2 点吊り振子の捩り振動の強制振動の数値解析

大庭 勝久*1*2 舟田 敏雄*1*2 岩本 大*1 清水 啓介*1 中道 義之*2*3

Fundamental Analysis of the Torsional Vibration of a Bifilar Suspension Pendulum with External Forcing

Katsuhisa OOBA*1*2 Toshio FUNADA*1*2 Dai IWAMOTO*1
Keisuke SHIMIZU*1 and Yoshiyuki NAKAMICHI*2*3

Abstract: A uniform density bar is suspended at its two ends by two strings whose two end points are attached to an upper static wall. The bar may swing or make torsional oscillation in a vertical plane from its equilibrium rest state, which is called bifilar suspension pendulum. There are three configurations of this pendulum: the distance of two points may be longer or shorter than the bar length, and it is just the same, thus the bar keeps the attitude horizontal. For the configurations, the torsional mode of the pendulum is analyzed in this report, where the conservation of mechanical energy gives exact mechanisms of free oscillations. The nonlinear oscillation due to an external excitation is also solved with the aid of numerical computations. The results obtained are expected to provide new education materials and to apply in Earthquake Engineering and Seismic Design.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Nonlinear Oscillation of Torsional Mode Due to External Excitation

1 はじめに

2 本吊り振子の力学問題は，2 本の吊り材で吊られた有限大の物体の重力場での運動であり，質量中心の並進運動とその回りの回転運動で記述され，束縛条件の下で解析される．この問題は，前報[1] で述べた「静止平衡状態に攪乱状態を重ね合わせて運動を調べるもの」であり，従来から取り上げられて来た代表的な力学現象の一つ[2] で，教材としても非常に有効である．この振子は “bifilar-suspension-pendulum” と呼ばれ，最近の非線形力学の格好の教材となっている[3].

糸の長さが等しく棒の配置が左右対称な「対称 2 点吊り振子」の振動問題では，2 本の糸で棒 (遊動円木) の端を吊り下げている静止平衡状態について，座標値を用いて束縛条件が記述され，それが座標値間の関係式を導くが，関係式が陰関数表現となるため厳密な扱いは面倒になる．この静止平衡状態の回りの振子運動は，糸と棒の成す鉛直面内で起こる “mode 1 (遊動円木 mode)” とそれとは垂直な鉛直面内で起こる “mode 2 (ブランコ mode)” がある．mode 1 の振子運動が先行研究で注目されており前報[4]–[7] で論じた．mode 2 の解析は先の報告[8],[9] で扱ったのでここでは触れない．一方，教科書[10] では「2 本吊り」として，鉛直軸回りの棒の捩れ振動が扱われている．これは，上述の 2 つとは異種の “mode 3” である．この 2 点吊り振子の捩り振動は，円木の重心を通る鉛直軸を回転軸として，振子の上下移動による重力 potential energy の変化に起因して起こる．円木の長さと 2 点吊りの糸の間隔並びに糸の長さにより振動特性が変化する[11]．そこでは円木の鉛直方向の運動 energy を無視できる場合と無視できない場合とを考えることができる．この 2 つの場合について，減衰力と周期的外力を考慮して，強制振動の問題を設定する．力が働く場合の数値解析結果を本報告で示す.

*1 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
*2 専攻科: Advanced Engineering Course.
*3 総合情報センター: Information Technology Center.

2 2 点吊り振子の鉛直軸回りの捩れ振動

水平面上の O' 点と C 点 (距離 $2c$) に長さ L_1 と L_2 の糸の端を繋ぎ，他端を長さ $2a$ の棒の端点 A, B に繋いで，棒を鉛直面内で吊り下げ，鉛直軸回りに棒を捩れ振動させることができる (**Fig.1**).

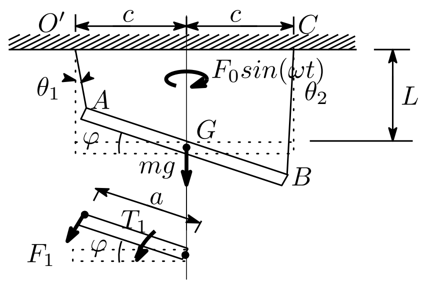

Fig.1 Torsional vibration of bifilar pendulum.

O', A, B, C 点の位置を表すために，デカルト座標系 (x, y, z) の原点を O に取り，右向きに x 軸，鉛直下方に z 軸を取る．この鉛直面内に取った平面極座標系 (r, θ) を用い，O' 点を通る鉛直軸と 糸 $O'A$ が成す角度を θ_1 とし，C 点を通る鉛直軸と糸 CB が成す角度を θ_2 と表すと，静止平衡状態で，各点の座標は次のように表される:

$$\begin{cases} O:(0,0)\,,\ O':(x_0,z_0)=(0,0)\,,\ C:(2c,0)\,,\\ A:(x_A,z_A)=(L_1\sin(\theta_1),L_1\cos(\theta_1))\,,\\ B:(x_B,z_B)=(2c+L_2\sin(\theta_2),L_2\cos(\theta_2)) \end{cases} \tag{2.1}$$

糸の長さが等しく棒の配置が左右対称な「対称 2 点吊り振子」の場合，$L_1 = L_2 = L, \theta_1 = \alpha, \theta_2 = 2\pi - \alpha$ (即ち，$z_A = z_B$ で，棒が水平な状態) であり，幾何学的関係式が

成り立つ:

$$\begin{cases} L_1\cos(\theta_1) = L_2\cos(\theta_2) = L\cos(\alpha) = h, \\ L_1\sin(\theta_1) = -L_2\sin(\theta_2) = c - a, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$a = c - L\sin(\alpha) \tag{2.3}$$

さらに，この系の静止平衡状態は，糸の張力 S_1, S_2 と棒の重力による力の釣り合いで与えられる．棒が一様な線密度分布 ρ を持つとすると，棒の質量は $m = 2a\rho$ であり，重心 G の位置 (x_G, y_G, z_G) は，棒の中央になるから，次のように表される:

$$x_G = (x_A + x_B)/2,\ \ y_G = 0,\ \ z_G = (z_A + z_B)/2 \tag{2.4}$$

これらは θ_1, θ_2 の関数で，$L_1 = L_2 = L$ のとき棒の配置は重心回りに回転対称であり，$\theta_1 = 2\pi - \theta_2 = \theta$ を得る．

この平衡状態から棒が捩れ振動する．鉛直面内の平面極座標系と共に，重心を含む水平面内に取った平面極座標系 (r, φ) (重心を通る鉛直軸を中心軸とする円柱座標 (r, φ, z)) を用いる．この場合は棒の重心の並進運動は，水平面内には生じず，高さ方向 (z 方向) に $z_G = L\cos(\theta)$ と表され，重心の位置 (x_G, y_G, z_G) は次式で表される:

$$(x_G,\ y_G,\ z_G) = (c,\ 0,\ L\cos(\theta)) \tag{2.5}$$

棒の重心を通る鉛直軸回りの回転運動 (捩れ運動) は，角度 φ で記述される．重心回りの棒の慣性 moment J は $J = 2\rho a^3/3 = ma^2/3$ と求められるので，回転の運動 energy は $J\dot{\varphi}^2/2$ となる．ここで，重心回りに捩れた棒を上から観ると (**Fig.1**)，線分 $O'A, AG, GO$ が成す三角形に対する余弦定理が次式で表され，θ は φ の関数で表される:

$$L\sin(\theta) = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca\cos(\varphi)} \tag{2.6}$$

これは，θ $(0 \le \theta \le \pi/2)$ と φ $(-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2)$ の間の関係を与える．$-\pi/2 \le \theta \le 0$ の場合，根号の前に負号を付ける．(2.6), (2.5) 式を考慮して，重心回りの棒の捩れ運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は，運動 energy K，重力 potential energy U を用いて，次のように表される:

$$\begin{cases} \mathcal{L} = K - U,\ \ E = K + U, \\ K = \dfrac{m}{2}\dot{z}_G^2 + \dfrac{J}{2}\dot{\varphi}^2 = \dfrac{m}{2}L^2\left(\dfrac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \dfrac{J}{2}\dot{\varphi}^2 \\ = \dfrac{m}{2}\dfrac{\dot{\varphi}^2 a^2 c^2 \sin^2(\varphi)}{L^2 - (c^2 + a^2 - 2ca\cos(\varphi))} + \dfrac{J}{2}\dot{\varphi}^2, \\ U = -mgz_G = -mgL\cos(\theta) \\ = -mg\sqrt{L^2 - (c^2 + a^2 - 2ca\cos(\varphi))} \end{cases} \tag{2.7}$$

よって，(2.7) 式では 1 自由度の運動が φ で記述される．ここでは，運動 energy に上下運動 (z 方向) と回転運動 (φ 方向) を考慮したが，通常の線形理論では上下運動を無視して，次式の系を考える:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 = K_1 - U,\ \ E_1 = K_1 + U,\ \ K_1 = \dfrac{J}{2}\dot{\varphi}^2, \\ U = -mgz_G = -mgL\cos(\theta) \\ = -mg\sqrt{L^2 - (c^2 + a^2 - 2ca\cos(\varphi))} \end{cases} \tag{2.8}$$

線形化固有角振動数は $\omega_0^2 = mgca/(JL\cos(\alpha)) = 3gc/(aL\cos(\alpha))$ である．

(2.7) 式より，この系の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は，次のように表わされる:

$$\mathcal{L} = \left(\frac{J}{2} + \frac{m}{2}\frac{a^2c^2\sin(\varphi)^2}{L^2 - a^2 - c^2 + 2ac\cos(\varphi)}\right)\dot{\varphi}^2 + mg\sqrt{L^2 - a^2 - c^2 + 2ac\cos(\varphi)} \tag{2.9}$$

これにより，Lagrange の運動方程式が求められ，減衰係数 c_d の減衰項と外力項 $F_1\sin(\omega t)$ (F_1:振幅，ω:角振動数) を考慮すると，運動方程式は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} &\frac{acmg\sin(\varphi)}{\sqrt{L^2 - a^2 - c^2 + 2ac\cos(\varphi)}} \\ &+ \frac{2\left(L^2 - a^2 - c^2\right)\cos(\varphi) + ac(3 + \cos(2\varphi))}{2\left(L^2 - a^2 - c^2 + 2ac\cos(\varphi)\right)^2} \\ &\times ma^2c^2\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 \\ &+ \left[J + \frac{a^2c^2m\left(1 - \cos(2\varphi)\right)}{2\left(L^2 - a^2 - c^2 + 2ac\cos(\varphi)\right)}\right]\ddot{\varphi} \\ &= -c_d\dot{\varphi} + F_1\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{2.10}$$

(2.8) 式より，この系の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_1$ は，次のように表わされる:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2 + mg\sqrt{L^2 - a^2 - c^2 + 2ac\cos(\varphi)} \tag{2.11}$$

これにより，Lagrange の運動方程式が求められ，減衰係数 c_d の減衰項と外力項 $F_1\sin(\omega t)$ を考慮すると，運動方程式は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} &\frac{acmg\sin(\varphi)}{\sqrt{L^2 - a^2 - c^2 + 2ac\cos(\varphi)}} + J\ddot{\varphi} \\ &= -c_d\dot{\varphi} + F_1\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{2.12}$$

強制振動の方程式 (2.12), (2.10) の初期値問題を数値解析した結果を以下の節に示す．

3 強制振動の運動方程式 (2.12) の数値解析

系の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, a = 1, c = 0.5, L = 1, \beta = c/a = 0.5$ と設定し，初期値を $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$ と取り，減衰係数 $c_d = 0.01$，外力の振幅 $F_1 = 0.1$ と角振動数 $\omega = \sqrt{0.5}/\sqrt{0.75} = 0.759836$ を変化させて，計算時間 $0 \le t \le t_e$ $(t_e = 2\pi \times 12)$ で数値計算した結果を **Fig.2a-2c** に示す．**Fig.2a-2c** では beat(うなり) が出ている．

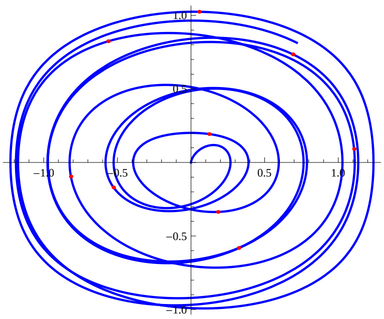

Fig.2a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$.

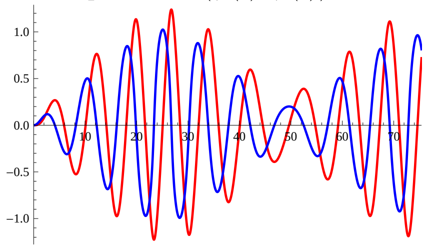

Fig.2b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

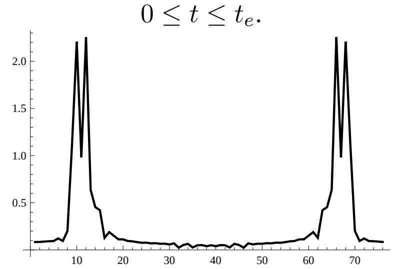

Fig.2c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, a = 1, c = 1.01, L = 1, \beta = c/a = 1.01$ と設定し，初期値を $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$ と取り, 減衰係数 $c_d = 0.01$, 外力の振幅 $F_1 = 0.1$ と角振動数 $\omega = \sqrt{0.5}/\sqrt{0.75} = 0.759836$ を変化させて, 計算時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値計算した結果を **Fig.3a-3c** に示す.

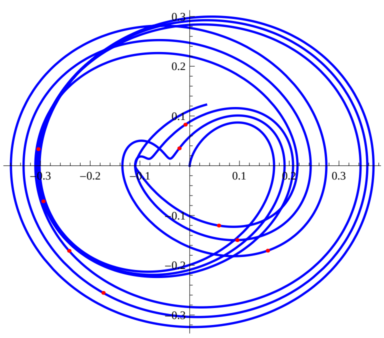

Fig.3a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$.

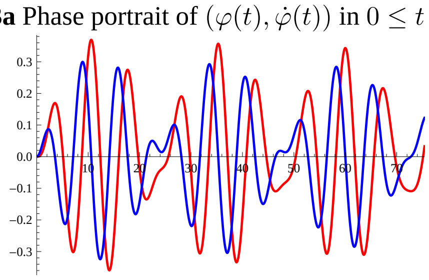

Fig.3b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

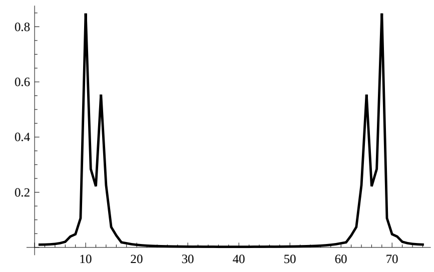

Fig.3c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, a = 1, c = 0.5, L = 1, \beta = c/a = 0.5$ と設定し，初期値を $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$ と取り, 減衰係数 $c_d = 0.01$, 外力の振幅 $F_1 = 0.2$ と角振動数 $\omega = \sqrt{0.5}/\sqrt{0.75} = 0.759836$ を変化させて, 計算時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値計算した結果を **Fig.4a-4c** に示す.

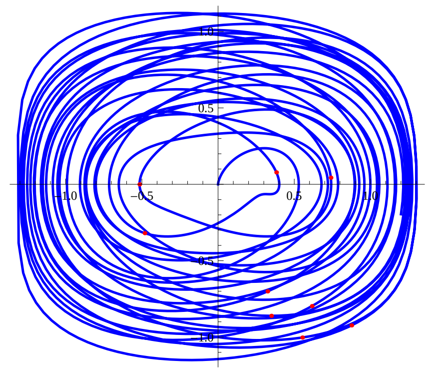

Fig.4a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$.

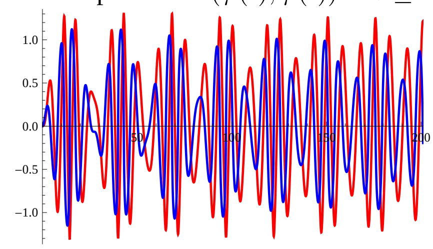

Fig.4b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

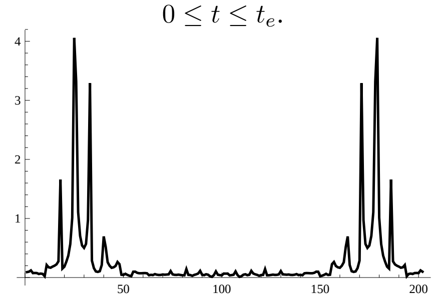

Fig.4c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, a = 1, c = 0.5, L = 1, \beta = c/a = 0.5$ と設定し，初期値を $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$ と取り，減衰係数 $c_d = 0.01$，外力の振幅 $F_1 = 0.23$ と角振動数 $\omega = \sqrt{0.5}/\sqrt{0.75} = 0.759836$ を変化させて，計算時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値計算した結果を **Fig.5a-5c** に示す.

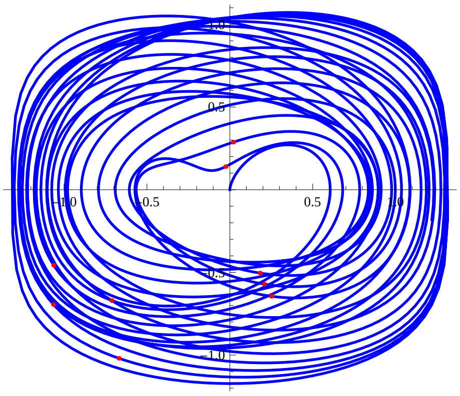

Fig.5a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \le t \le t_e$.

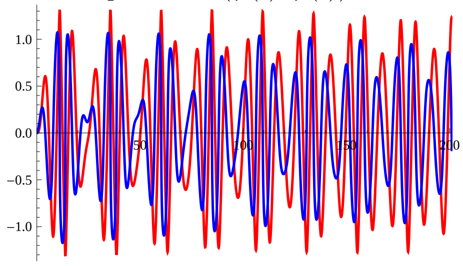

Fig.5b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \le t \le t_e$.

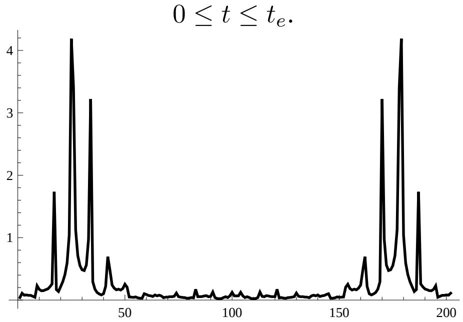

Fig.5c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \le t \le t_e$.

4 強制振動の運動方程式 (2.10) の数値解析

系の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, a = 1, c = 0.5, L = 1, \beta = c/a = 0.5$ と設定し，初期値を $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$ と取り，減衰係数 $c_d = 0.01$，外力の振幅 $F_1 = 0.1$ と角振動数 $\omega = \sqrt{0.5}/\sqrt{0.75} = 0.759836$ を変化させて，計算時間 $0 \le t \le t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値計算した結果を **Fig.6a-6c** に示す.

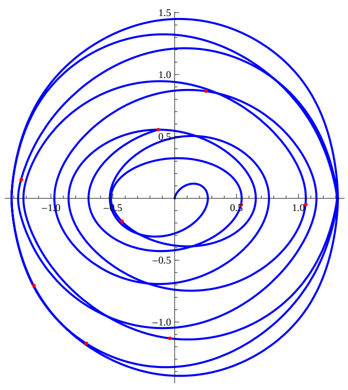

Fig.6a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \le t \le t_e$.

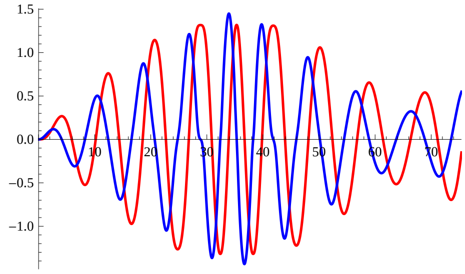

Fig.6b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \le t \le t_e$.

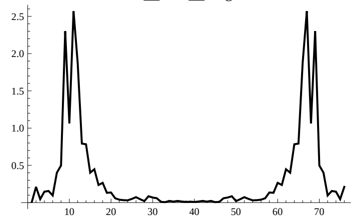

Fig.6c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \le t \le t_e$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, J = 1, a = 1, c = 0.5, L = 1, \beta = c/a = 0.5$ と設定し，初期値を $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$ と取り，減衰係数 $c_d = 0.01$，外力の振幅 $F_1 = 0.2$ と角振動数 $\omega = \sqrt{0.5}/\sqrt{0.75} = 0.759836$ を変化させて，計算時間 $0 \le t \le t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値計算した結果を **Fig.7a-7c** に示す.

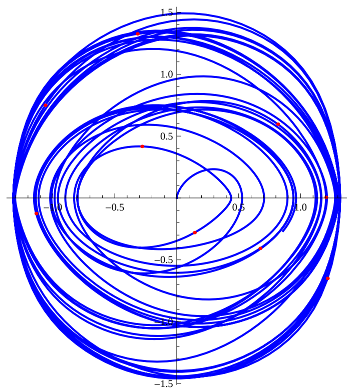

Fig.7a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \le t \le t_e$.

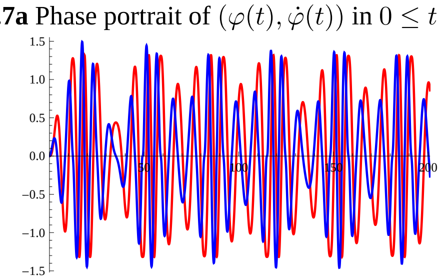

Fig.7b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \le t \le t_e$.

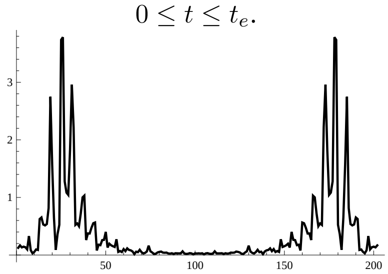

Fig.7c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \le t \le t_e$.

系の規定値を $g = 1$, $m = 1$, $J = 1$, $a = 1$, $c = 0.5$, $L = 1$, $\beta = c/a = 0.5$ と設定し，初期値を $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ と取り，減衰係数 $c_d = 0.01$，外力の振幅 $F_1 = 0.21543$ と角振動数 $\omega = \sqrt{0.5}/\sqrt{0.75} = 0.759836$ を変化させて，計算時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値計算した結果を **Fig.8a-8c** に示す．

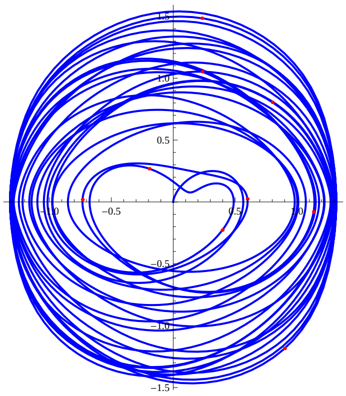

Fig.8a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$.

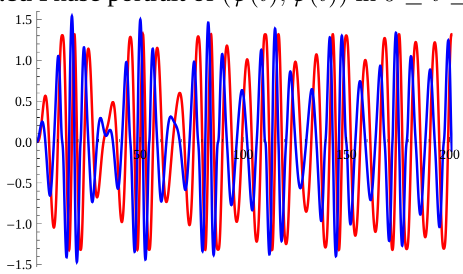

Fig.8b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

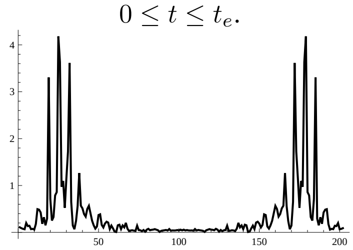

Fig.8c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

系の規定値を $g = 1$, $m = 1$, $J = 1$, $a = 1$, $c = 1$, $L = 1$, $\beta = c/a = 1$ と設定し，初期値を $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ と取り，減衰係数 $c_d = 0.01$，外力の振幅 $F_1 = 0.2$ と角振動数 $\omega = \sqrt{0.5}/\sqrt{0.75} = 0.759836$ を変化させて，計算時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値計算した結果を **Fig.9a-9c** に示す．

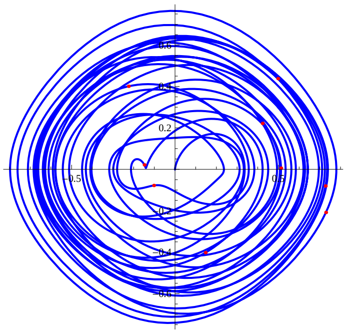

Fig.9a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$.

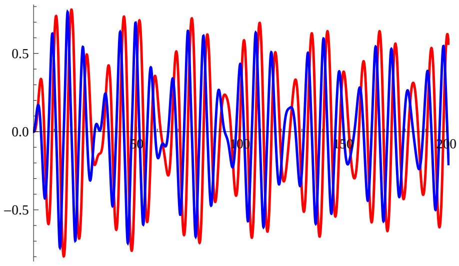

Fig.9b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

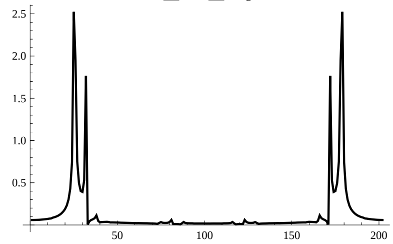

Fig.9c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

系の規定値を $g = 1$, $m = 1$, $J = 1$, $a = 1$, $c = 1.5$, $L = 1$, $\beta = c/a = 1.5$ と設定し，初期値を $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ と取り，減衰係数 $c_d = 0.01$，外力の振幅 $F_1 = 0.2$ と角振動数 $\omega = \sqrt{0.5}/\sqrt{0.75} = 0.759836$ を変化させて，計算時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値計算した結果を **Fig.10a-10c** に示す．

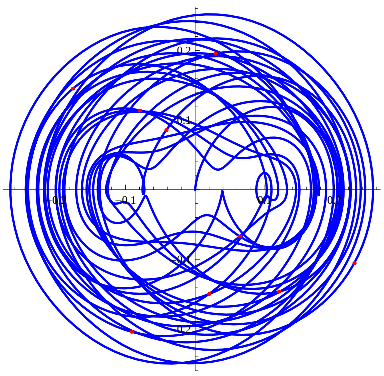

Fig.10a Phase portrait of $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ in $0 \leq t \leq t_e$.

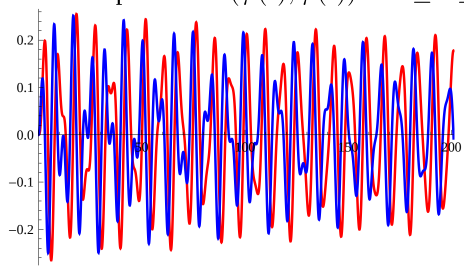

Fig.10b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq t_e$.

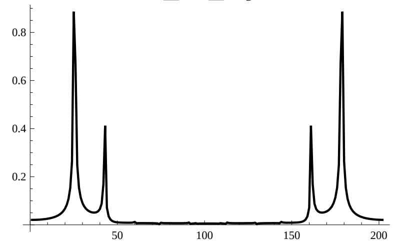

Fig.10c Spectrum of $\varphi(t)$ in $0 \leq t \leq t_e$.

5 おわりに

先行して，PSD による簡易計測システム試作を試み，前報[5],[12]–[14] の路線に沿って「2 点吊り振子の解析」を行い，非線形振動の問題を定式化し，2 点吊り振子の捩れ振動の解析を行い，上下運動の energy の扱いによる 2 つの model を力学的 energy 保存則に基づいて，振動の特徴を解明した[11]．それに続き，本報告では，2 点吊り振子の捩れ振動の強制振動の数値解析を行い，外力の振幅と角振動数並びに減衰係数の値を変化させて，上下運動を考慮する場合 (2.10) と考慮しない場合 (2.12) の振動特性を調べた．特に，(2.12) 式では，準共振的振動が見られ，(2.10) 式では複雑なカオス的振動が観測された．

続報として，2 点吊り振子の捩り振動のパラメトリック励振の数値解析[15]，計測システム試作と実験結果の分析[16],[17] を行うので，参照されたい．

本研究遂行にあたり，本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して，柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] 望月 孔二，舟田 敏雄，石本 拓也, 鈴木 健宏, 鈴木 寛里: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 42 号 (2008), pp.57-66.

[2] 津川 昭良: “紐に吊された 2 振子の連成振動のラプラス変換法による解法と工学教育への応用” 山形大学紀要. 工学 15(1), pp.201-213.

[3] P. Doherty: “Pendulum Snake: From order to chaos and back again” in Scientific Explorations And Adventures http://www.exo.net/˜ pauld/activities/pendulums /pendulumsnake.html

[4] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の基礎運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[5] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (3): 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.63-70.

[6] 川上 誠，舟田 敏雄，マズニ アル イルファン，佐々木 隆吾，川船 雄一郎，中道 義之，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の非線形振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[7] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[8] 舟田 敏雄, 田代 直人, 園田 泰之, 前原 貴憲, 川上 誠, 齋藤 学, 小山 雅弘, 村田 裕也, 今村 昌幸, 藤田 邦彦: “Computational Fluid Dyanamics への指向” 沼津高専研究報告 第 39 号（2004), pp.31-40.

[9] 舟田 敏雄，田代 直人，園田 泰之，藤田 邦彦，齋藤 学，小山 雅弘，村田 裕也，今村 昌幸: “技術者教育のための工学数理の力学教材の改定 — ブランコの運動と Mathieu 方程式 —” 沼津高専研究報告 第 40 号 (2005), pp.23-32.

[10] 小出 昭一郎: “解析力学” 岩波書店，1983.

[11] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，中道 義之: “2 点吊り振子の捩り振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[12] 望月 孔二, 内堀 晃彦, 川上 誠, 宮内 太積, 舟田 敏雄: “PSD による簡易計測システム試作と多点吊り振子の実験・解析” 平成 20 年度 電気関係学会 東海支部連合大会，愛知県立大学 (愛知郡長久手町大字熊張字茨ヶ廻間 1522-3)，平成 20 年 9 月 18 日 (木)〜19 日 (金)，講演番号: O-430，講演論文集 O_430.pdf

[13] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (4): 2 点吊り振子の実験と解析” 沼津高専研究報告 第 43 号 (2009), pp.71-78.

[14] 望月 孔二, 宮内 太積, 大庭 勝久, 中道 義之, 川上 誠, 岩本 大, 清水啓介, 船津佑介, 舟田敏雄: “7-8 PSD による 2 点吊り振子の捩り振動の計測と教材活用事例” 平成 21 年度 電気関係学会四国支部連合大会開催日時 平成 21 年 9 月 26 日 (土)9:00〜17:00（8:00 から受付）第 7 分野 計測 (II) 2F 21 番講義室 15:40-16:50，講演番号:7-8，講演予稿集 CDROM, p.76, 07-08.pdf 場所 愛媛大学工学部 主催 電気学会，電子情報通信学会，情報処理学会，照明学会，映像情報メディア学会，計測自動制御学会，IEEE，電気設備学会　各四国支部

[15] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，中道 義之: “2 点吊り振子の捩り振動のパラメトリック励振の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[16] 望月 孔二，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介，中道 義之，大庭 勝久，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (5): 2 点吊り振子の捩れ振動” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[17] 望月 孔二，舟田 敏雄，船津 佑介，岩本 大，清水 啓介, 石本 拓也, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠: “出前授業のための「振子」教材の整備: Pendulum Snake と 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.