2 点吊り振子の捩り振動の基礎解析

大庭 勝久[*1*2] 舟田 敏雄[*1*2] 岩本 大[*1] 清水 啓介[*1] 中道 義之[*2*3]

Fundamental Analysis of the Torsional Oscillation of a Bifilar Suspension Pendulum

Katsuhisa OOBA[*1*2] Toshio FUNADA[*1*2] Dai IWAMOTO[*1]
Keisuke SHIMIZU[*1] and Yoshiyuki NAKAMICHI[*2*3]

Abstract: A uniform density bar is suspended at its two ends by two strings whose two end points are attached to an upper static wall. The bar may make torsional oscillation in a vertical plane from its equilibrium rest state, which is called bifilar suspension pendulum. There are three configurations of this pendulum: the distance between the two points is longer or shorter than the bar length, and it is just the same. For the configurations, the bar keeps the attitude horizontal during the torsional oscillation of the pendulum about the vertical axis. The torsional mode is analyzed here, in which the conservation of mechanical energy gives exact mechanisms of free oscillations. The nonlinear oscillation is also solved with the aid of numerical computations. The results obtained are expected to provide new education materials and to apply in Earthquake Engineering and Seismic Design.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Free Oscillation of Torsional Mode

1　はじめに

2 本吊り振子の力学問題は，2 本の吊り材で吊られた有限大の物体の重力場での運動であり，質量中心の並進運動とその回りの回転運動で記述され，束縛条件の下で解析される．この問題は，前報[1] で述べた「静止平衡状態に攪乱状態を重ね合わせて運動を調べるもの」であり，従来から取り上げられて来た代表的な力学現象の一つ[2] で，教材としても非常に有効である．この振子は “bifilar-suspension-pendulum” と呼ばれ，Inetrnet 上に多くの教材[3],[4] が提供されている．また，振子に関する本[5] も発行され，最近の非線形力学の格好の教材となっている．さらに，最適化設計[6] も試みられて，新たな工学的課題を提供している．

ここでは，糸の長さが等しく棒の配置が左右対称な「対称 2 点吊り振子」を取り上げる．この問題では，2 本の糸で棒 (遊動円木) の端を吊り下げている静止平衡状態について，座標値を用いて束縛条件が記述され，それが座標値間の関係式を導くが，関係式が陰関数表現となるため厳密な扱いは面倒になる．この静止平衡状態の回りの振子運動は，糸と棒の成す鉛直面内で起こる “mode 1” とそれとは垂直な鉛直面内で起こる “mode 2” がある．mode 1 の振子運動が先行研究で注目されており前報[7]–[10] で論じた．mode 2 の解析は先の報告[11],[12] で扱ったのでここでは触れない．一方，教科書[13] では「2 本吊り」として，鉛直軸回りの棒の捩れ振動が扱われている．これは，上述の 2 つとは異種の “mode 3” である．この 2 点吊り振子の捩り振動は，円木の重心を通る鉛直軸を回転軸として，振子の上下移動による重力 potential energy の変化に起因して起こる．円木の長さと 2 点吊りの糸の間隔並びに糸の長さにより振動特性が変化する．

2　2 点吊り振子の鉛直軸まわりの捩れ振動

水平面上の O' 点と C 点 (距離 $2c$) に長さ L_1 と L_2 の糸の端を繋ぎ，他端を長さ $2a$ の棒の端点 A, B に繋いで，棒を鉛直面内で吊り下げ，鉛直軸回りに棒を捩れ振動させることができる (**Fig.1**)．O', A, B, C 点の位置を表すために，デカルト座標系 (x, y, z) の原点を O に取り，右向きに x 軸，鉛直下方に z 軸を取る．この鉛直面内に平面極座標系 (r, θ) を取り，O' 点を通る鉛直軸と糸 $O'A$ が成す角度を θ_1 とし，C 点を通る鉛直軸と糸 CB が成す角度を θ_2 と表すと，静止平衡状態で，各点の座標は次式で表される:

$$\begin{cases} O:(0,0)\,,\ O':(x_0,z_0)=(0,0)\,,\ C:(2c,0)\,, \\ A:(x_A,z_A)=(L_1\sin(\theta_1),L_1\cos(\theta_1))\,, \\ B:(x_B,z_B)=(2c+L_2\sin(\theta_2),L_2\cos(\theta_2)) \end{cases} \tag{2.1}$$

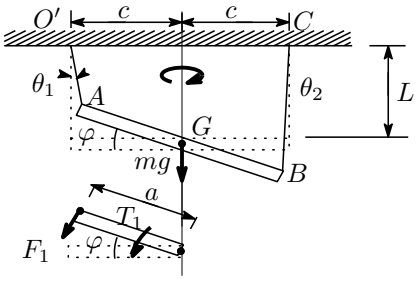

Fig.1 Torsional vibration of bifilar suspension pendulum.

この系の静止平衡状態は，糸の長さが等しく棒の配置が左右対称で $L_1 = L_2 = L, \theta_1 = \alpha, \theta_2 = 2\pi - \alpha$ (即ち，棒が水平で $z_A = z_B$) の場合で，次の幾何学的な関係式が成り立つ:

$$\begin{cases} L_1\cos(\theta_1) = L_2\cos(\theta_2) = L\cos(\alpha) = h, \\ L_1\sin(\theta_1) = -L_2\sin(\theta_2) = c - a, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$a = c - L\sin(\alpha) \tag{2.3}$$

これにより，系の静止平衡状態は $\beta \equiv c/a$ で特徴付けられる．さらに，この系の静止平衡状態は，糸の張力 S_1, S_2 と

[*1] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
[*2] 専攻科: Advanced Engineering Course.
[*3] 総合情報センター: Information Technology Center.

棒の重力による力の釣り合いで与えられる:

$$\begin{cases} S_1\sin(\alpha)+S_2\sin(2\pi-\alpha)=0\to S_1=S_2, \\ S_1\cos(\alpha)+S_2\cos(2\pi-\alpha)=mg \\ \quad\to\ 2S_1\cos(\alpha)=mg \end{cases} \tag{2.4}$$

棒が一様な線密度分布 ρ を持つとすると，棒の質量は $m=2a\rho$ であり，重心 G の位置 (x_G,y_G,z_G) は，棒の中央になるから，次のように表される:

$$x_G=(x_A+x_B)/2,\ \ y_G=0,\ \ z_G=(z_A+z_B)/2 \tag{2.5}$$

これらは θ_1,θ_2 の関数で，$L_1=L_2=L$ のとき棒の配置は重心回りに回転対称であり，$\theta_1=2\pi-\theta_2=\theta$ を得る．

この平衡状態から棒が捩れ振動する．鉛直面内の平面極座標系と共に，重心を含む水平面内に取った平面極座標系 (r,φ) (重心を通る鉛直軸を中心軸とする円柱座標 (r,φ,z)) を用いる．この場合は棒の重心の並進運動は，水平面内には生じず，高さ方向 (z 方向) に $z_G=L\cos(\theta)$ と表され，重心の位置 (x_G,y_G,z_G) は次式で表される:

$$(x_G,\ y_G,\ z_G)=(c,\ 0,\ L\cos(\theta)) \tag{2.6}$$

棒の重心を通る鉛直軸回りの回転運動 (捩れ運動) は，角度 φ で記述される．重心回りの棒の慣性 moment J は $J=2\rho a^3/3=ma^2/3$ と求められるので，回転の運動 energy は $J\dot\varphi^2/2$ となる．ここで，重心回りに捩れた棒を上から観ると (**Fig.1**)，線分 $O'A$, AG, GO' が成す三角形に対する余弦定理が次式で表され，θ は φ の関数で表される:

$$L\sin(\theta)=\sqrt{c^2+a^2-2ca\cos(\varphi)} \tag{2.7}$$

これは，θ $(0\le\theta\le\pi/2)$ と φ $(-\pi/2\le\varphi\le-\pi/2)$ の間の関係を与える．$-\pi/2\le\theta\le0$ の場合，根号の前に負号を付ける．(2.7), (2.6) 式を考慮して，重心回りの棒の捩れ運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は，運動 energy K，重力 potential energy U を用いて，次のように表される:

$$\begin{cases} \mathcal{L}=K-U,\ \ E=K+U, \\ K=\dfrac{m}{2}\dot z_G^2+\dfrac{J}{2}\dot\varphi^2=\dfrac{m}{2}L^2\left(\dfrac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\dfrac{J}{2}\dot\varphi^2 \\ =\dfrac{m}{2}\dfrac{\dot\varphi^2a^2c^2\sin^2(\varphi)}{L^2-(c^2+a^2-2ca\cos(\varphi))}+\dfrac{J}{2}\dot\varphi^2, \\ U=-mgz_G=-mgL\cos(\theta) \\ =-mg\sqrt{L^2-(c^2+a^2-2ca\cos(\varphi))} \end{cases} \tag{2.8}$$

よって，(2.8) 式では 1 自由度の運動が φ で記述される．ここでは，運動 energy に上下並進運動 (z 方向) と回転運動 (φ 方向) を考慮した．しかし，通常の線形理論では上下の並進運動を無視して扱うので，回転運動と重力 potential energy で構成される次の系を考える:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1=K_1-U,\ \ E_1=K_1+U,\ \ K_1=\dfrac{J}{2}\dot\varphi^2, \\ U=-mgz_G=-mgL\cos(\theta) \\ =-mg\sqrt{L^2-(c^2+a^2-2ca\cos(\varphi))} \end{cases} \tag{2.9}$$

ここで，potential energy U を静止平衡状態の回りで展開して 2 次まで取ると，線形理論の運動方程式が導かれることが次の小節に示される．

2.1 静止平衡状態の回りの微小振動

先に求めた静止平衡状態 $(\theta_1,\theta_2,\varphi)=(\alpha,2\pi-\alpha,0)$ に撹乱 $(\theta_{11},\theta_{21},\varphi_1)$ を加え，静止平衡状態の回りで (2.7) 式を Taylor 展開し，撹乱に対する 2 次の量まで求めると次の関係式が導かれる:

$$\begin{aligned} L^2\sin^2(\theta)&=c^2+a^2-2ca\cos(\varphi)\sim(c-a)^2+ca\varphi^2 \\ &=L^2\sin^2(\alpha)+ca\varphi^2, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$L\cos\theta\sim L\cos(\alpha)-\frac{ca\varphi^2}{2L\cos(\alpha)} \tag{2.11}$$

これにより，Lagrange 関数は次式で近似できる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}&=\frac{m}{2}\dot z_G^2+\frac{J}{2}\dot\varphi^2+mgz_G \\ &\sim\frac{J}{2}\dot\varphi^2+mg\left(L\cos(\alpha)-\frac{ca\varphi^2}{2L\cos(\alpha)}\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

この $\mathcal{L}$ から運動方程式が導かれる:

$$J\ddot\varphi=-\frac{mgca}{L\cos(\alpha)}\varphi\ \ \to\ \ \ddot\varphi=-\frac{3gc}{aL\cos(\alpha)}\varphi \tag{2.13}$$

この運動方程式は，教科書[13] の p.39 の例題の解答と一致している．固有角振動数は $\omega_0^2=mgca/(JL\cos(\alpha))=3gc/(aL\cos(\alpha))$ である (付録の図を参照されたい).

2.2 力学的 energy 保存則

力学的 energy 保存則 (2.8), (2.9) により，静止平衡状態の parameter $\beta=c/a$ を与えて，位相面 $(\varphi,\dot\varphi)$ に等 energy 線図を描き，運動の特徴を厳密に調べる．$\beta=0.5$ について，(2.8) 式の E を **Fig.2a** に，(2.9) 式の E_1 を **Fig.2b** に示す．一番内側の曲線が $E=-0.866$, $E_1=-0.866$ を表し，中央から離れた曲線は正の力学的 energy を持つ．$\beta=1$ について，E を **Fig.3a** に，E_1 を **Fig.3b** に示す．いずれの場合にも，非線形振動領域では，z 方向の並進運動 energy の効果が大きいことが示されている．

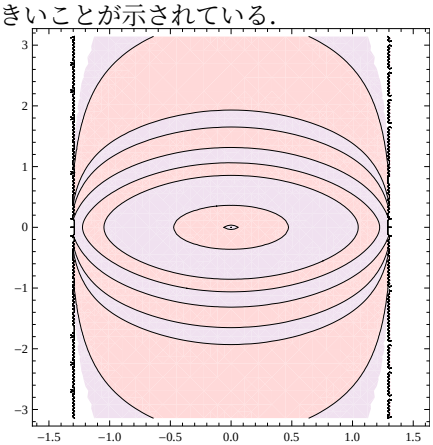

Fig.2a Contour plot of $E=-0.866$ (center), -0.865, -0.8, -0.5, -0.3, 0, 0.5, 1, 5 (outside) in $(\varphi,\dot\varphi)$ plane ($-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$ and $-\pi/2\le\dot\varphi\le\pi/2$). $\beta=0.5$.

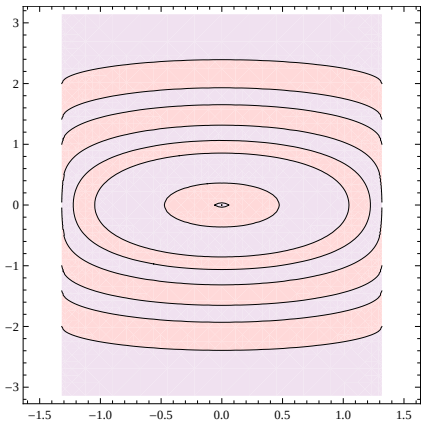

Fig.2b Contour plot of $E_1 = -0.866$ (center), -0.865, -0.8, -0.5, -0.3, 0, 0.5, 1, 2 (outside) in $(\varphi, \dot{\varphi})$ plane ($-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$ and $-\pi/2 \le \dot{\varphi} \le \pi/2$). $\beta = 0.5$.

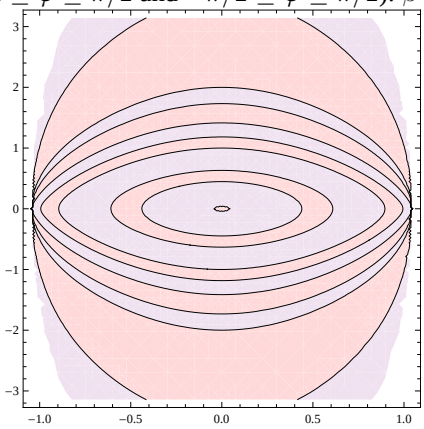

Fig.3a Contour plot of $E = -0.999$ (center), -0.9, -0.8, -0.5, -0.3, 0, 0.5, 1, 5 (outside) in $(\varphi, \dot{\varphi})$ plane ($-\pi/3 \le \varphi \le \pi/3$ and $-\pi/2 \le \dot{\varphi} \le \pi/2$). $\beta = 1$.

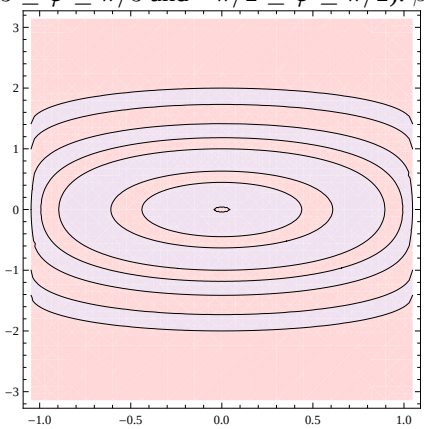

Fig.3b Contour plot of $E_1 = -0.999$ (center), -0.9, -0.8, -0.5, -0.3, 0, 0.5, 1, 5 (outside) in $(\varphi, \dot{\varphi})$ plane ($-\pi/3 \le \varphi \le \pi/2$ and $-\pi/2 \le \dot{\varphi} \le \pi/2$). $\beta = 1$.

次に，$\beta = 1.5$ について，E を **Fig.4a** に，E_1 を **Fig.4b** に示す．その曲線形状は $\beta = 0.5$ の結果 (**Fig.2a**, **2b**) と似ているが，energy level は異なることに注意されたい．重力 potential energy は β に依存しており，その差異は **Fig.5** に示される．(2.8), (2.9) 式で見たように，運動 energy が異なるので，力学的 energy の値の差は運動方程式の解の時間発展に影響すると予想される．このことを具体的に調べたので，(2.8), (2.9) 式の数値解析結果を 3, 4 節に示す．

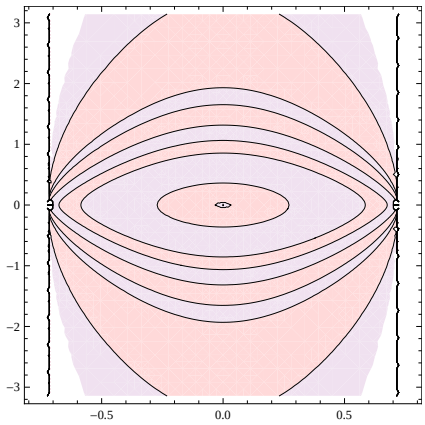

Fig.4a Contour plot of $E = -0.866$ (center), -0.865, -0.8, -0.5, -0.3, 0, 0.5, 1, 5 (outside) in $(\varphi, \dot{\varphi})$ plane ($-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$ and $-\pi/2 \le \dot{\varphi} \le \pi/2$). $\beta = 1.5$.

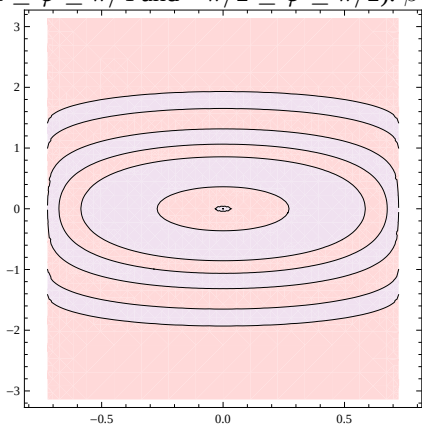

Fig.4b Contour plot of $E_1 = -0.866$ (center), -0.865, -0.8, -0.5, -0.3, 0, 0.5, 1, 2 (outside) in $(\varphi, \dot{\varphi})$ plane ($-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$ and $-\pi/2 \le \dot{\varphi} \le \pi/2$). $\beta = 1.5$.

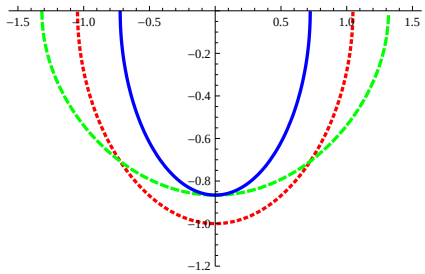

Fig.5 Potential energy U versus φ. The solid line for $\beta = 1.5$ is in $-0.722734 \le \varphi \le 0.722734$, the dashed line for $\beta = 0.5$ is in $-1.31812 \le \varphi \le 1.31812$ in $t_s \le t \le t_e$, and the dotted line for $\beta = 1$ is in $-1.0472 \le \varphi \le 1.0472$.

3　厳密 model (2.9) 式の数値計算

Lagrange 関数 (2.9) により，Lagrange の運動方程式は次のように表される:

$$J\ddot{\varphi} + \frac{macg\sin(\varphi)}{\sqrt{L^2 - (a^2 + c^2 - 2ac\cos(\varphi))}} = 0 \qquad (3.1)$$

初期値は $\dot{\varphi}(0) = 0$ として，$\varphi(0)$ は各場合ごとに **Fig.5** の重力 potential energy 値の有効範囲内の角度に設定する．計算時間 $t_s \le t \le t_e$ ($t_s = 0$, $t_e = 2\pi \times 12$) で (3.1) 式を数値解析し，その結果を以下に表示している．

$\beta = 0.5$, $\varphi(0) = 1$ の場合の数値計算結果を **Fig.6a-6c** に示す.

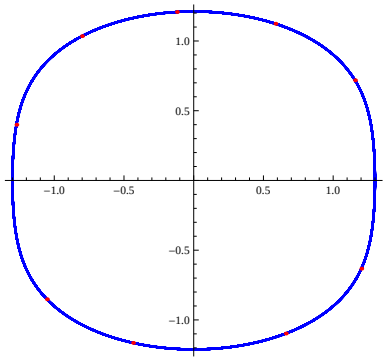

Fig.6a Phase portrait of $(\varphi, \dot{\varphi})$ in $t_s \le t \le t_e$.

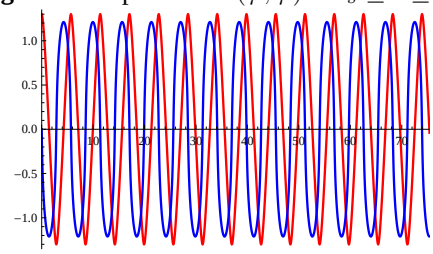

Fig.6b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $t_s \le t \le t_e$.

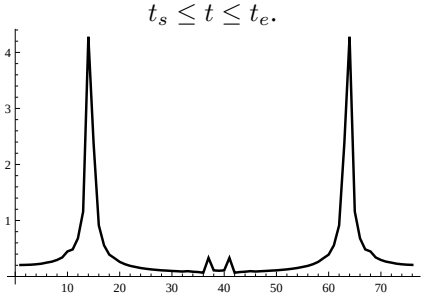

Fig.6c Spectrum of $\varphi(t)$ in $t_s \le t \le t_e$.

初期値を $\varphi(0) = 0.7$ に変えて，$\beta = 1.5$ の場合の数値計算結果を **Fig.7a-7c** に示す.

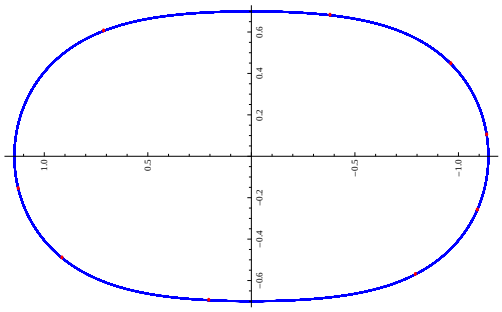

Fig.7a Phase portrait of $(\varphi, \dot{\varphi})$ in $t_s \le t \le t_e$. The figure is rotated by 90°.

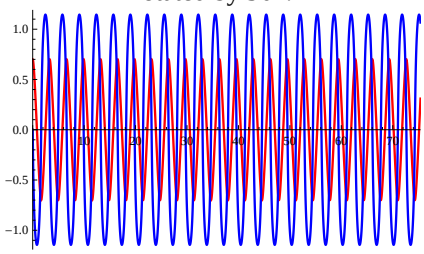

Fig.7b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $t_s \le t \le t_e$.

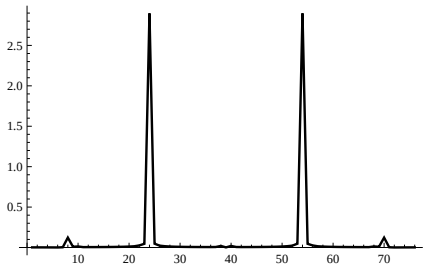

Fig.7c Spectrum of $\varphi(t)$ in $t_s \le t \le t_e$.

$\beta = 1.01$, $\varphi(0) = 1$ の場合の数値計算結果を **Fig.8a-8c** に示す.

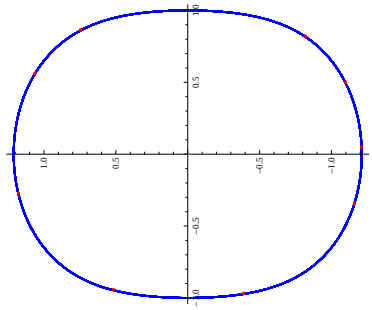

Fig.8a Phase portrait of $(\varphi, \dot{\varphi})$ in $t_s \le t \le t_e$. The figure is rotated by 90°.

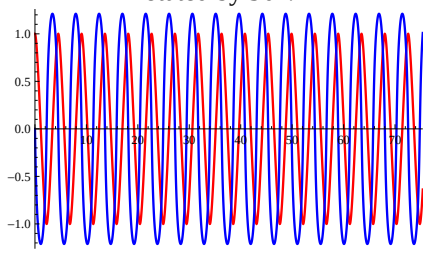

Fig.8b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $t_s \le t \le t_e$.

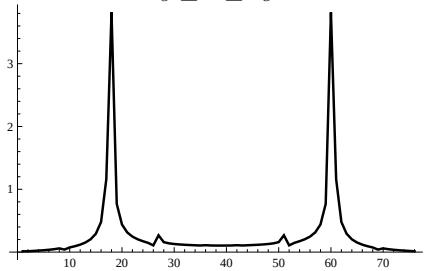

Fig.8c Spectrum of $\varphi(t)$ in $t_s \le t \le t_e$.

4 厳密 model (2.8) 式の数値計算

上下の並進運動を考慮する．Lagrange 関数 (2.8) により，Lagrange の運動方程式は次のように表される:

$$\begin{aligned}
&\frac{mgac\sin(\varphi)}{\sqrt{L^2 - a^2 - c^2 + 2ac\cos(\varphi)}} \\
&+ \frac{2\left(L^2 - a^2 - c^2\right)\cos(\varphi) + ac(3 + \cos(2\varphi))}{2\left(L^2 - a^2 - c^2 + 2ac\cos(\varphi)\right)^2} \\
&\times ma^2c^2\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 \\
&+ \left[J + \frac{a^2c^2m\left(1 - \cos(2\varphi)\right)}{2\left(L^2 - a^2 - c^2 + 2ac\cos(\varphi)\right)}\right]\ddot{\varphi} = 0 \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

初期値は $\dot{\varphi}(0) = 0$ として，$\varphi(0)$ は各場合ごとに **Fig.5** の重力 potential energy 値の有効範囲内の角度に設定する.

計算時間 $t_s \leq t \leq t_e$ ($t_s = 0, t_e = 2\pi \times 12$) で (4.1) 式を数値解析し，その結果を以下に表示している．

$\beta = 0.5, \varphi(0) = 1.3$ の場合の数値計算結果を **Fig.9a-9c** に示す．

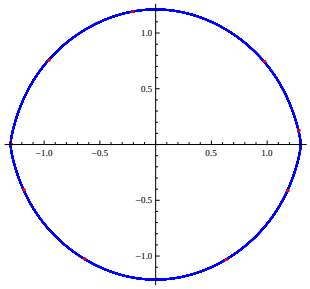

Fig.9a Phase portrait of $(\varphi, \dot{\varphi})$ in $t_s \leq t \leq t_e$.

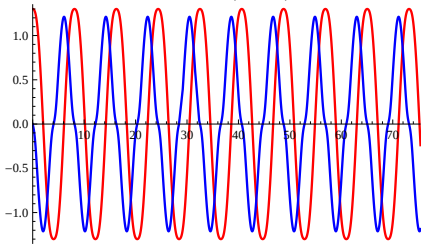

Fig.9b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $t_s \leq t \leq t_e$.

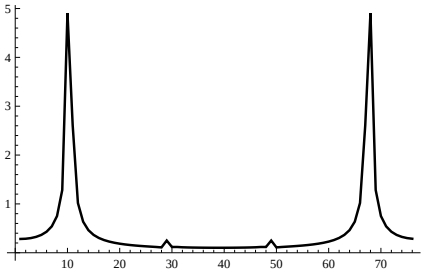

Fig.9c Spectrum of $\varphi(t)$ in $t_s \leq t \leq t_e$.

初期値を $\varphi(0) = 0.7$ に変えて，$\beta = 1.5$ の場合の数値計算結果を **Fig.10a-10c** に示す．

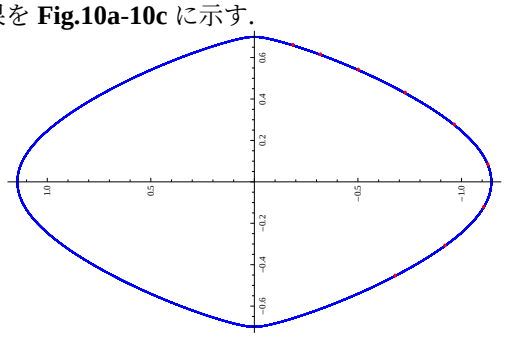

Fig.10a Phase portrait of $(\varphi, \dot{\varphi})$ in $t_s \leq t \leq t_e$. The figure is rotated by 90°.

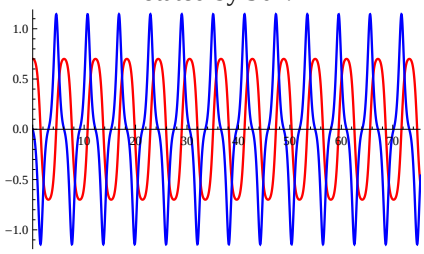

Fig.10b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $t_s \leq t \leq t_e$.

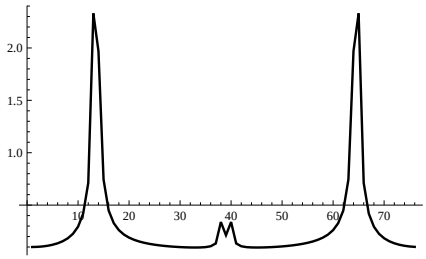

Fig.10c Spectrum of $\varphi(t)$ in $t_s \leq t \leq t_e$.

$\beta = 1.01, \varphi(0) = 1$ の場合の数値計算結果を **Fig.11a-11c** に示す．

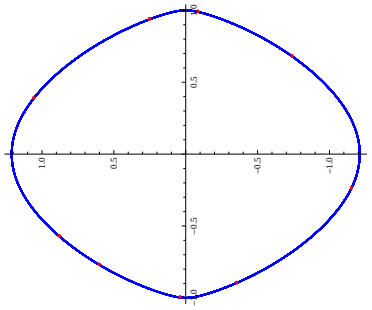

Fig.11a Phase portrait of $(\varphi, \dot{\varphi})$ in $t_s \leq t \leq t_e$. The figure is rotated by 90°.

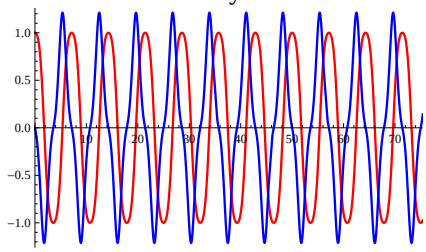

Fig.11b Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $t_s \leq t \leq t_e$.

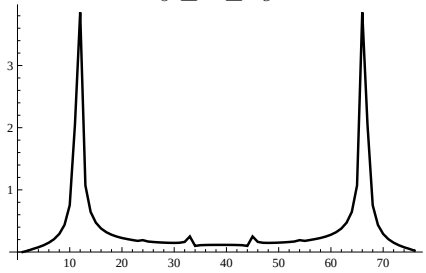

Fig.11c Spectrum of $\varphi(t)$ in $t_s \leq t \leq t_e$.

5　おわりに

本報告では，対称 2 点吊り振子の捩れ振動の自由振動を解析し，位相面に運動の特徴を厳密に示し，非線形振動を数値解析した．この問題は，教科書[13] に線形問題が解説されており，仮想仕事の原理に基づく重力による仕事の評価が演習問題[14] として取り上げられている．しかし，詳しい解析・解説例は著者等の文献調査では見当たらなかった．ここに，Lagrange 関数に基づき力学的 energy 保存則を用いて系の運動特性を厳密且つ具体的に解説し，3, 4 節では 2 つの場合の運動方程式を導出して数値解析を行って振動現象を解明し，力学教材の高度化を実現したことは意義深いと思われる．この系に周期的外力を考慮した場合の数値解析を次報[15] で扱い，さらに壁面からの励振に対す

る系の振動解析の報告[16] を行う．また，これらの解析結果の工学への展開や応用が期待される．

本研究遂行にあたり，本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して，柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] 望月 孔二，舟田 敏雄，石本 拓也, 鈴木 健宏, 鈴木 寛里: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 42 号 (2008), pp.57-66.

[2] 津川 昭良: “紐に吊された 2 振子の連成振動のラプラス変換法による解法と工学教育への応用” 山形大学紀要. 工学 15(1), pp.201-213.

[3] M. R. Jardin: “Optimized Measurements of UAV Mass Moment of Inertia with a Bifilar Pendulum” Matt R. Jardin AIAA 2007-6822 AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit 20 - 23 August 2007, Hilton Head, South Carolina http://www.et.byu.edu/groups/ece490quad/structure/jardin_inertia_07.pdf

[4] P. Doherty: “Pendulum Snake: From order to chaos and back again” in Scientific Explorations And Adventures http://www.exo.net/~ pauld/activities/pendulums/pendulumsnake.html

[5] M. R. Matthews, C. F. Gauld, & A. Stinner: “The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspectives” Springer (2005).

[6] L.D. Akulenko: “Optimal control of motions of a bifilar pendulum” *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **68** (2004), pp.707-717.

[7] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (3): 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.63-70.

[8] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の基礎運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[9] 川上 誠，舟田 敏雄，マズニ アル イルファン，佐々木 隆吾，川船 雄一郎，中道 義之，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の非線形振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[10] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[11] 舟田 敏雄，田代 直人，園田 泰之，前原 貴憲，川上 誠，齋藤 学，小山 雅弘，村田 裕也，今村 昌幸，藤田 邦彦: “Computational Fluid Dyanamics への指向” 沼津高専研究報告 第 39 号（2004), pp.31-40.

[12] 舟田 敏雄，田代 直人，園田 泰之，藤田 邦彦，齋藤 学，小山 雅弘，村田 裕也，今村 昌幸: “技術者教育のための工学数理の力学教材の改定 — ブランコの運動と Mathieu 方程式 —” 沼津高専研究報告 第 40 号 (2005), pp.23-32.

[13] 小出 昭一郎: “解析力学” 岩波書店，1983.

[14] 山内恭彦，末岡清市 編，山内恭彦・末岡清市・佐藤正千代・田辺行人 執筆: “大学演習 力学” 裳華房，1957 年 10 月，ISBN978-4-7853-8011-3 (旧 ISBN4-7853-8011-X).

[15] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，中道 義之: “2 点吊り振子の捩り振動の強制振動の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[16] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，中道 義之: “2 点吊り振子の捩り振動のパラメトリック励振の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

付録 A　線形固有角振動数

(2.13) 式より，線形振動の固有角振動数 ω_0 は次式で与えられる:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgca}{JL\cos(\alpha)}} \qquad \text{(付録 A.1)}$$

一様な棒の場合の慣性 moment は $J = ma^2/3$ であるが，それと比較するために $J = ma^2/5$ と $J = ma^2$ とおいて (付録 A.1) 式の値を計算して，それら結果を **Fig.A1** に示す．β $(0 \le \beta \le 2)$ の値により，固有角振動数の値が大きく変化することが分かる．この固有角振動数の値の β による変化は，厳密 model (2.9) 式の非線形振動の計算結果の **Fig.6-8** においても同様な傾向が見られる，さらに，厳密 model (2.8) 式の計算結果の **Fig.9-11** においても同様な傾向が確認できる，なお，ほかにも L, a 等の値を変化させても固有角振動数を変化させることができる．

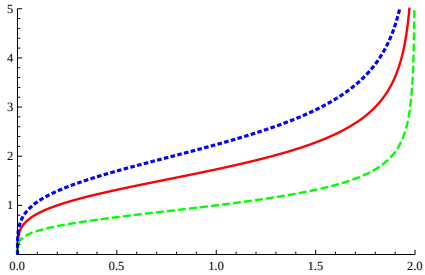

Fig.A1 Eigen angular frequency ω_0 versus β $(0 \le \beta \le 2)$ for three values of J: $J = ma^2/3$ (solid line), $J = ma^2/5$ (dotted line, above) and $J = ma^2$ (dashed line, below). The characteristic values of the torsional oscillation are taken as $m = 1$, $g = 1$, $L = a = 1$ and $\beta = c/a$.