PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (5): 2 点吊り振子の捩れ振動

望月 孔二[*1*2] 舟田 敏雄[*2*3] 岩本 大[*3] 清水 啓介[*3] 船津 佑介[*3]
中道 義之[*2*4] 大庭 勝久[*2*3] 宮内 太積[*2*5] 川上 誠[*2*3]

Fundamental Analysis of Pendulum Oscillations to Make up a Simple Measurement System with PSD (Position Sensitive Detector) (5): Torsional Oscillation of a Bifilar Suspension Pendulum

Kouji MOCHIZUKI[*1*2] Toshio FUNADA[*2*3] Dai IWAMOTO[*3] Keisuke SHIMIZU[*3] Yusuke FUNATSU[*3]
Yoshiyuki NAKAMICHI[*2*4] Katsuhisa OOBA[*2*3] Tatsumi MIYAUCHI[*2*5] and Makoto KAWAKAMI[*2*3]

Abstract: A uniform density bar is suspended at its two ends by two strings whose two end points are attached to an upper static wall. The bar may swing or make torsional oscillation in a vertical plane from its equilibrium rest state, which is called bifilar suspension pendulum. There are three configurations where the distance between the two points is longer or shorter than the bar length, and where it is just the same. For the configurations, three oscillation modes exist. The first mode is the swinging in the vertical plane taken in the equilibrium state, in the normal to which the second mode arises in another vertical plane. The third mode is a torsional oscillation around a vertical axis and makes the bar attitude horizontal. To test the second and third oscillation modes experimentally, a measurement system with PSD (Position Sensitive Detector) was made up. The data taken by PSD are dealt with LabVIEW and the experimental results are compared with the simulation results.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Free Oscillation of Swinging and Torsional Modes, Measurement System with PSD (Position Sensitive Detector), Comparison of Experiments and Numerical Simulations

1 はじめに

2 本吊り振子の力学問題は，2 本の吊り材で吊られた有限大の物体の重力場での運動であり，質量中心の並進運動とその回りの回転運動で記述され，束縛条件の下で解析される．この問題は，前報[1],[2] で述べた「静止平衡状態に攪乱状態を重ね合わせて運動を調べるもの」であり，従来から取り上げられて来た代表的な力学現象の一つで，教材としても非常に有効である．この振子は “2 点吊り振子: bifilar-suspension-pendulum” と呼ばれ，Inetrnet 上に多くの力学教材[3] が提供され，最近の非線形力学の格好の教材となっている．さらに，最適化設計[4] も試みられて，新たな工学的課題を提供している．

ここでは，糸の長さが等しく棒の配置が左右対称な「対称 2 点吊り振子」を取り上げる．この問題では，2 本の糸で棒 (遊動円木) の端を吊り下げている静止平衡状態について，座標値を用いて束縛条件が記述され，それが座標値間の関係式を導くが，関係式が陰関数表現となるため厳密な扱いは面倒になる．この静止平衡状態の回りの振子運動は，糸と棒の成す鉛直面内で起こる “mode 1” とそれとは垂直な鉛直面内で起こる “mode 2” がある．mode 1 の振子運動が先行研究で注目されており，前報[5],[6] でも論じた．mode 2 の解析は先の報告[7],[8] で扱ったのでここでは詳しくは触れない．一方，教科書[9] では「2 本吊り」として，鉛直軸回りの棒の捩れ振動が扱われている．これは，上述の 2 つとは異なる “mode 3” である．この 2 点吊り振子の捩り振動は，円木の重心を通る鉛直軸を回転軸として，振子の上下移動による重力ポテンシャルエネルギーの変化に起因して起こる．円木の長さと 2 点吊りの糸の間隔並びに糸の長さにより振動特性が変化する．この捩れ振動に対して，前報[10] で数学 model の構築と厳密解析を行っており，先に試作した mode 1 の PSD (Position Sensitive Detector) 計測システム[6] を活用して，本報告では，mode 2, 3 の振動計測を行い，新たな PSD 計測システムの構築とその試験評価並びに捩れ振動 simulation 結果との比較を報告する．

2 PSD による簡易計測システムによる捩れ振動測定

先に試作した PSD 計測システム[6] を活用して，捩れ振動の計測のために PSD の配置を変更した．計測システムの全容を **Fig.1a** に示す．金属棒を紐で吊るした 2 点吊り振子が支持台に取り付けられており，支持台上の左右一組の PSD と白紙間の距離の時間変化として振子の mode 2, 3 の振動を計測する．測定 data は **Fig.1a** の右側のパソコンに取り込まれて，LabVIEW により data 処理される．**Fig.1b** ではアルミニウム板に装着された PSD が黒く見え，紐に付けた白紙により PSD からの赤外光を反射する．**Fig.1c** には LabVIEW の data 処理過程を示す．**Fig.1d** は LabVIEW による処理結果のディスプレイ表示であり，左側の図は時

[*1] 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.
[*2] 専攻科: Advanced Engineering Course.
[*3] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
[*4] 総合情報センター: Information Technology Center.
[*5] 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.

系列信号 (sensor と白紙面との距離の電圧信号) を表し，右側は左右の PSD の信号を平面 (ここでは「位相面」と呼ぶ) に表示している．画面の左上側から右下側に曲線が描かれており，PSD が棒の捩れ振動の信号を表示している．

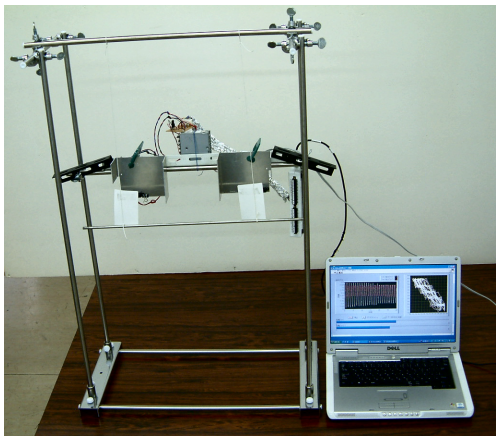


Fig.1a Apparatus to measure the torsional (and/or swinging) oscillation of bifilar pendulum by PSD sensors.

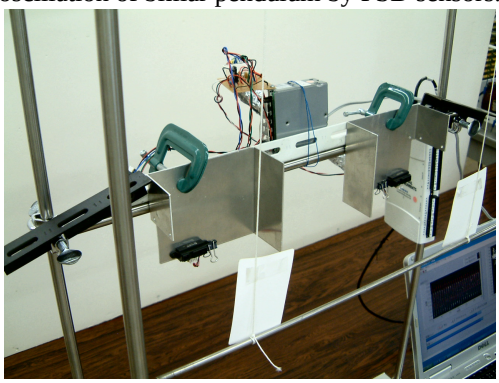


Fig.1b PSD sensors.

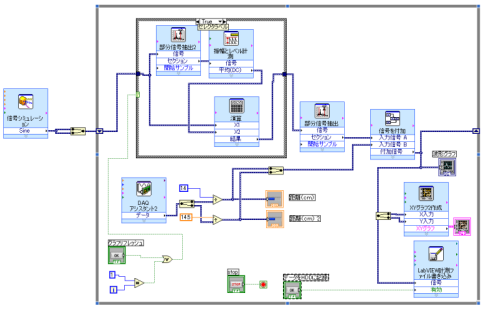


Fig.1c Diagram of measurement systen of LabVIEW.

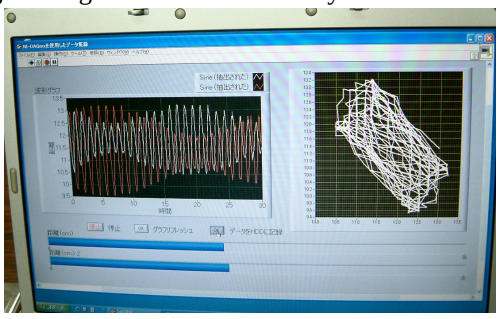


Fig.1d Display on PC. The oscillation data is shown as time sequence (left side) and phase portrait (right side).

2 点吊り振子の振動には 3 つの mode があり，mode 1 は棒の長さ方向の揺れ (いわゆる「遊動円木 mode」)，mode 2 は mode 1 とは垂直方向の揺れ (「ブランコ mode」)，mode 3 は捩れである．mode 2, 3 の実験のために組立てた装置を **Fig.2** に示す．図では，mode 2, 3 の棒の揺れを検知できるように，sensor を設置してある．今回用いた PSD sensor は，シャープ社の信号処理回路一体化測距センサユニット (外部制御信号不要) であり，赤外 LED を使って距離を測定し，測距結果を電圧 (リニア) 出力する．

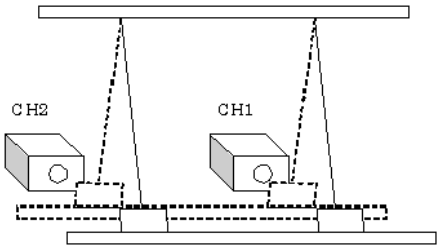
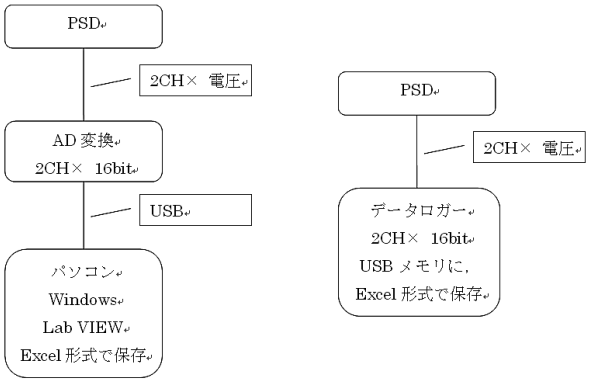


Fig.2 Schematic of the apparatus to measure mode 2 and 3 oscillations of a bifilar suspension pendulum.

Table 1 Response of PSD sensors and equation.

センサと対象物の距離	CH1	CH2	数式 [125 ÷ 距離 (mm)]
70mm	1.70V	1.77V	1.79
90mm	1.38V	1.39V	1.39
110mm	1.12V	1.17V	1.14

実測での sensor の出力は **Table 1** に示される．その試験では PSD と白紙間の距離に対して ±2 mm 程度の誤差がある．PSD では測定距離と出力電圧は概ね逆数の関係にある．表の右端には，90 mm にて fitting した逆数の計算式を載せてある．測定 data 処理をする際は，この式を利用できる．data の記録には 2 種類の方法を用意してあり，そのブロック図を **Fig.3** (a) LabVIEW と (b) Data logger に示す．



(a) LabVIEW (b) Data logger

Fig.3 Block diagram of two measurement systems.

Fig.3 (a) の場合は，LabVIEW が実時間で data 処理できる．つまり，LabVIEW に処理過程を program しておけば，**Table 1** の計算式を用いて PSD の data を距離に変換するので，距離-時間の図を実時間でディスプレイに表示できる (**Fig.1d** 参照)．

一方，**Fig.3** (b) の場合は，主な電子機器は Data logger だけなので，実時間で我々が知ることができるのは電圧-時間の図だけである．しかし，振子の振幅が 4 cm 程度 (±2 cm 程度) ならば，振動の非線形性はそんなに大きくなくまた PSD と白紙面の傾きによる非線形性も小さいので，電圧を距離と見立てることができる．また，Data logger の電源を入れたら直ぐに実験を開始できるので便利である．採取した data を USB memory などに格納しておき，距離-時間の図を作成・表示できる．

今回用いた機器の仕様と概要は **Table 2** にまとめられる．PSD sensor の仕様の詳細はシャープ社の URL を参照されたい．**Fig.3** (a), (b) の計測システムの機器では，mode 2, 3 の振動の計測に 0.1 sec の sample-rate と設定される．

Table 3 には，実施した実験での条件と概略がまとめられている．この表について，次の点に注意されたい:

- 寸法の単位は mm で記入されている．
- 実験 (4)-と実験 (4) は同じ条件である．
- 条件 (1) と条件 (5) は殆ど同じであるが，条件 (5) では系全体を傾けたため，CH1 側の棒の高さが 10mm 程低い．これにより，2 点吊り振子の配置は対称ではないが，対称の場合の解析とのずれは小さいものと仮定できる．
- 収集する data の区切り信号: 手で操作して振子を揺らし，1 秒程度 CH1 の光を遮り，そのまま記録する．記録を停止したい時は，1 秒程度 CH2 の光を遮る．

Table 2 Devices used in experiments.

機器	仕様と概要
PSD	GP2D120X では，標準的には sensor と被測定物間距離が L=30 cm にて Vo=0.4 V，L=4 cm にて Vo=2.65 V である．http://www.sharp.co.jp/products/device/lineup/selection/opto/index.html
AD 変換	National Instruments 社の NI-DAQPad-6015 か相当品．16 bit 精度の AD 変換を 16 channel 持ち，最大 sample-rate は 200 kSPS である．
パソコン	Windows XP を OS とする lap-top 型
LabVIEW	Ver. 7.1
Data logger	GRAPHTEC 社 mini LOGGER GL800. 16bit 精度の AD 変換が 10 channel なら，最大 sample-rate は 0.1 sec 間隔である．20 channel にすると最大 sample-rate は 0.2 sec になる．今回の実験はどの振動も 1 Hz 未満であり，0.1 sec 間隔の sample-rate で十分に測定できる．

Table 3 Measurement conditions for the PSD measurement systems with LabVIEW (**Fig.3** (a)) and Data logger (**Fig.3** (b)).

NO#	(1)	(2)	(3)	(4)-	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
File_Name	a1528	a2212	b	c	d	e	f	g	h	i	j
時刻	13:15	13:22	13:29	13:35	13:42	15:17	15:28	15:36	15:45	15:56	16:03
						ch1-下					
(1) 支え部幅	300	250	350	300	300	300	300	300	300	150	150
(2)ch1 側長さ	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400
(3)ch2 側長さ	400	400	400	390	390	400	400	390	410	400	410
(4) 振子部幅	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300	300
(5)ch1 外	100	100	100	100	100	100	50	50	50	100	100
(6)ch2 外	100	100	100	100	100	100	150	150	150	100	100

Table 3 の条件での実験の結果は **Fig.4** にまとめられる．

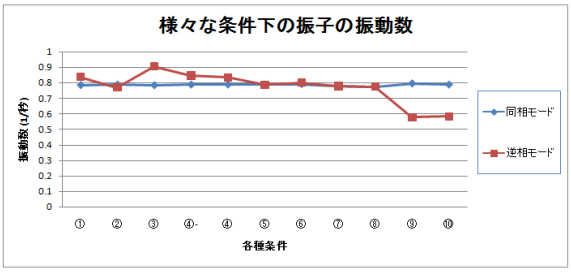
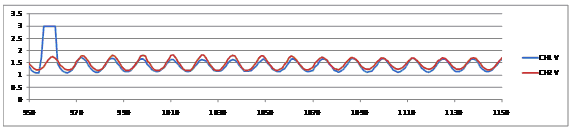


Fig.4 Measured data of frequency (ordinate) of mode 2 versus the ten conditions (abscissa) shown in **Table 3**.

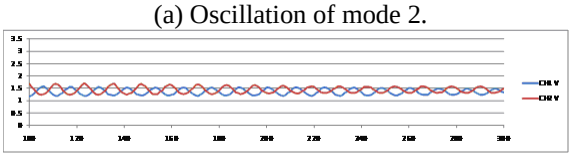
Fig.4 は mode 2, 3 の振動数を実験ごと (**Table 3** の NO (1)-(10)) に図示したものであり，約 20 sec で 16 回の振動なので，振動数は 16/20=0.8 Hz である．これは，CH1 の振動 (**Fig.5**(a)) から算出した．なお，20 sec 間で系によっては，CH2 と CH1 では振動数が異なることがある．

Fig.4 の実験結果の元の実験 data として，**Table 3** の NO (1) の data を **Fig.5** に示す．図の縦軸は電圧 (ボルト) で横軸は data 番号を表し，data は 0.1 sec ごとに sample している．**Fig.5**(a) は mode 2 で data 番号が 950 とは 95.0 sec を意味する．950 から 1150 (20 sec 間) で 16 回振動している．**Fig.5**(b) は mode 3 で 100 から 300 で (20 sec 間) で約 17 回の振動をしている．実験では，手で操作して振子を揺らし，1 秒程度 CH1 の光を遮り，そのまま記録する．記録を停止したい時は，1 秒程度 CH2 の光を遮る．この過程は **Fig.5**(c) (0 から 3000) に示される．この他の data は，測定

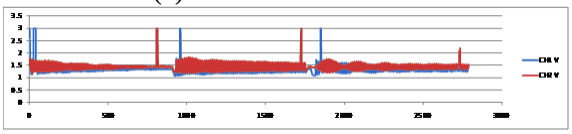
data file を参照されたい．



(a) Oscillation of mode 2.



(b) Oscillation of mode 3.



(c) Collected data.

Fig.5 Samples of the experiment.

2.1 実験値の分析と理論値との比較

Table 3 の実験値より，$2c = 0.3$ m∼0.15 m ((1) 支え部幅), $L_1 = 0.4$ m ((3)ch2 側の紐の長さ), $L_2 = 0.4$ m ((2)ch1 側の紐の長さ), $2a = 0.3$ m ((4) 振子部での紐の支持部間の幅) である．ここで用いた記号は，**Fig.6** の理論 model に示される．但し，実験に用いた円木 (**Fig.1a**, **Fig.2**) は長い金属棒であり，円木の全長は $2b = 0.5$ m である．

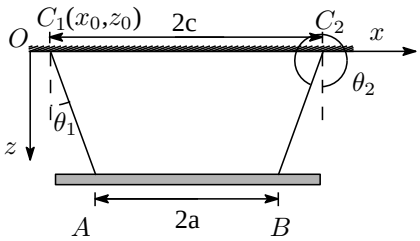


Fig.6 Bifilar suspension pendulum with $c > a$.

$L_1 = L_2 = L = 0.4$ m で $a = 0, 15$ m, $c = 0.075$ m (但し，$\sin(\alpha) = (c-a)/L$) の場合には，単振子の理論により，mode 2 の線形振動の固有角振動数 ω_{02}，周期 T_2，振動数 f_2 は次式で与えられる:

$$\begin{cases} \omega_{02} = \sqrt{L\cos(\alpha)/g} = \sqrt{0.4\cos(\alpha)/9.80665} \\ = 4.99593, \\ T_2 = 2\pi/\omega_{02} = 1.25766, \quad f_2 = 1/T_2 = 0.795126 \end{cases} \tag{2.1}$$

この f_2 または $\omega_{02} = \sqrt{L/g}$ のときの $f_2 = 0.788044$ Hz は **Fig.4** の $f = 0.8$ Hz にほぼ一致する．即ち，いずれの「同相モード」(mode 2) も，ほぼ $f = 0.8$ Hz である．

次に，mode 3 の捩れ振動の data を解析する．一定線密度 ρ の円木の質量 m は $m = 2\int_0^b \rho \mathrm{d}x = 2\rho b$ であり，慣性 moment J は，円木の全長が $2b$ であることを考慮して $J = 2\int_0^b \rho x^2 \mathrm{d}x = 2\rho b^3/3 = mb^3/3$ と計算できる．これらを用いて，先の線形捩れ振動の解析[9],[10] により，固有角振動数は $\omega_{03} = \sqrt{mgca/(JL\cos(\alpha))} = \sqrt{3gca/(b^2L\cos(\alpha))}$ と与えられる．この式に実験条件 $c = 0.15$ m を代入して，ω_{03}，周期 T_3，振動数 f_3 は次の値となる:

$$\begin{cases} \omega_{03} = \sqrt{\dfrac{3 \times 9.80665 \times 0.15 \times 0.15}{0.25^2 \times 0.4}} = 5.14567, \\ T_3 = 2\pi/\omega_{03} = 1.22106, \quad f_3 = 1/T_3 = 0.818959 \end{cases} \tag{2.2}$$

従って，この f_3 も **Fig.4** の $f = 0.8$ Hz に近い．

mode 3 の捩れ振動では，NO(9), (10) の $c = 0.075$ m のとき $\alpha = -0.188616$ となり，次の値を得る:

$$\begin{cases} \omega_{03} = \sqrt{\dfrac{3 \times 9.80665 \times 0.075 \times 0.15}{0.25^2 \times 0.4 \times \cos(\alpha)}} = 3.67124, \\ T_3 = 1.71146, \quad f_3 = 0.584296 \end{cases} \tag{2.3}$$

故に，この結果は，**Fig.4** の NO(9), (10) の「逆位相」(mode 3) での実験値 $f = 0.6$ Hz に近い．

さらに，mode 3 の捩れ振動では，NO(3) の $c = 0.175$ m のとき $\alpha = 0.0625408$ となり，次の値を得る:

$$\begin{cases} \omega_{03} = \sqrt{\dfrac{3 \times 9.80665 \times 0.175 \times 0.15}{0.25^2 \times 0.4 \times \cos(\alpha)}} = 5.5634, \\ T_3 = 1.12938, \quad f_3 = 0.885443 \end{cases} \tag{2.4}$$

故に，この結果は，**Fig.4** の NO(3) の mode 3 での実験値 $f = 0.9$ Hz に近い．

さらに，mode 3 の捩れ振動では，NO(2) の $c = 0.125$ m のとき $\alpha = -0.0625408$ となり，次の値を得る:

$$\begin{cases} \omega_{03} = \sqrt{\dfrac{3 \times 9.80665 \times 0.125 \times 0.15}{0.25^2 \times 0.4 \times \cos(\alpha)}} = 4.70193, \\ T_3 = 1.3363, \quad f_3 = 0.748336 \end{cases} \tag{2.5}$$

故に，この結果は，**Fig.4** の NO(2) の mode 3 での実験値が $f = 0.8$ Hz より低いことに対応する．

2.2 捩れ振動の測定

実験装置の寸法を測定して，紐の長さ $L_1 = L_2 = 0.4$ m, 円木の全長 $2b = 0.5$ m，円木上の支持点 A, B 間距離 $2a = 0.3$ m と設定した．また，上側の支持点 C_1, C_2 の間の距離を $2c$ =0.15, 0.3, 0.45 m とした．今回は，時計と目視で周期計測し (**Table 4**)，Data logger に記録した．

Table 4 Measurement of period of torsional oscillation.

(a) Data for $2c = 0.15$ m, which gives 0.6 Hz.				
12/20	11.5/20	12.5/20	12/20	12/20
(b) Data for $2c = 0.3$ m, which gives 0.8 Hz.				
15.8/20	16/20	16/20	17/20	16.3/20
(c) $2c = 0.45$ m, which gives 1,05 Hz.				
21.2/20	21/20	21.5/20	21/20	20.65/20

Table 4 の data の $c = 0.225$ m のとき $\alpha = 0.188616$ となり，次の値を得る:

$$\begin{cases} \omega_{03} = \sqrt{\dfrac{3 \times 9.80665 \times 0.225 \times 0.15}{0.25^2 \times 0.4 \times \cos(\alpha)}} = 6.35878, \\ T_3 = 0.988112, \quad f_3 = 1.01203 \end{cases} \tag{2.6}$$

理論値 $f_3 = 1.01203$ Hz は，実測振動数 $f = 21.07/20 = 1.0535$ Hz に近い値であることが分かる．

3　2 点吊り振子の鉛直軸回りの捩れ振動

前報[10] に倣い，この力学問題を定式化する．水平面上の O' 点と C 点 (距離 $2c$) に長さ L_1 と L_2 ($= L_1 = L$ の糸の端を繋ぎ，他端を長さ $2b$ の金属棒の点 A, B (距離 $2a$) に繋いで，棒を鉛直面内で吊り下げ，鉛直軸回りに棒を捩れ振動させる (**Fig.7**)．O', A, B, C 点の位置を表すために，デカルト座標系 (x, y, z) の原点を O に取り，右向きに x 軸，鉛直下方に z 軸を取る．この鉛直面内に平面極座標系 (r, θ) を取り，O' 点を通る鉛直軸と糸 $O'A$ が成す角度を θ_1 とし，C 点を通る鉛直軸と糸 CB が成す角度を θ_2 と表すと，静止平衡状態で，各点の座標は次式で表される:

$$\begin{cases} O : (0,0)\,,\ O' : (x_0, z_0) = (0,0)\,,\ C : (2c, 0)\,, \\ A : (x_A, z_A) = (L_1 \sin(\theta_1), L_1 \cos(\theta_1))\,, \\ B : (x_B, z_B) = (2c + L_2 \sin(\theta_2), L_2 \cos(\theta_2)) \end{cases} \tag{3.1}$$

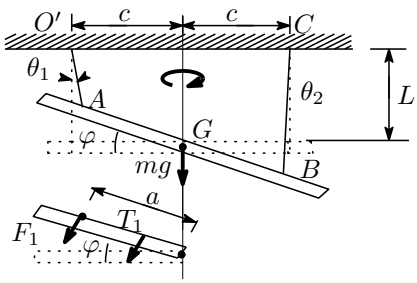


Fig.7 Torsional vibration of bifilar suspension pendulum.

この系の静止平衡状態は，紐の長さが等しく棒の配置が左右対称で $L_1 = L_2 = L, \theta_1 = \alpha, \theta_2 = 2\pi - \alpha$ (棒が水平で $z_A = z_B$) の場合で，次の幾何学的な関係式が成り立つ:

$$\begin{cases} L_1 \cos(\theta_1) = L_2 \cos(\theta_2) = L \cos(\alpha) = h, \\ L_1 \sin(\theta_1) = -L_2 \sin(\theta_2) = c - a, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$a = c - L \sin(\alpha) \tag{3.3}$$

これにより，系の静止平衡状態は $\beta \equiv c/a$ で特徴付けられる．また，この系の静止平衡状態は，紐の張力 S_1, S_2 と棒の重力による力の釣り合いで与えられる．棒の質量は $m = 2b\rho$ であり，重心 G の位置 (x_G, y_G, z_G) は，棒の中央になるから，次のように表される: $x_G = (x_A + x_B)/2$, $y_G = 0$, $z_G = (z_A + z_B)/2$．これらは θ_1, θ_2 の関数で，$L_1 = L_2 = L$ のとき棒の配置は重心回りに回転対称であり，$\theta_1 = 2\pi - \theta_2 = \theta$ を得る．

この平衡状態から棒が捩れ振動する．鉛直面内の平面極座標系と共に，重心を含む水平面内に取った平面極座標系 (r, φ) (重心を通る鉛直軸を中心軸とする円柱座標 (r, φ, z)) を用いる．この場合は棒の重心の並進運動は，水平面内には生じず，高さ方向 (z 方向) に $z_G = L\cos(\theta)$ と表され，重心の位置 (x_G, y_G, z_G) は次式で表される: $(x_G,\ y_G,\ z_G) = (c,\ 0,\ L\cos(\theta))$．棒の重心を通る鉛直軸回りの回転運動 (捩れ運動) は水平面内で起こり，角度 $\varphi \equiv \varphi(t)$ で記述される．重心回りの棒の慣性 moment J は $J = 2\rho b^3/3 = mb^2/3$ と求められるので，回転の運動 energy は $J\dot{\varphi}^2/2$ となる．ここで，重心回りに捩れた棒を上から観ると (**Fig.7**)，線分 $O'A, AG, GO$ が成す三角形に対する余弦定理が次式で表され，θ は φ の関数で表される:

$$L \sin(\theta) = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca\cos(\varphi)} \tag{3.4}$$

これは，θ $(0 \le \theta \le \pi/2)$ と φ $(-\pi/2 \le \varphi \le -\pi/2)$ の間の関係を与える．$-\pi/2 \le \theta \le 0$ の場合，根号の前に負号を付ける．(3.4) 式を考慮して，重心回りの棒の捩れ運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_1$ は，運動 energy K_1，重力 potential energy U を用いて，次のように表される:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 = K_1 - U,\ \ E_1 = K_1 + U,\ \ K_1 = \dfrac{J}{2}\dot{\varphi}^2, \\ U = -mgz_G = -mgL\cos(\theta) \\ \quad = -mg\sqrt{L^2 - (c^2 + a^2 - 2ca\cos(\varphi))} \end{cases} \tag{3.5}$$

ここで，potential energy U を静止平衡状態の回りで展開して 2 次まで取ると，線形理論の運動方程式が導かれる:

$$J\ddot{\varphi} = -\frac{mgca}{L\cos(\alpha)}\varphi \ \ \rightarrow\ \ \ddot{\varphi} = -\frac{3gca}{b^2 L\cos(\alpha)}\varphi \tag{3.6}$$

この運動方程式により，捩れ振動の固有角振動数は $\omega_{03}^2 = mgca/(JL\cos(\alpha)) = 3gca/(b^2 L\cos(\alpha))$ である．

4　数値解析

系の規定値を $g = 1$, $m = 1$, $J = m/(3b^2)$, $a = 0.15$, $b = 0.25$, $c = 0.075$, $L_1 = L_2 = L = 0.4$ と設定し，数値計算時間を $t_e = 2\pi \times 6$ とおく．Lagrange 関数 (3.5) から導かれる運動方程式:

$$J\ddot{\varphi} + \frac{macg\sin(\varphi)}{\sqrt{L^2 - (a^2 + c^2 - 2ac\cos(\varphi))}} = 0 \tag{4.1}$$

を数値解析する．

4.1　$c = 0.075$ m

初期値を $\varphi(0) = 0.01$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ 取り，時間 $0 \le t \le t_e$ での計算結果を **Fig.8** に示す．この図の振動数は，線形理論の結果 $f_3 = 0.584296$ Hz に近いが，やや低い．

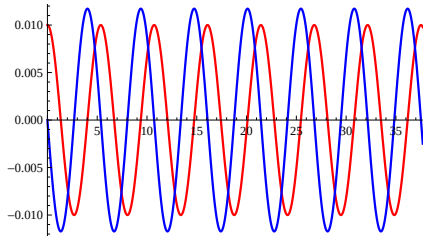


Fig.8 Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \le t \le t_e$. The curves are labeled by the initial values.

parameter 値は同じで，初期値を $\varphi(0) = 1$ に換えた場合の計算結果を **Fig.9** に示す．初期角度が大きくなると自由振動の振動数が低くなることが分かる．

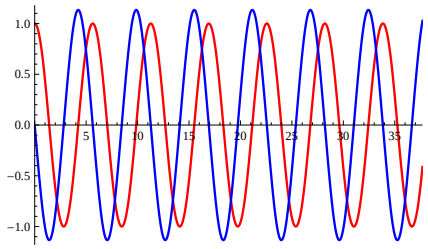


Fig.9 Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \le t \le t_e$.

4.2 $c = 0.225$ m

系の規定値を $c = 0.225$ に変更して，運動方程式 (4.1) の初期値を $\varphi(0) = 0.01, \dot{\varphi}(0) = 0$ と取り，時間 $0 \le t \le t_e$ での計算結果を **Fig.10** に示す．この図の振動数は，線形理論の結果 $f_3 = 1.01203$ Hz に近いが，やや低い．

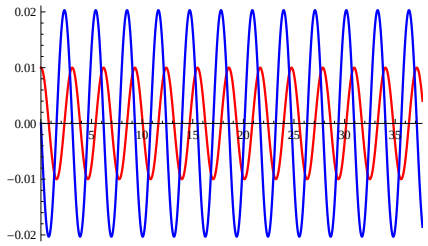


Fig.10 Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \le t \le t_e$.

parameter 値は同じで，初期値を $\varphi(0) = 1$ に換えた場合の計算結果を **Fig.11** に示す．この場合にも，初期角度が大きくなると自由振動の振動数が低くなることが分かる．

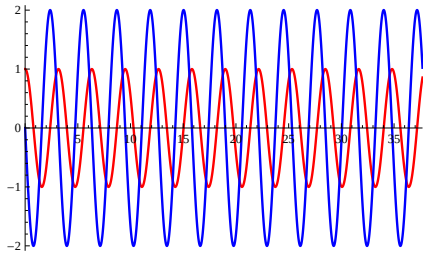


Fig.11 Time sequence of $\varphi(t)$ and $\dot{\varphi}(t)$ versus t in $0 \le t \le t_e$.

以上により，2 点吊り振子の捩れ振動の固有振動数の実験結果，線形理論解析，非線形数値解析結果を比較して，誤差の範囲ではいずれも一致しており，教材として活用できることが示された．なお，振動波形の解析はさらに検討を要し，本共同教育研究の今後の発展に期待される．

5 おわりに

本報告では, mode 2, 3 の振動計測を行い, 新たな PSD 計測システムの構築とその試験評価並びに捩れ振動 simulation 結果との比較を論じ，良好な結果が得られた．

なお，本報告の一部は，先に講演発表したもの[11] であることを付記する．

本研究遂行にあたり，本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して，柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] 望月 孔二，舟田 敏雄，石本 拓也, 鈴木 健宏, 鈴木 寛里: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 42 号 (2008), pp.57-66.

[2] 望月 孔二，舟田 敏雄，石本 拓也, 鈴木 健宏, 鈴木 寛里, 小代田 和己, 川上 誠: “PSD を用いた簡易計測システムの試作” 沼津高専研究報告 第 42 号 (2008), pp.67-76.

[3] P. Doherty: “Pendulum Snake: From order to chaos and back again” in Scientific Explorations And Adventures http://www.exo.net/~ pauld/activities/pendulums /pendulumsnake.html

[4] L.D. Akulenko: “Optimal control of motions of a bifilar pendulum” Journal of Applied Mathematics and Mechanics Volume 68, Issue 5, 2004, Pages 707-717

[5] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (3): 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.63-70.

[6] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (4): 2 点吊り振子の実験と解析” 沼津高専研究報告 第 43 号 (2009), pp.71-78.

[7] 舟田 敏雄，田代 直人，園田 泰之，前原 貴憲，川上 誠，齋藤 学，小山 雅弘，村田 裕也，今村 昌幸，藤田 邦彦: “Computational Fluid Dyanamics への指向” 沼津高専研究報告 第 39 号（2004), pp.31-40.

[8] 舟田 敏雄，田代 直人，園田 泰之，藤田 邦彦，齋藤 学，小山 雅弘，村田 裕也，今村 昌幸: “技術者教育のための工学数理の力学教材の改定 — ブランコの運動と Mathieu 方程式 —” 沼津高専研究報告 第 40 号 (2005), pp.23-32.

[9] 小出 昭一郎: “解析力学” 岩波書店，1983.

[10] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，中道 義之: “2 点吊り振子の捩り振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[11] 望月 孔二, 宮内 太積, 大庭 勝久, 中道 義之, 川上 誠, 岩本 大, 清水啓介, 船津佑介, 舟田敏雄: “7-8 PSD による 2 点吊り振子の捩り振動の計測と教材活用事例” 平成 21 年度 電気関係学会四国支部連合大会，愛媛大学工学部，平成 21 年 9 月 26 日 (土)9:00〜17:00 第 7 分野 計測 (II) 2F 21 番講義室 15:40-16:50，講演番号:7-8, 講演予稿集 CDROM, p.76, 07-08.pdf