2 点吊り物理振子の振動解析: 弾性紐の効果

木ノ内 智貴[*1] 舟田 敏雄[*1] 桜井 賢人[*1] 大庭 勝久[*1] 青木 悠祐[*1] 宮内 太積[*2] 望月 孔二[*3]

An Analysis of Mode Coupling in Three Modes of Bifilar Suspension Physical-Pendulum: Effects of Elastic Strings

Toshiki KINOUCHI[*1] Toshio FUNADA[*1] Kento SAKURAI[*1] Katsuhisa OHBA[*1] Yusuke AOKI[*1] Tatsumi MIYAUCHI[*2] and Kouji MOCHIZUKI[*3]

Abstract: A bifilar suspension pendulum with a uniform density bar may swing in two vertical planes as mode 1 and 2 or make torsional oscillation (mode 3) about a vertical axis. The period and pattern of oscillation depend upon the ratios of the string length and of the distance of the supporting points to the distance between two end points of the strings attached to an upper wall. When a cuboid (wooden chip) is used in place of the bar, another effect due to elastic strings is found in experiments, so a new model spring-pendulum is proposed here to clarify mechanical effects in numerical simulation.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Elasticity of Strings, Nonlinear Coupling of Oscillation Modes

1 はじめに

対称 2 点吊り振子 (並進振子) を免震床に応用するための検討[1] に刺激されて, 2 点吊り振子の静止平衡状態周りの振子運動について，運動方程式を導出して初期値問題を数値解析し，実験した (**Fig.1**, **Table 1**, **Fig.2**)[2]–[7]．その振子運動には，紐と円木の成す鉛直面内で揺れる “mode 1 (遊動円木 mode)” とそれとは垂直な鉛直面内で揺れる “mode 2 (ブランコ mode)” があり，鉛直軸回りの円木の捩れ振動は “mode 3 (捩れ振動 mode)” に分類される．

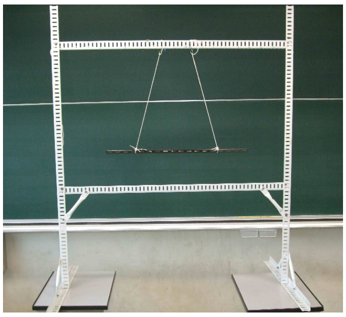

Fig.1 Experimental apparatus for the bifilar suspension pendulum with a bar of $m_1 = 0.6659$ kg and length $2b = 0.899$ m in $a > c$. When $a = c$, the bar swings horizontally as a part of parallelogram.

Table 1 Specification of the apparatus (**Fig.1**), a bar of length $2b$ and $m = 0.6659$ kg suspended by two ropes of length L at two points which are distant by a from the center.

a [m]	0.26	b [m]	0.4495
c [m]	0.0875, 0.1625, 0.2375, 0.3125, 0.3875, 0.4625, 0.5375		
L [m]	0.443, 0.542, 0.648		

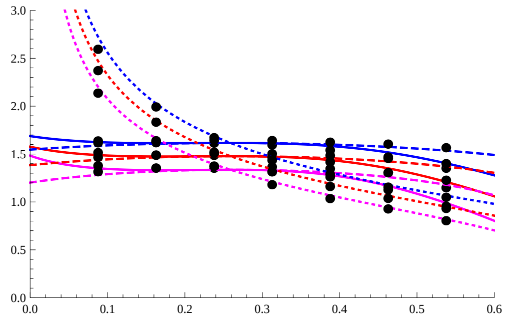

Fig.2 Period T versus c for mode 1 (solid line), 2 (dashed), 3 (dotted). $L = 0.443$ (below), $L = 0.542$ (middle), and $L = 0.648$ (above). Marks are (c, T_e) for experimental T_e. Cross points show coupling/resonance between the modes.

棒を木片 (直方体) に換えた実験装置 (**Fig.3**) で測定された周期は **Fig.4** の点で示され，別報[8],[9] で求められた理論曲線 (**Fig.4** の曲線) とよく一致している．

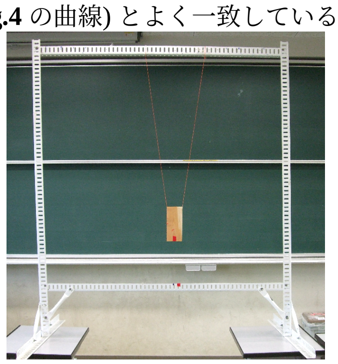

Fig.3 Experimental apparatus for the bifilar suspension pendulum with a cuboid of size L_a, b_a and d_a. The attachment of the cuboid to the strings may change its moment of inertia, and then the elasticity of strings gives rise to various oscillations, as a new spring-pendulum.

[*1] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
[*2] 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.
[*3] 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.

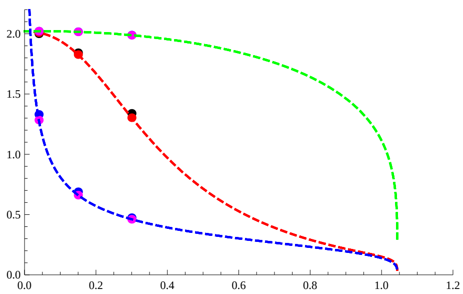

Fig.4 Experimental period versus c (half distance of the attached points at the upper wall). Mode 1 is red curve, node 2 is green one and mode 3 is blue one, for $L = 1$, $a = 0.044$, $b_a = 0.088$, $L_a = 0.029$ and $d_a = 0.03$.

直方体では質量中心の位置と慣性 moment の値が棒の場合とは異なるが，振動 mode 自体は同じものである．しかし，直方体 (**Fig.4**) では 棒 (**Fig.2**) の場合と比べ，各振動 mode の周期の c_1 に対する変化率が大きく，高調波/分数調波での非線形連成振動が起こり易いと言えよう．

また，木片の実験条件を様々に変化させると，mode 1, 2, 3 の連成振動が起こる場合または紐の伸縮による弾性的効果が木片の運動に関与する場合等，棒の 2 点吊り振子とは異なる現象が見出された．紐を線形バネとすると，静止状態で紐が鉛直となる並進振子 ($c = a$) の場合を除き，紐が斜めに配置される場合 ($a \neq c$) には線形バネは幾何学的非線形効果を伴う．この問題に対し，著者らの知る範囲では過去に報告[10] があるのみで，その線形振動の研究以降に未だ報告例がない．そこで，2 点吊り振子の理論 model[11]–[15] に基づき，本報告では 2 点吊り振子に紐の弾性効果を考慮した理論 model を提案する．元の model からの拡張部分と新たな理論構成部分があり，別報[13] を (I) として本報告の model と比較し解説する．

2　紐の弾性効果による 2 点吊り振子の 3 つの振動 mode

水平右手方向に x 軸，水平手前方向に y 軸，鉛直下方向に z 軸とするデカルト座標系 (x, y, z) を用いて，(I) と同様に，水平な上壁面上の C_1 点を起点に 2 点吊り振子の配置を記述する．また，球座標系を併用し，座標原点は適宜取るものとする．C_1 点を (x_0, y_0, z_0) と設置し，間隔 c_1 で，O 点 $(x_0 + c_1, y_0, z_0)$, C_2 点 $(x_0 + 2c_1, y_0, z_0)$ を取る．遊動円木の中央 (質量中心) を G 点 (x_g, y_g, z_g) とし，O 点から間隔 a_1 で，遊動円木上の左の紐の結び目位置を A_1 点 (x_1, y_1, z_1)，右の紐の結び目位置を A_2 点 (x_2, y_2, z_2) と表す．これらにより，各点間の長さ (距離) は $\overline{A_1A_2} = 2a_1$, $\overline{A_1G} = a_1$, $\overline{GA_2} = a_1$, $\overline{A_1C_1} = L_1$, $\overline{A_2C_2} = L_2$, $\overline{OG} = r_g$ と表される．回転角をデカルト座標系の軸回りに取って軸名の添え字を付け，O 点を原点とする球座標系 (r, θ_y, θ_z) を用い，z-x 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_{yg}，y-z 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_{xg} を取り，G 点の座標 (x_g, y_g, z_g) は次式で表される:

$$\begin{cases} x_g = r_g \sin(\theta_{yg}) + x_0 + c_1, \\ y_g = r_g \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{xg}) + y_0, \\ z_g = r_g \cos(\theta_{yg}) \cos(\theta_{xg}) + z_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

また，G 点を原点とする球座標系を用いて，z-x 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_y，x-y 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_z を取り，A_1 点の座標 (x_1, y_1, z_1) と A_2 点の座標 (x_2, y_2, z_2) は次式で表され，(2.4) 式が導かれる:

$$\begin{cases} x_1 = x_g - a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z), \\ y_1 = y_g - a_1 \cos(\theta_y) \sin(\theta_z), \\ z_1 = z_g + a_1 \sin(\theta_y), \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_g + a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z), \\ y_2 = y_g + a_1 \cos(\theta_y) \sin(\theta_z), \\ z_2 = z_g - a_1 \sin(\theta_y), \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} f_{00} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - 4a_1^2 = 0, \\ f_{01} = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - L_1^2 = 0, \\ f_{02} = (x_2 - x_0 - 2c_1)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2 \\ -L_2^2 = 0, \\ L_{1x} = \surd\left(a_1^2 + c_1^2 - 2a_1c_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z) + r_g^2\right. \\ +2r_g \left(a_1 \cos(\theta_{xg}) \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_y)\right. \\ +(c_1 - a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z)) \sin(\theta_{yg}) \\ \left.\left.-a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{xg}) \sin(\theta_z)\right)\right), \\ L_{2x} = \surd\left(a_1^2 + c_1^2 - 2a_1c_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z) + r_g^2\right. \\ -2r_g \left(a_1 \cos(\theta_{xg}) \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_y)\right. \\ +(c_1 - a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z)) \sin(\theta_{yg}) \\ \left.\left.-a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{xg}) \sin(\theta_z)\right)\right), \\ f_{03} = -\dfrac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} = \sec(\theta_z) \tan(\theta_y), \\ f_{04} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan(\theta_z), \\ f_{05} = \dfrac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1} = -\csc(\theta_z) \tan(\theta_y) \end{cases} \tag{2.4}$$

上式より $f_{01} = 0$ から右側の紐の長さ $L_{1x} = L_1$, $f_{02} = 0$ から左側の紐の長さ $L_{2x} = L_2$ が得られるが，それらでは運動方程式の表式が著しく複雑になる．そこで，

$$\begin{cases} L_{1x} \equiv L_{1x}(r_g, \theta_{yg}, \theta_{xg}, \theta_y, \theta_z), \\ L_{2x} \equiv L_{2x}(r_g, \theta_{yg}, \theta_{xg}, \theta_y, \theta_z) \end{cases} \tag{2.5}$$

と表記して，右辺の表式により変数の依存性を示すので，$L_{1x}^{(i,j,k,l,m)} = \partial^{i+j+k+l+m} L_{1x} / \partial r_g^i \partial\theta_{yg}^j \partial\theta_{xg}^k \partial\theta_y^l \partial\theta_z^m$ と偏微分係数が表わされるから，注意する．

この系の運動は，棒 (または直方体) の質量中心の並進運動 energy，重力 potential energy，質量中心回りの回転運動 energy，2 つのバネの弾性 energy で構成されるので，Lagrange 関数 $\mathcal{L}_{11}$ は次式となる:

$$\mathcal{L}_{11} = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2\right) + \frac{J_y}{2}\dot{\theta}_y^2 + \frac{J_z}{2}\dot{\theta}_z^2 \cos^2(\theta_y)$$
$$+ m_1 g z_g - \frac{k_1}{2}\left(L_{1x} - L_{10x}\right)^2 - \frac{k_2}{2}\left(L_{2x} - L_{20x}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m_1}{2}\dot{r}_g^2 + \frac{m_1}{2}r_g^2\left(\dot{\theta}_{yg}^2 + \cos^2(\theta_{yg})\dot{\theta}_{xg}^2\right) + \frac{J_y}{2}\dot{\theta}_y^2 + \frac{J_z}{2}\dot{\theta}_z^2\cos^2(\theta_y) \\
&+ m_1\dot{r}_g\left[\dot{x}_0\sin(\theta_{yg}) + \cos(\theta_{yg})(\dot{y}_0\sin(\theta_{xg}) + \dot{z}_0\cos(\theta_{xg}))\right] \\
&+ m_1 r_g\Big[\dot{\theta}_{xg}\cos(\theta_{yg})\left(\dot{y}_0\cos(\theta_{xg}) - \dot{z}_0\sin(\theta_{xg})\right) \\
&-\dot{\theta}_{yg}\sin(\theta_{yg})\left(\dot{y}_0\sin(\theta_{xg}) + \dot{z}_0\cos(\theta_{xg})\right)\Big] \\
&+ \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2\right) + m_1 g(r_g\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg}) + z_0) \\
&- \frac{1}{2}k_1\left(L_{1x} - L_{10x}\right)^2 - \frac{1}{2}k_2\left(L_{2x} - L_{20x}\right)^2 \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

これにより，5 つの運動方程式が導かれる: r_g の運動方程式

$$
\begin{aligned}
&m_1\Big(\ddot{r}_g - \cos(\theta_{yg})^2 r_g\dot{\theta}_{xg}^2 - r_g\dot{\theta}_{yg}^2 + \sin(\theta_{yg})\ddot{x}_0 \\
&+\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{xg})\ddot{y}_0 + \cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg})\ddot{z}_0\Big) \\
&- m_1 g\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg}) + k_1\left(L_{1x} - L_{10x}\right)L_{1x}^{(1,0,0,0,0)} \\
&+ k_2\left(L_{2x} - L_{20x}\right)L_{2x}^{(1,0,0,0,0)} = 0, \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

θ_{yg} の運動方程式

$$
\begin{aligned}
&m_1\Big(\cos(\theta_{yg})r_g^2\sin(\theta_{yg})\dot{\theta}_{xg}^2 + 2r_g\dot{r}_g\dot{\theta}_{yg} \\
&+\cos(\theta_{yg})r_g\ddot{x}_0 - r_g\sin(\theta_{xg})\sin(\theta_{yg})\ddot{y}_0 \\
&-\cos(\theta_{xg})r_g\sin(\theta_{yg})\ddot{z}_0 + r_g^2\ddot{\theta}_{yg}\Big) \\
&+ m_1 g\cos(\theta_{xg})r_g\sin(\theta_{yg}) + k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,1,0,0,0)} \\
&+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,1,0,0,0)} = 0, \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

θ_{xg} の運動方程式

$$
\begin{aligned}
&m_1\Big(r_g^2\cos(\theta_{yg})^2\ddot{\theta}_{xg} + 2r_g\dot{r}_g\dot{\theta}_{xg}\cos(\theta_{yg})^2 \\
&-2r_g^2\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_{yg}\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{yg}) \\
&+r_g\ddot{y}_0\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg}) \\
&-r_g\ddot{z}_0\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{xg})) \\
&+ m_1 r_g g\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{xg}) \\
&+ k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,0,1,0,0)} \\
&+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,0,1,0,0)} = 0, \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

θ_z の運動方程式

$$
\begin{aligned}
&J_z\ddot{\theta}_z + k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,0,0,0,1)} \\
&+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,0,0,0,1)} = 0, \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

θ_y の運動方程式

$$
\begin{aligned}
&J_y\ddot{\theta}_y + k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,0,0,1,0)} \\
&+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,0,0,1,0)} = 0 \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

$x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ の場合，自律系の運動方程式は，$r_g, \theta_{yg}, \theta_{xg}, \theta_z, \theta_y$ について，次のように表される:

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{r}_g - m_1\cos(\theta_{yg})^2 r_g\dot{\theta}_{xg}^2 \\
&- m_1 r_g\dot{\theta}_{yg}^2 + +m_1\sin(\theta_{yg})\ddot{x}_0 \\
&+ m_1\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{xg})\ddot{y}_0 + m_1\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg})\ddot{z}_0 \\
&- m_1 g\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg}) + k_1\left(L_{1x} - L_{10x}\right)L_{1x}^{(1,0,0,0,0)} \\
&+ k_2\left(L_{2x} - L_{20x}\right)L_{2x}^{(1,0,0,0,0)} = 0, \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_1\cos(\theta_{yg})r_g^2\sin(\theta_{yg})\dot{\theta}_{xg}^2 \\
&+ 2m_1 r_g\dot{r}_g\dot{\theta}_{yg} + m_1\cos(\theta_{yg})r_g\ddot{x}_0 \\
&- m_1 r_g\sin(\theta_{xg})\sin(\theta_{yg})\ddot{y}_0 - m_1\cos(\theta_{xg})r_g\sin(\theta_{yg})\ddot{z}_0 \\
&+ m_1 r_g^2\ddot{\theta}_{yg} + g m_1\cos(\theta_{xg})r_g\sin(\theta_{yg}) \\
&+ k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,1,0,0,0)} \\
&+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,1,0,0,0)} = 0, \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_1\cos(\theta_{yg})^2 r_g^2\ddot{\theta}_{xg} + 2m_1 r_g\dot{r}_g\dot{\theta}_{xg}\cos(\theta_{yg})^2 \\
&- 2m_1 r_g^2\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_{yg}\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{yg}) \\
&+ m_1 r_g\ddot{y}_0\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg}) - m_1 r_g\ddot{z}_0\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{xg}) \\
&+ m_1 g\cos(\theta_{yg})r_g\sin(\theta_{xg}) \\
&+ k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,0,1,0,0)} \\
&+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,0,1,0,0)} = 0, \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&J_z\ddot{\theta}_z + k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,0,0,0,1)} \\
&+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,0,0,0,1)} = 0, \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&J_y\ddot{\theta}_y + k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,0,0,1,0)} \\
&+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,0,0,1,0)} = 0 \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

未知変数 θ_z に依存しない場合には，Lagrange 関数 (2.6) に $\theta_z = 0$ を代入して，次の 4 つの運動方程式が導かれる:

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{r}_g - m_1 r_g\dot{\theta}_{xg}^2\cos(\theta_{yg})^2 \\
&- m_1 r_g\dot{\theta}_{yg}^2 + m_1\sin(\theta_{yg})\ddot{x}_0 \\
&+ m_1\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{xg})\ddot{y}_0 + m_1\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg})\ddot{z}_0 \\
&- g m_1\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg}) + k_1\left(L_{1x} - L_{10x}\right)L_{1x}^{(1,0,0,0,0)} \\
&+ k_2\left(L_{2x} - L_{20x}\right)L_{2x}^{(1,0,0,0,0)} = 0, \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_1 r_g^2\ddot{\theta}_{yg} + m_1 r_g^2\dot{\theta}_{xg}^2\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{yg}) \\
&+ 2m_1 r_g\dot{r}_g\dot{\theta}_{yg} + m_1 r_g\ddot{x}_0\cos(\theta_{yg}) \\
&- m_1 r_g\ddot{y}_0\sin(\theta_{xg})\sin(\theta_{yg}) - m_1 r_g\ddot{z}_0\cos(\theta_{xg})\sin(\theta_{yg}) \\
&+ m_1 r_g g\cos(\theta_{xg})\sin(\theta_{yg}) + k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,1,0,0,0)} \\
&+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,1,0,0,0)} = 0, \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_1 r_g^2\ddot{\theta}_{xg}\cos(\theta_{yg})^2 + 2m_1 r_g\dot{r}_g\dot{\theta}_{xg}\cos(\theta_{yg})^2 \\
&- 2m_1 r_g^2\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_{yg}\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{yg}) \\
&+ m_1 r_g\ddot{y}_0\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg}) - m_1 r_g\ddot{z}_0\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{xg}) \\
&+ m_1 g\cos(\theta_{yg})r_g\sin(\theta_{xg}) + k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,0,1,0,0)} \\
&+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,0,1,0,0)} = 0, \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&J_y\ddot{\theta}_y + k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,0,0,1,0)} \\
&+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,0,0,1,0)} = 0 \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

未知変数 θ_{yg} に依存しない場合，同じく，次の 4 つの運動方程式となる:

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{r}_g - m_1 r_g\dot{\theta}_{xg}^2 + m_1\ddot{y}_0\sin(\theta_{xg}) \\
&+ m_1\ddot{z}_0\cos(\theta_{xg}) - m_1 r_g g\cos(\theta_{xg}) \\
&+ k_1\left(L_{1x} - L_{10x}\right)L_{1x}^{(1,0,0,0,0)}
\end{aligned}
$$

$$+ k_2 \left(L_{2x} - L_{20x}\right) L_{2x}^{(1,0,0,0,0)} = 0, \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} & m_1 r_g^2 \ddot{\theta}_{xg} + 2 m_1 r_g \dot{r}_g \dot{\theta}_{xg} \\ & + m_1 r_g \ddot{y}_0 \cos(\theta_{xg}) - m_1 r_g \ddot{z}_0 \sin(\theta_{xg}) \\ & + m_1 r_g g \sin(\theta_{xg}) + k_1 (L_{1x} - L_{10x}) L_{1x}^{(0,0,1,0,0)} \\ & + k_2 (L_{2x} - L_{20x}) L_{2x}^{(0,0,1,0,0)} = 0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} & J_z \ddot{\theta}_z + k_1 (L_{1x} - L_{10x}) L_{1x}^{(0,0,0,0,1)} \\ & + k_2 (L_{2x} - L_{20x}) L_{2x}^{(0,0,0,0,1)} = 0, \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} & J_y \ddot{\theta}_y + k_1 (L_{1x} - L_{10x}) L_{1x}^{(0,0,0,1,0)} \\ & + k_2 (L_{2x} - L_{20x}) L_{2x}^{(0,0,0,1,0)} = 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

未知変数 θ_{xg} に依存しない場合，同じく，次の 4 つの運動方程式となる:

$$\begin{aligned} & - g m_1 \cos(\theta_{yg}) - m_1 r_g \dot{\theta}_{yg}^2 + m_1 \ddot{r}_g + m_1 \sin(\theta_{yg}) \ddot{x}_0 \\ & + m_1 \cos(\theta_{yg}) \ddot{z}_0 + k_1 \left(L_{1x} - L_{10x}\right) L_{1x}^{(0,1,0,0,0)} \\ & + k_2 \left(L_{2x} - L_{20x}\right) L_{2x}^{(1,0,0,0,0)} = 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} & m_1 r_g^2 \ddot{\theta}_{yg} + 2 m_1 r_g \dot{r}_g \dot{\theta}_{yg} \\ & + m_1 \cos(\theta_{yg}) r_g \ddot{x}_0 - m_1 r_g \sin(\theta_{yg}) \ddot{z}_0 \\ & + g m_1 r_g \sin(\theta_{yg}) + k_1 (L_{1x} - L_{10x}) L_{1x}^{(0,1,0,0,0)} \\ & + k_2 (L_{2x} - L_{20x}) L_{2x}^{(0,1,0,0,0)} = 0, \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} & J_z \ddot{\theta}_z + k_1 (L_{1x} - L_{10x}) L_{1x}^{(0,0,0,0,1)} \\ & + k_2 (L_{2x} - L_{20x}) L_{2x}^{(0,0,0,0,1)} = 0, \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} & J_y \ddot{\theta}_y + k_1 (L_{1x} - L_{10x}) L_{1x}^{(0,0,0,1,0)} \\ & + k_2 (L_{2x} - L_{20x}) L_{2x}^{(0,0,0,1,0)} = 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

未知変数 θ_y に依存しない場合，同じく，次の 4 つの運動方程式となる:

$$\begin{aligned} & m_1 \ddot{r}_g + m_1 r_g \dot{\theta}_{yg}^2 - m_1 r_g \dot{\theta}_{xg}^2 \cos(\theta_{yg})^2 + m_1 \sin(\theta_{yg}) \ddot{x}_0 \\ & + m_1 \ddot{y}_0 \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{xg}) + m_1 \ddot{z}_0 \cos(\theta_{xg}) \cos(\theta_{yg}) \\ & - m_1 g \cos(\theta_{xg}) \cos(\theta_{yg}) + k_1 \left(L_{1x} - L_{10x}\right) L_{1x}^{(1,0,0,0,0)} \\ & + k_2 \left(L_{2x} - L_{20x}\right) L_{2x}^{(1,0,0,0,0)} = 0, \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} & m_1 r_g^2 \ddot{\theta}_{yg} + m_1 r_g^2 \dot{\theta}_{xg}^2 \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{yg}) \\ & + 2 m_1 r_g \dot{r}_g \dot{\theta}_{yg} + m_1 r_g \ddot{x}_0 \cos(\theta_{yg}) \\ & - m_1 r_g \ddot{y}_0 \sin(\theta_{xg}) \sin(\theta_{yg}) - m_1 r_g \ddot{z}_0 \cos(\theta_{xg}) \sin(\theta_{yg}) \\ & + m_1 r_g g \cos(\theta_{xg}) \sin(\theta_{yg}) + k_1 (L_{1x} - L_{10x}) L_{1x}^{(0,1,0,0,0)} \\ & + k_2 (L_{2x} - L_{20x}) L_{2x}^{(0,1,0,0,0)} = 0, \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned} & m_1 r_g^2 \ddot{\theta}_{xg} \cos(\theta_{yg})^2 + 2 m_1 r_g \dot{r}_g \dot{\theta}_{xg} \cos(\theta_{yg})^2 \\ & - 2 m_1 r_g^2 \dot{\theta}_{xg} \dot{\theta}_{yg} \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{yg}) \\ & + m_1 r_g \ddot{y}_0 - m_1 \cos(\theta_{xg}) \cos(\theta_{yg}) \cos(\theta_{yg}) r_g \ddot{z}_0 \sin(\theta_{xg}) \\ & + m_1 r_g g \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{xg}) + k_1 (L_{1x} - L_{10x}) L_{1x}^{(0,0,1,0,0)} \\ & + k_2 (L_{2x} - L_{20x}) L_{2x}^{(0,0,1,0,0)} = 0, \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} & J_z \ddot{\theta}_z + k_1 (L_{1x} - L_{10x}) L_{1x}^{(0,0,0,0,1)} \\ & + k_2 (L_{2x} - L_{20x} L_{2x}^{(0,0,0,0,1)} = 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

さらに変数を減らす場合や組合せる場合も考えられるが，複雑な場合には Lagrange 関数に戻り変数関係を整理してから運動方程式を導出する方がよい.

3　個別の振動 mode にバネを考慮した場合

Lagrange 関数 (2.6) から，個々の振動 mode の運動方程式を導出する.

3.1　Mode 1 (遊動円木 mode)

振動 mode 1 の場合, $\theta_{xg} = 0, \theta_z = 0$, $L_{1x}[r_g, \theta_{yg}, 0, \theta_y, 0]$ とおいて，(2.6)-(2.11) 式より，Lagrange 関数と 3 つ (r_g, θ_{yg}, θ_y) の運動方程式は次のようになる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11} = & \frac{m_1}{2} \Big(\dot{r}_g^2 + r_g^2 \dot{\theta}_{yg}^2 + 2 \dot{r}_g \dot{x}_0 \sin(\theta_{yg}) \\ & + 2 \dot{r}_g \dot{z}_0 \cos(\theta_{yg}) + \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 \\ & + 2 r_g \dot{\theta}_{yg} \left(\dot{x}_0 \cos(\theta_{yg}) - \dot{z}_0 \sin(\theta_{yg}) \right) \Big) \\ & + \frac{J_y}{2} \dot{\theta}_y^2 + m_1 g (\cos(\theta_{yg}) r_g + z_0) \\ & - \frac{k_1}{2} \left(L_{1x} - L_{10x}\right)^2 - \frac{k_2}{2} \left(L_{2x} - L_{20x}\right)^2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} & m_1 \Big(\ddot{r}_g - r_g \dot{\theta}_{yg}^2 + \sin(\theta_{yg}) \ddot{x}_0 + \cos(\theta_{yg}) \ddot{z}_0 \Big) \\ & - g m_1 \cos(\theta_{yg}) + k_1 \left(L_{1x} - L_{10x}\right) L_{1x}^{(1,0,0,0,0)} \\ & + k_2 \left(L_{2x} - L_{20x}\right) L_{2x}^{(1,0,0,0,0)} = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} & m_1 \Big(r_g^2 \ddot{\theta}_{yg} + 2 r_g \dot{r}_g \dot{\theta}_{yg} + r_g \ddot{x}_0 \cos(\theta_{yg}) - r_g \ddot{z}_0 \sin(\theta_{yg}) \Big) \\ & + m_1 g r_g \sin(\theta_{yg}) + k_1 (L_{1x} - L_{10x}) L_{1x}^{(0,1,0,0,0)} \\ & + k_2 (L_{2x} - L_{20x}) L_{2x}^{(0,1,0,0,0)} = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} & J_y \ddot{\theta}_y + k_1 (L_{1x} - L_{10x}) L_{1x}^{(0,0,0,1,0)} \\ & + k_2 (L_{2x} - L_{20x}) L_{2x}^{(0,0,0,1,0)} = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

この場合の L_{1x}, L_{2x} は次式である:

$$\begin{aligned} L_{1x} = & \sqrt{} \left(a_1^2 + c_1^2 - 2 a_1 c_1 \cos(\theta_y) + r_g^2 \right. \\ & + 2 r_g (a_1 \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_y) \\ & \left. + (c_1 - a_1 \cos(\theta_y)) \sin(\theta_{yg})) \right), \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} L_{2x} = & \sqrt{} \left(a_1^2 + c_1^2 - 2 a_1 c_1 \cos(\theta_y) + r_g^2 \right. \\ & - 2 r_g (a_1 \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_y) \\ & \left. + (c_1 - a_1 \cos(\theta_y)) \sin(\theta_{yg})) \right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

静止平衡状態では，$\theta_{yg} = 0$, $\theta_y = 0$, $r_g = r_{g0}$ とおいて，力の静釣合いの式が導かれる:

$$\begin{aligned} & - g m_1 + m_1 \ddot{z}_0 + k_1 \left(L_{1x} - L_{10x}\right) L_{1x}^{(1,0,0,0,0)} \\ & + k_2 \left(L_{2x} - L_{20x}\right) L_{2x}^{(1,0,0,0,0)} = 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} & m_1 r_{g0} \ddot{x}_0 + k_1 (L_{1x} - L_{10x}) L_{1x}^{(0,1,0,0,0)} \\ & + k_2 (L_{2x} - L_{20x}) L_{2x}^{(0,1,0,0,0)} = 0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} & k_1 (L_{1x} - L_{10x}) L_{1x}^{(0,0,0,1,0)} \\ & + k_2 (L_{2x} - L_{20x}) L_{2x}^{(0,0,0,1,0)} = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

紐の静止平衡解は，次式となる:

$$L_{1x0} = L_{2x0} = \sqrt{a_1^2 - 2 a_1 c_1 + c_1^2 + r_{g0}^2} \equiv L_{00} \tag{3.10}$$

これにより，(3.2), (3.3) 式は次のようになる:

$$-gm_1 + m_1\ddot{z}_0 = 0,\ \ m_1 r_{g0}\ddot{x}_0 = 0 \tag{3.11}$$

ここでは，外部からの励振の項は別にして，バネ自身の静止平衡解を用いたのでバネの項が消失しているが，バネが伸びて棒や木片の自重と釣合う解がある．なお，静止平衡解は (3.4) 式を満足する．

3.2 Mode 2 (ブランコ mode)

振動 mode 2 の場合，$\theta_z = 0, \theta_{yg} = 0, \theta_y = 0$ とおいて，(2.6)-(2.11) 式より，Lagrange 関数と 2 つ (r_g, θ_{xg}) の運動方程式は次のようになる:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{12} = \frac{m_1}{2}\Big(&\dot{r}_g^2 + r_g^2\dot{\theta}_{xg}^2 + 2\dot{r}_g\dot{y}_0\sin(\theta_{xg}) \\ &+ 2\dot{r}_g\dot{z}_0\cos(\theta_{xg}) + \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 \\ &+2r_g\dot{\theta}_{xg}\left(\dot{y}_0\cos(\theta_{xg}) - \dot{z}_0\sin(\theta_{xg})\right)\Big) \\ &+ m_1 g(\cos(\theta_{xg})r_g + z_0) - \frac{k_1}{2}\left(L_{1x} - L_{10x}\right)^2 \\ &- \frac{k_2}{2}\left(L_{2x} - L_{20x}\right)^2,\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}&m_1\Big(-r_g\dot{\theta}_{xg}^2 + \ddot{r}_g + \sin(\theta_{xg})\ddot{y}_0 + \cos(\theta_{xg})\ddot{z}_0\Big) \\ &- gm_1\cos(\theta_{xg}) + k_1\left(L_{1x} - L_{10x}\right)L_{1x}^{(1,0,0,0,0)} \\ &+ k_2\left(L_{2x} - L_{20x}\right)L_{2x}^{(1,0,0,0,0)} = 0,\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}&m_1\Big(r_g^2\ddot{\theta}_{xg} + 2r_g\dot{r}_g\dot{\theta}_{xg} + r_g\ddot{y}_0\cos(\theta_{xg}) - r_g\ddot{z}_0\sin(\theta_{xg})\Big) \\ &+ m_1 r_g g\sin(\theta_{xg}) + k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,0,1,0,0)} \\ &+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,0,1,0,0)} = 0\end{aligned} \tag{3.14}$$

この場合の L_{1x}, L_{2x} は次式である:

$$L_{1x} = L_{2x} = \sqrt{a_1^2 - 2a_1c_1 + c_1^2 + r_g^2} \tag{3.15}$$

静止平衡状態では，$\theta_{xg} = 0, r_g = r_{g0}$ とおいて，力の静釣合いの式が導かれる:

$$\begin{aligned}&- gm_1 + m_1\ddot{z}_0 + k_1\left(L_{1x} - L_{10x}\right)L_{1x}^{(1,0,0,0,0)} \\ &+ k_2\left(L_{2x} - L_{20x}\right)L_{2x}^{(1,0,0,0,0)} = 0,\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}&m_1 r_{g0}\ddot{y}_0 + k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,0,1,0,0)} \\ &+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,0,1,0,0)} = 0\end{aligned} \tag{3.17}$$

紐の静止平衡解は，次式となる:

$$L_{1x0} = L_{2x0} = \sqrt{a_1^2 - 2a_1c_1 + c_1^2 + r_{g0}^2} \tag{3.18}$$

これにより，(3.13), (3.14) 式は次のようになる:

$$-gm_1 + m_1\ddot{z}_0 = 0,\ \ m_1 r_{g0}\ddot{y}_0 = 0 \tag{3.19}$$

この場合にも，外部励振の項は別にして，バネ自身の静止平衡解を用いたのでバネの項が消失しているが，バネが伸びて棒や木片の自重と釣合う解がある．

3.3 Mode 3 (捩れ振動 mode)

振動 mode 3 の場合，$\theta_{xg} = 0, \theta_{yg} = 0, \theta_y = 0$ とおいて，(2.6)-(2.11) 式より，Lagrange 関数と 2 つ (r_g, θ_z) の運動方程式は次のようになる:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{13} = &\frac{m_1}{2}\left(\dot{r}_g^2 + 2\dot{r}_g\dot{z}_0 + \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2\right) + \frac{J_z}{2}\dot{\theta}_z^2 \\ &+ m_1 g(r_g + z_0) - \frac{k_1}{2}\left(L_{1x} - L_{10x}\right)^2 \\ &- \frac{k_2}{2}\left(L_{2x} - L_{20x}\right)^2,\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}&m_1\left(\ddot{r}_g + \ddot{z}_0\right) - m_1 g + k_1\left(L_{1x} - L_{10x}\right)L_{1x}^{(1,0,0,0,0)} \\ &+ k_2\left(L_{2x} - L_{20x}\right)L_{2x}^{(1,0,0,0,0)} = 0,\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}&J_z\ddot{\theta}_z + k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,0,0,0,1)} \\ &+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,0,0,0,1)} = 0\end{aligned} \tag{3.22}$$

この場合の L_{1x}, L_{2x} は次式である:

$$L_{1x} = L_{2x} = \sqrt{a_1^2 + c_1^2 - 2a_1c_1\cos(\theta_z) + r_g^2} \tag{3.23}$$

静止平衡状態では，$\theta_z = 0, r_g = r_{g0}$ とおいて，力の静釣合いの式が導かれる:

$$\begin{aligned}&m_1\ddot{z}_0 - m_1 g + k_1\left(L_{1x} - L_{10x}\right)L_{1x}^{(1,0,0,0,0)} \\ &+ k_2\left(L_{2x} - L_{20x}\right)L_{2x}^{(1,0,0,0,0)} = 0,\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}&k_1(L_{1x} - L_{10x})L_{1x}^{(0,0,0,0,1)} \\ &+ k_2(L_{2x} - L_{20x})L_{2x}^{(0,0,0,0,1)} = 0\end{aligned} \tag{3.25}$$

紐の静止平衡解は，次式となる:

$$L_{1x0} = L_{2x0} = \sqrt{a_1^2 - 2a_1c_1 + c_1^2 + r_{g0}^2} \tag{3.26}$$

これにより，(3.21), (3.22) 式は次のようになる:

$$-gm_1 + m_1\ddot{z}_0 = 0, \tag{3.27}$$

やはり，外部励振の項は別にして，バネ自身の静止平衡解を用いたのでバネの項が消失しているが，バネが伸びて棒や木片の自重と釣合う解がある．

4 おわりに

本研究は，文献[1] に刺激されて始まっているが，3 つの振動 mode があり，質量や慣性 moment の振子運動への影響に注目し教材として整備する計画で進めて来た[2]–[7]．本報告では，2011 年度の卒業研究で行った実験[8],[9] を契機に 2 点吊り物理振子の紐の弾性効果を考慮した model 解析を行った．2 点吊り振子の 3 つの振動 mode の実測値と線形理論値との対応を述べ，mode 1, 2 の非線形連成振動系の運動方程式を導いた[11]–[15] しかしながら，紐の弾性効果は運動方程式 (2.7)- (2.11) のいずれにも含まれ，攪乱について運動方程式を線形化しても線形連成振動系となると解析上の扱いがかなり複雑になる．その点については，さらに検討したい．.

棒材による 2 点吊り振子では 3 つの mode の共存点 (**Fig.2**) が見られ，免震効果を検討する上で mode 間相互作用の検討が必要なことを示している．床材等による多点吊り振子の場合に対しても，mode 間の振動解析の検討を要すると思われる．また，mode 2, 3 や mode 3, 1 また

は mode 1, 2, 3 の非線形連成振動を解析する計画である．

本報告では，Lagrange 関数の記述と運動方程式の導出等を示した．紐の伸縮の弾性的効果が「紐の長さが一定の条件を用いて変数間の関係式を導いた場合」と比べ，原理的には解けているが，新たな力学問題を考察し，変数間の関係式の扱いが異なることに因る数値的解法過程の検討に時間を要している．本報告での力学問題の定式化に基づき，別報[16] では，線形バネと幾何学的非線形効果とブランコ mode の非線形振動解析に取組み，非線形振動の解明が進んでいることを付記しておく．

参考文献

[1] 川口 衛，立道 郁生: “21318 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 1 原理と免震床の実大実験” 学術講演梗概集. B-2, 構造 II, 振動, 原子力プラント 2000 (2000), pp.635-636(社団法人日本建築学会).

[2] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), pp.55-60.

[3] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，中道 義之:“2 点吊り振子の捩り振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), pp.83-88.

[4] 望月 孔二，鈴木 秀，舟田 敏雄，岩本 大，宮内 太積，大庭 勝久，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の 3 つの線形振動 mode の実験と解析” 沼津高専研究報告 第 45 号 (2011), pp.163-168.

[5] 鈴木 秀, 舟田 敏雄, 金子 裕哉, 宮内 太積, 福田 克也: “2 点吊り振子と剛体振子の振動実験と解析” 日本機械学会東海支部 東海学生会　第 42 回学生員卒業研究発表講演会，2011 年 3 月 13 日 (日) 豊橋技術科学大学，第 9 室 10:50 ～ 12:14 機械力学・計測・制御 講演番号 909，講演前刷集 (日本機械学会東海学生会 平成 23 年 3 月 1 日発行) CD/ROM，pp.268-269.

[6] 宮内 太積，福田 克也，鈴木 秀，金子 裕哉，舟田 敏雄: “ 2 点吊り振子の非線形内部共振の解析 ” 日本機械学会東海支部東海支部第 60 期総会・講演会 (支部 60 周年記念行事) 豊橋技術科学大学，第 8 室 (A207 教室) 3 月 14 日 (月) OS5 振動解析と制振 OS5-2 非線形振動 10:45～12:00 講演番号 811 東海支部第 60 期総会講演会講演論文集 No. 113-1 (日本機械学会東海支部 2011 年 3 月 1 日発行), pp.403-404.

[7] 舟田 敏雄，鈴木 秀，金子 裕哉，ビン モハマド イドロス ムハマド イッザト，大庭 勝久，中道 義之，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二，川上 誠: “ 2 点吊り振子の mode 間相互作用と内部共振の数値解析 ” 第 60 回理論応用力学講演会 3 月 9 日 (水) 第 4 室 9:30-9:45 OS12-4 機械系及び構造物系の振動制御 講演番号 OS12-10，講演論文集 OS12-10.pdf

[8] 桜井 賢人，舟田 敏雄，木ノ内 智貴，大庭 勝久，鈴木 智大，望月 孔二，土屋 吉紀，青木 悠祐，宮内 太積，遠藤 誉人: “2 点吊り物理振子の振動解析と実験 (1)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[9] 舟田 敏雄，桜井 賢人，木ノ内 智貴，大庭 勝久，鈴木 智大，望月 孔二，土屋 吉紀，青木 悠祐，宮内 太積，遠藤 誉人: “2 点吊り物理振子の振動解析と実験 (2)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[10] D. Zhou，T. Ji: “Dynamic characteristics of a generalised suspension system” *International Journal of Mechanical Sciences* **50** (2008), pp.30-42.

[11] 舟田 敏雄，宮内 太積，大庭 勝久，中道 義之，青木 悠祐，出川 智啓，望月 孔二: “2 点吊り振子の連成振動と内部共振の数値解析” 日本機械学会 2011 年度年次大会 『機械工学が牽引するイノベーション』，2011 年 9 月 11 日 (日)～15 日 (木)，東京工業大学 大岡山キャンパス，[OS] G100 機械力学・計測制御部門 一般セッションセッション，9 月 13 日 (火) 9:00-10:00 会場：W242，講演番号 G100033．日本機械学会 2011 年度年次大会 講演論文集 DVDROM G100033.pdf.

[12] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の 3 つの mode 間相互作用の解析 (1)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[13] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の 3 つの mode 間相互作用の解析 (2)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[14] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の 3 つの mode 間相互作用の解析 (3)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[15] 舟田 敏雄，宮内 太積，大庭 勝久，青木 悠祐，望月 孔二 : “2 点吊り振子の連成振動と内部共振の数値解析” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[16] 金子 裕哉，舟田 敏雄，大庭 勝久，鈴木 秀，紅林 広亮，伊井 雅俊，早苗 駿一，長谷川 輔，青木 悠祐: “技術者教育のための計算流体力学教材の改定 (3): バネ振子の非線形振動の多重尺度法による解析と数値解析” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.