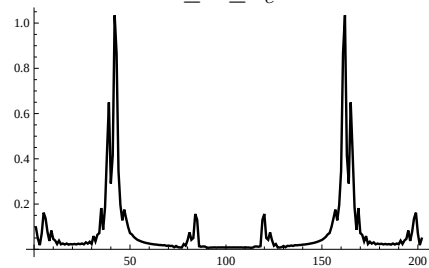


Fig.11c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

2 点吊り振子の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, L = 1, a = 1, c = 1.5, F_0 = 0.6, c_d = 0.01, \omega = 1.3$ とおく . 微分方程式系 (2.7) 式の初期値を $\varphi(0) = 0.4, \dot{\varphi}(0) = 0$ と設定して , (2.7) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値積分した結果を **Fig.12a-12c** に示す.

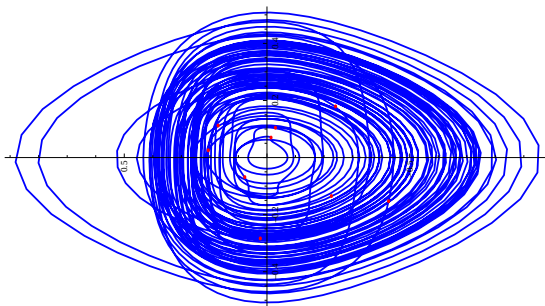


Fig.12a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$. The figure is rotated by 90° .

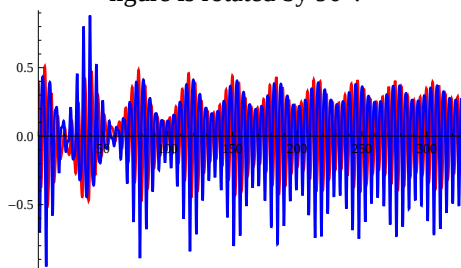


Fig.12b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

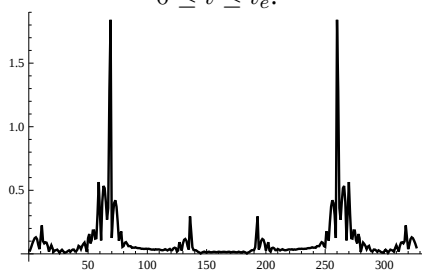


Fig.12c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

5 おわりに

先行して、PSD による簡易計測システム試作を試み、前報^{[2],[3]}の路線に沿って「2点吊り振子の解析」を行い、非線形振動の問題を定式化し、2点吊り振子の捩れ振動を厳密に解析した^[10]。そこでは、2点吊り振子の捩れ振動の解析を行い、上下運動の energy の扱いによる2つの model を力学的 energy 保存則に基づいて、振動の特徴を解明した。それを発展させ、それに続き、2点吊り振子の捩れ振動の強制振動の数値解析結果を示した。外力の振幅と角振動数並びに減衰係数の値を変化させて、系の振動特性を示した^[11]。本報告では壁面のパラメトリック励振を取り上げ、鉛直励振について数値解析を行い、それぞれの振動の特徴を解明し、非線形共振が確認された。続報として、計測システム試作と実験結果の分析^{[12],[13]}を行ったので、参照されたい。それによれば、実験的には3つの振動 mode の固有角振動数が近いところで振動する場合があります、パラメトリック励振や強制振動の場合にも、複数の振動 mode が連成する系の解析が求められる。

本研究遂行にあたり、本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して、柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます。

参考文献

- [1] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 石本 拓也, 鈴木 健宏, 鈴木 寛里: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 42 号 (2008), pp.57-66.
- [2] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 内堀 晃彦, 宮内 太積, 川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (3): 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.63-70.
- [3] 望月 孔二, 宮内 太積, 大庭 勝久, 中道 義之, 川上 誠, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 舟田 敏雄: “7-8 PSD による 2 点吊り振子の捩り振動の計測と教材活用事例” 平成 21 年度 電気関係学会四国支部連合大会開催日時 平成 21 年 9 月 26 日 (土)9:00 ~ 17:00 (8:00 から受付) 第 7 分野 計測 (II) 2F 21 番講義室 15:40-16:50, 講演番号:7-8, 講演予稿集 CDROM, p.76, 07-08.pdf 場所 愛媛大学工学部 主催 電気学会, 電子情報通信学会, 情報処理学会, 照明学会, 映像情報メディア学会, 計測自動制御学会, IEEE, 電気設備学会 各四国支部
- [4] 望月 孔二, 宮内 太積, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 川船 雄一郎, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子の基礎運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [5] 川上 誠, 舟田 敏雄, マズニ アルイルファン, 佐々木 隆吾, 川船 雄一郎, 中道 義之, 宮内 太積, 望月 孔二: “2 点吊り振子の非線形振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [6] 望月 孔二, 宮内 太積, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 川船 雄一郎, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [7] 舟田 敏雄, 田代 直人, 園田 泰之, 前原 貴憲, 川上 誠, 齋藤 学, 小山 雅弘, 村田 裕也, 今村 昌幸, 藤田 邦彦: “Computational Fluid Dynamics への指向” 沼津高専研究報告 第 39 号 (2004), pp.31-40.
- [8] 舟田 敏雄, 田代 直人, 園田 泰之, 藤田 邦彦, 齋藤 学, 小山 雅弘, 村田 裕也, 今村 昌幸: “技術者教育のための工学数理の力学教材の改定 — ブランコの運動と Mathieu 方程式 —” 沼津高専研究報告 第 40 号 (2005), pp.23-32.
- [9] 小出 昭一郎: “解析力学” 岩波書店, 1983.
- [10] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 中道 義之: “2 点吊り振子の捩り振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [11] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 中道 義

之: “2 点吊り振子の捩り振動の強制振動の数値解析”
沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

- [12] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (5): 2 点吊り振子の捩れ振動” 沼津高専研究報

告 第 44 号 (2010), in press.

- [13] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 船津 佑介, 岩本 大, 清水 啓介, 石本 拓也, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠: “出前授業のための「振子」教材の整備: Pendulum Snake と 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.