2 点吊り振子の連成振動と内部共振の数値解析

宮内 太積[*1] 舟田 敏雄[*2] 大庭 勝久[*2] 青木 悠祐[*2] 望月 孔二[*3]

Numerical Analysis of Coupling Oscillation and Internal Resonance of Bifilar Suspension Pendulum

Tatsumi MIYAUCHI[*1] Toshio FUNADA[*2] Katsuhisa OHBA[*2]
Yusuke AOKI[*2] and Kouji MOCHIZUKI[*3]

Abstract: A bifilar suspension pendulum, a uniform density bar suspended at its two points by two strings of same length, may swing in a vertical plane or make torsional oscillation about a vertical axis. The swinging in a co-plane of the strings and the bar is called Mode 1, and the swinging in a vertical plane perpendicular to the bar is Mode 2. Mode 3 is the torsional oscillation about a vertical axis. These modes are linearly independent of each other, but it is possible to make nonlinear coupling oscillation between the modes and internal resonance. In this report, the 1-3 modes coupling oscillations are computed for parameter excitation and external forcing.

Keywords: Coupling Oscillations of Bifilar Suspension Pendulum, 1-3 Mode Coupling Due to External Excitation

1　はじめに

対称 2 点吊り振子 (並進振子) を免震床に応用するための検討[1] に刺激されて，2 点吊り振子の静止平衡状態周りの振子運動について，運動方程式を導出して初期値問題を数値解析し，実験を行った[2]–[7]．その振子運動には，紐と円木の成す鉛直面内で揺れる “mode 1 (遊動円木 mode)” とそれに垂直な鉛直面内で揺れる “mode 2 (ブランコ mode)” があり，鉛直軸回りの円木の振動は，“mode 3 (捩れ振動 mode)” に分類される．

本報告では，各振動 mode の実験値と線形振動理論値の比較結果[4]–[8] に基づき，球座標系を用いた 3 つの振動 mode の表現により，前報[9]–[11] の §2 を再掲し，捩れ振動 mode (mode 3) と遊動円木 mode (mode 1) の連成振動 (自由振動，parameter 励振，強制振動) を数値解析する．

2　2 点吊り振子の 3 つの振動 mode の球座標表現

水平右手方向に x 軸，手前方向に y 軸，鉛直下方向に z 軸とするデカルト座標系 (x, y, z) を用いて，**Fig.1** に示すように，C_1 点を起点に 2 点吊り振子の配置を記述する．

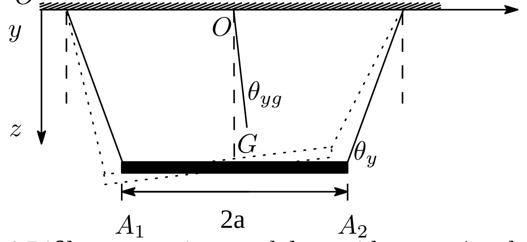

Fig.1 Bifilar suspension pendulum with $c > a$ (mode 1).

[*1] 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.
[*2] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
[*3] 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.

また，球座標系を併用し，座標原点は適宜取るものとする．水平な上壁面上に C_1 点 (x_0, y_0, z_0) を取り．間隔 c_1 で，O 点 $(x_0 + c_1, y_0, z_0)$, C_2 点 $(x_0 + 2c_1, y_0, z_0)$ を取る．遊動円木の中央 (質量中心) を G 点 (x_g, y_g, z_g) とし，G 点から間隔 a_1 で，遊動円木上の左の紐の結び目位置を A_1 点 (x_1, y_1, z_1)，右の紐の結び目位置を A_2 点 (x_2, y_2, z_2) と表す．これらにより，各点間の長さ (距離) は $\overline{A_1A_2} = 2a_1$, $\overline{A_1G} = a_1$, $\overline{GA_2} = a_1$, $\overline{A_1C_1} = L_1$, $\overline{A_2C_2} = L_2$, $\overline{OG} = r_g$ と表される．回転角をデカルト座標系の軸回りに取って軸名の添え字を付け，O 点を原点とする球座標系 (r, θ_y, θ_z) を用い，z-x 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_{yg}，y-z 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_{xg} を取り，G 点の座標 (x_g, y_g, z_g) は次式で表される:

$$\begin{cases} x_g = r_g \sin(\theta_{yg}) + x_0 + c_1, \\ y_g = r_g \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{xg}) + y_0, \\ z_g = r_g \cos(\theta_{yg}) \cos(\theta_{xg}) + z_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

また，G 点を原点とする球座標系を用いて，z-x 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_y，x-y 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_z を取り，A_1 点の座標 (x_1, y_1, z_1) と A_2 点の座標 (x_2, y_2, z_2) は次式で表される:

$$\begin{cases} x_1 = x_g - a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z), \\ y_1 = y_g - a_1 \cos(\theta_y) \sin(\theta_z), \\ z_1 = z_g + a_1 \sin(\theta_y) \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_g + a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z), \\ y_2 = y_g + a_1 \cos(\theta_y) \sin(\theta_z), \\ z_2 = z_g - a_1 \sin(\theta_y) \end{cases} \tag{2.3}$$

紐の長さが等しく $(L_2 = L_1)$ 一定である．また，$\overline{A_1A_2} = 2a_1$ は次の f_0 で表され，$\overline{A_1C_1} = L_1$ は f_1，$\overline{A_2C_2} = L_2$ は f_2 で表される: これらの条件は，弾性紐の

効果[12] の場合と比べ，解析過程が非常に異なることに特に注意されたい．水平面からの遊動円木の傾き角の関係式は f_3, f_4 で与えられる:

$$
\begin{cases}
f_0 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 = 4a_1^2, \\
f_1 = (x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2 - L_1^2 \\
= a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1c_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z) + r_g^2 \\
+2r_g\left(a_1\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_y)\right. \\
+(c_1 - a_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z))\sin(\theta_{yg}) \\
\left.-a_1\sin(\theta_{xg})\cos(\theta_y)\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_z)\right) = 0, \\
f_2 = (x_2-x_0-2c_1)^2 + (y_2-y_0)^2 + (z_2-z_0)^2 - L_2^2 \\
= a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1c_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z) \\
+r_g^2 - 2r_g\left(a_1\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_y)\right. \\
+(c_1 - a_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z))\sin(\theta_{yg}) \\
\left.-a_1\sin(\theta_{xg})\cos(\theta_y)\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_z)\right) = 0, \\
f_3 = -\dfrac{z_2-z_1}{x_2-x_1} = \sec(\theta_z)\tan(\theta_y), \\
f_4 = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \tan(\theta_z), \\
f_5 = \dfrac{z_2-z_1}{y_2-y_1} = -\csc(\theta_z)\tan(\theta_y)
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

紐の長さが等しく ($L_2 = L_1$) 一定であるから，f_1, f_2 の条件満たすことが求められる．f_1, f_2 の和を取ると，r_g を θ_y, θ_z で表現する式が得られる:

$$
\begin{aligned}
f_1 + f_2 &= 2\left(a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1c_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z) + r_g^2\right) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
r_g &= \sqrt{-\left(a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1c_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z)\right)} \\
&\equiv r_{g1}(\theta_y, \theta_z)
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

f_1, f_2 の差を取ると，角度の関係式が得られ，θ_y を個別の振動 mode を記述する変数 $\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z$ を基にして表現できる:

$$
\begin{aligned}
f_1 - f_2 = 4r_g &\left[a_1\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_y)\right. \\
&+(c_1 - a_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z))\sin(\theta_{yg}) \\
&\left.-a_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{xg})\sin(\theta_z)\right] = 0
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_y &= \arcsin(d_{11}/c_{11}) - \arcsin(b_{11}/c_{11}) \\
&\equiv \theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

但し，a_{11}-d_{11} は次のように定義した:

$$
\begin{cases}
a_{11} = \cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg}), \\
b_{11} = -\cos(\theta_z)\sin(\theta_{yg}) \\
-\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{xg})\sin(\theta_z), \\
c_{11} = \sqrt{a_{11}^2 + b_{11}^2}, \quad d_{11} = -\dfrac{c_1}{a_1}\sin(\theta_{yg})
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

この系の静止平衡状態は，5 つの時間の関数について $(r_g, \theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_y, \theta_z) = (r_{g0}, 0, 0, 0, 0)$ と表される．但し，r_{g0} は次式で定義される:

$$
r_{g0} = \sqrt{L_1^2 - (a_1 - c_1)^2}
\tag{2.10}
$$

静止平衡状態の回りで攪乱に対して (2.6), (2.8) 式を Taylor 展開し, 微小 parameter ϵ ($\epsilon \ll 1$) を用いて攪乱を $\epsilon\theta_{yg}$, $\epsilon\theta_{xg}, \epsilon\theta_z$ と表すと，θ_y, r_g は次のように近似される：

$$
\begin{aligned}
\theta_y = &\left(1 - \frac{c_1}{a_1}\right)\epsilon\theta_{yg} + \epsilon^2\theta_{xg}\theta_z \\
&+ \epsilon^3\left[\left(1 - \frac{c_1^2}{a_1^2}\right)\frac{c_1\theta_{yg}^3}{6a_1} + \frac{\theta_{yg}}{2}\left(\left(1 - \frac{c_1}{a_1}\right)\theta_{xg}^2 - \theta_z^2\right)\right] \\
&+ \epsilon^4\left[\frac{1}{3}\theta_{xg}^3\theta_z - \left(1 - \frac{c_1}{a_1}\right)\theta_{xg}\theta_{yg}^2\theta_z - \frac{1}{6}\theta_{xg}\theta_z^3\right] \\
&+ O(\epsilon^5) \equiv \theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z) = \theta_{y1}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
r_g = &\, r_{g0} - \frac{\epsilon^2 a_1 c_1}{2r_{g0}}\left(\theta_y^2 + \theta_z^2\right) \\
&+ \frac{\epsilon^4 a_1 c_1}{4r_{g0}}\left[\left(\frac{1}{6} - \frac{a_1c_1}{2r_{g0}^2}\right)\left(\theta_y^4 + \theta_z^4\right) + \left(1 - \frac{a_1c_1}{r_{g0}^2}\right)\theta_y^2\theta_z^2\right] \\
&+ O(\epsilon^6) \equiv r_{g1}(\theta_y, \theta_z) = r_{g1}(\theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z), \theta_z)
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

つまり，(2.12) 式の θ_y には (2.11) 式を代入して項を整理し，$O(\epsilon^4)$ まで取るものとする．

以上の表式を用いて，質量 m_1，慣性 moment J_y, J_z ($= J_y$) の遊動円木の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は, 次のように表される:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = &\frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2\right) + \frac{J_y}{2}\dot{\theta}_y^2 + \frac{J_z}{2}\epsilon^2\dot{\theta}_z^2\cos^2(\theta_y) + m_1 g z_g \\
= &\frac{m_1}{2}\dot{r}_g^2 + \frac{m_1}{2}\epsilon^2 r_g^2\left(\dot{\theta}_{xg}^2\cos^2(\epsilon\theta_{yg}) + \dot{\theta}_{yg}^2\right) + \frac{J_y}{2}\dot{\theta}_y^2 \\
&+ \frac{J_z}{2}\epsilon^2\dot{\theta}_z^2\cos^2(\theta_y) + m_1 g\left(r_g\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg}) + z_0\right) \\
&+ m_1\left[\dot{r}_g\dot{x}_0\sin(\epsilon\theta_{yg}) + \dot{r}_g\dot{y}_0\sin(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg})\right. \\
&+\dot{r}_g\dot{z}_0\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg}) + r_g\dot{x}_0\epsilon\dot{\theta}_{yg}\cos(\epsilon\theta_{yg}) \\
&-\epsilon r_g\dot{z}_0\left(\dot{\theta}_{xg}\sin(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg}) + \dot{\theta}_{yg}\cos(\epsilon\theta_{xg})\sin(\epsilon\theta_{yg})\right) \\
&\left.+\epsilon r_g\dot{y}_0\left(\dot{\theta}_{xg}\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg}) - \dot{\theta}_{yg}\sin(\epsilon\theta_{xg})\sin(\epsilon\theta_{yg})\right)\right] \\
&+ \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2\right)
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

ここでは，C_1 点の座標が時間の関数となる場合も含まれている．C_1 点が固定の場合には，$x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ であるから，遊動円木の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_0$ は，次のように表される:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{11} = &\frac{m_1}{2}\left(\dot{r}_g^2 + \epsilon^2 r_g^2\left(\dot{\theta}_{xg}^2\cos^2(\epsilon\theta_{xg}) + \dot{\theta}_{yg}^2\right)\right) \\
&+ \frac{J_y}{2}\dot{\theta}_y^2 + \frac{J_z}{2}\epsilon^2\dot{\theta}_z^2\cos^2(\theta_y) + m_1 g r_g\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg}) \\
= &\frac{m_1}{2}\left(\epsilon^2\left(\frac{\partial r_{g1}}{\partial(\epsilon\theta_{y1})}\dot{\theta}_{y1} + \frac{\partial r_{g1}}{\partial(\epsilon\theta_z)}\dot{\theta}_z\right)^2\right. \\
&\left.+\epsilon^2 r_{g1}^2\left(\dot{\theta}_{xg}^2\cos^2(\epsilon\theta_{xg}) + \dot{\theta}_{yg}^2\right)\right) \\
&+ \frac{J_y}{2}\epsilon^2\left(\frac{\partial\theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_{xg})}\dot{\theta}_{xg} + \frac{\partial\theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_{yg})}\dot{\theta}_{yg} + \frac{\partial\theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_z)}\dot{\theta}_z\right)^2 \\
&+ \frac{J_z}{2}\epsilon^2\dot{\theta}_z^2\cos^2(\theta_y) + m_1 g r_{g1}\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg})
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

ここで, 時間の未知関数は $r_g = r_{g1}(\theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z), \theta_z)$, $\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_y = \theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z), \theta_z$ であり，束縛条件 f_1,

f_2 により，運動を記述する上で基本となる変数 (未知関数) は 3 つである．この一般関係式に基づき，系の個々の振動 mode の記述との関連が求められる[9],[10]．3 つの mode の運動方程式は，報告[10] の (3.12), (3.13), (3.14) 式で与えられ，θ_{yg} (遊動円木 mode の角度), θ_{xg} (ブランコ mode の角度), θ_z (捩れ振動 mode の角度) に対する連立非線形微分方程式である．外部からの励振がない自立系の場合の運動方程式は (4.1), (4.2), (4.3) 式となり，計算例[11] が示された．なお，それらの導出過程では外力や damper は考慮されていないが，後から運動方程式に加えることができる．同じく，報告[10] の (5.1), (5.2) 式が mode 1, 2 間相互作用の運動方程式であり，(5.3), (5.4) 式が mode 2, 3 間相互作用の運動方程式であり，(5.5), (5.6) 式が mode 3, 1 間相互作用の運動方程式である．

報告[10] の個別 mode の運動方程式は，順に，(6.1) (遊動円木 mode の θ_{yg}), (6.2) (ブランコ mode の θ_{xg}), (6.3) (捩れ振動 mode の θ_z) 式であり，再掲する:

$$2m_{02}\ddot{\theta}_{yg} + 2u_{02}\theta_{yg} + n_{11}\ddot{x}_0 + n_{32}\epsilon\theta_{yg}\ddot{z}_0 + \epsilon^2\Big(4u_{13}\theta_{yg}^3 + 2m_{15}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg}^2 + 2m_{15}\theta_{yg}^2\ddot{\theta}_{yg} + n_{12}\theta_{yg}^2\ddot{x}_0\Big) = 0, \quad (2.15)$$

$$2m_{01}\ddot{\theta}_{xg} + 2u_{01}\theta_{xg} + n_{21}\ddot{y}_0 + n_{31}\epsilon\theta_{xg}\ddot{z}_0 + \epsilon^2\left(4u_{11}\theta_{xg}^3 + n_{22}\theta_{xg}^2\ddot{y}_0\right) = 0, \quad (2.16)$$

$$2m_{03}\ddot{\theta}_z + 2u_{03}\theta_z + n_{33}\epsilon\theta_z\ddot{z}_0 + \epsilon^2\Big(4u_{16}\theta_z^3 + 2m_{20}\theta_z\dot{\theta}_z^2 + 2m_{20}\theta_z^2\ddot{\theta}_z\Big) = 0 \quad (2.17)$$

運動方程式 (2.15), (2.16), (2.17) を線形化して，固有角振動数の表式を示す:

$$\omega_{01}^2 = \frac{12a_1 g\left((a_1-c_1)^3 - a_1L_1^2\right)}{r_{g0}\left((12a_1^2-b_1^2)(a_1-c_1)^2 - 12a_1^2L_1^2\right)}, \quad (2.18)$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{g}{\sqrt{-a_1^2+2a_1c_1-c_1^2+L_1^2}} = \frac{g}{r_{g0}}, \quad (2.19)$$

$$\omega_{03}^2 = \frac{12a_1c_1g}{b_1^2\sqrt{-a_1^2+2a_1c_1-c_1^2+L_1^2}} = \frac{12a_1c_1g}{b_1^2 r_{g0}} \quad (2.20)$$

但し，棒の全長 b_1 を用いて慣性 moment は $m_1b_1^2/12$ であり，$r_{g0} = \sqrt{L_1^2+(a_1-c_1)^2}$ と取る．先に線形固有角振動数が等しくなる条件式を解いて，3 つの mode が共に等しい条件 ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_{03}$) は 2 点吊り振子の配置の関係式 $c = b_1^2/(12a)$[7],[8] を導いている: つまり，3 mode 主共振あるいは内部共振が起こり得ることを意味する．さらに，本報告で扱う mode 3, 1 の連成振動において，2 点吊り振子の配置を換えることにより ω_{03}/ω_{01} が整数比となり，外力による高調波/分数調波共振や内部共振が発生する可能性があることを指摘しておく．本報告では，しかしながら，基本的な連成振動の特性を調べるに留め，稿を改めて解析を行う予定である．

3　2 点吊り振子の円木 mode と捩れ振動 mode の連成振動の数値解析

2 点吊り振子の規定値を $L_1 = 0.5$, $a = 0.2$, $b_1 = 0.6$ $m_1 = 1$, $g = 9.8$, $J_y = m_1b_1^2/12$, $\epsilon = 1$, $\omega_1 = 1$ とし，計算時間 $0 \le t \le t_e$，表示時間 $t_s \le t \le t_e$ ($t_s = 2\pi\times 90$, $t_e = 2\pi\times 100$) とし，**Table1** の設定値を用いて，数値計算した結果は，**Fig.2** (自由振動)，**Fig.3-8** (parameter 励振)，**Fig.9**, **10** (parameter 励振と強制振動) に示される．**Fig.2** は，線形共振点 $c = b_1^2/(12a) = 0.15$ での非線形自由振動であり，**Fig.2c**, **2d** の時系列図には，唸りが発生していることが示されている．

Table 1 Conditions for Computations.

$c = 0.15$, $x_0(t) = 0$, $y_0(t) = 0$, $z_0(t) = 0$, $\theta_{yg}(0) = 0.3$, $\theta_z(0) = 0.3$ (**Fig.2**)
$c = 0.15$, $x_0(t) = A_0\sin(\omega_1 t)$ ($A_0 = 0.3$), $z_0(t) = 0$, $\theta_{yg}(0) = 0.03$, $\theta_z(0) = 0.03$ (**Fig.3**)
$c = 0.6$, $x_0(t) = A_0\sin(\omega_1 t)$ ($A_0 = 0.3$), $z_0(t) = 0$, $\theta_{yg}(0) = 0.03$, $\theta_z(0) = 0.03$ (**Fig.4**)
$c = 0.15$, $x_0(t) = 0$, $z_0(t) = B_0\cos(\omega_1 t)$ ($B_0 = 0.3$), $\theta_{yg}(0) = 0.03$, $\theta_z(0) = 0.03$ (**Fig.5**)
$c = 0.05$, $x_0(t) = 0$, $z_0(t) = B_0\cos(\omega_1 t)$ ($B_0 = 0.3$), $\theta_{yg}(0) = 0.03$, $\theta_z(0) = 0.03$ (**Fig.6**)
$c = 0.15$, $x_0(t) = A_0\sin(\omega_1 t)$, $z_0(t) = B_0\cos(\omega_1 t)$ ($A_0 = B_0 = 0.3$), $\theta_{yg}(0) = 0.03$, $\theta_z(0) = 0.03$ (**Fig.7**)
$c = 0.6$, $x_0(t) = A_0\sin(\omega_1 t)$, $z_0(t) = B_0\cos(\omega_1 t)$ ($A_0 = B_0 = 0.3$), $\theta_{yg}(0) = 0.03$, $\theta_z(0) = 0.03$ (**Fig.8**)
$c = 0.6$, $x_0(t) = A_0\sin(\omega_1 t)$, $z_0(t) = B_0\cos(\omega_1 t)$ ($A_0 = B_0 = 0.3$), $F_{yg}(t) = F_0\sin(\omega_1 t)$ ($F_0 = 0.1$), damper $c_{11} = 0.01$, $c_{12} = 0.001$, $\theta_{yg}(0) = 0.03$, $\theta_z(0) = 0.03$ (**Fig.9**)
$c = 0.6$, $x_0(t) = A_0\sin(\omega_1 t)$, $z_0(t) = B_0\cos(\omega_1 t)$ ($A_0 = B_0 = 0.3$), $F_z(t) = F_0\sin(\omega_1 t)$ ($F_0 = 0.1$), damper $c_{11} = 0.01$, $c_{12} = 0.001$, $\theta_{yg}(0) = 0.03$, $\theta_z(0) = 0.03$ (**Fig.10**)

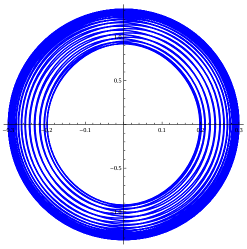

Fig.2a Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

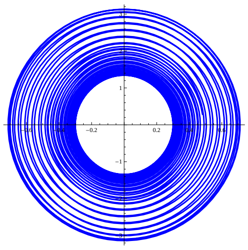

Fig.2b Phase portrait of $(\theta_z(t), \dot{\theta}_z(t))$.

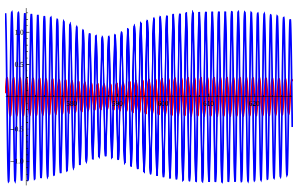

Fig.2c Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

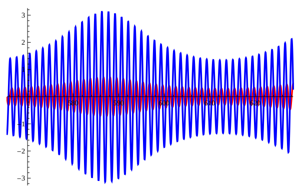

Fig.2d Time sequence of $\theta_z(t)$ and $\dot{\theta}_z(t)$ versus t.

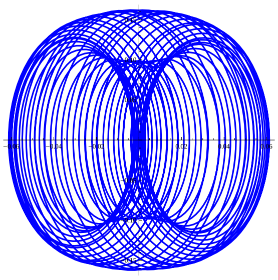

Fig.3a Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

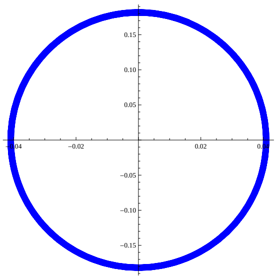

Fig.3b Phase portrait of $(\theta_z(t), \dot{\theta}_z(t))$.

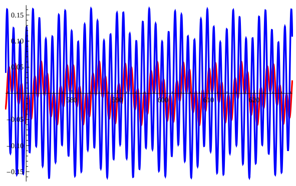

Fig.3c Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

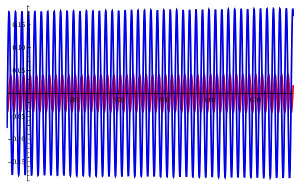

Fig.3d Time sequence of $\theta_z(t)$ and $\dot{\theta}_z(t)$ versus t.

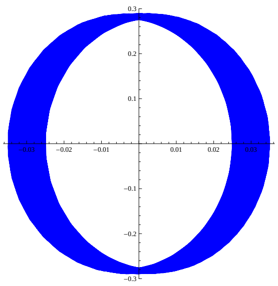

Fig.4a Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

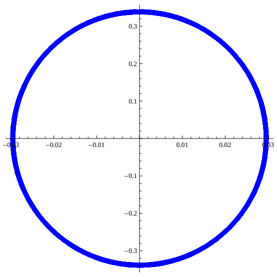

Fig.4b Phase portrait of $(\theta_z(t), \dot{\theta}_z(t))$.

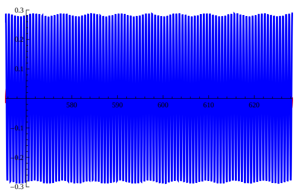

Fig.4c Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

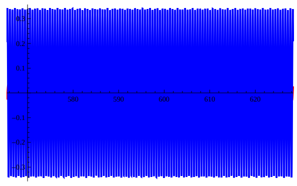

Fig.4d Time sequence of $\theta_z(t)$ and $\dot{\theta}_z(t)$ versus t.

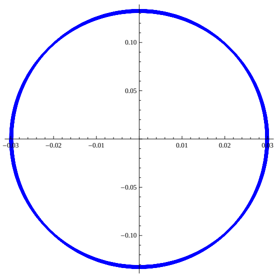

Fig.5a Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

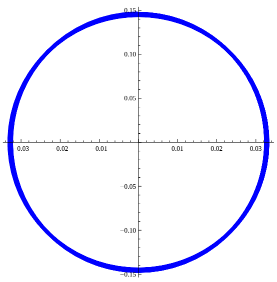

Fig.5b Phase portrait of $(\theta_z(t), \dot{\theta}_z(t))$.

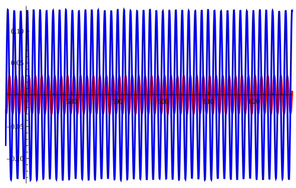

Fig.5c Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

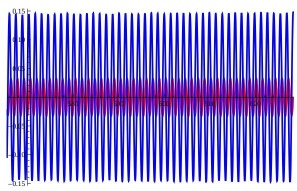

Fig.5d Time sequence of $\theta_z(t)$ and $\dot{\theta}_z(t)$ versus t.

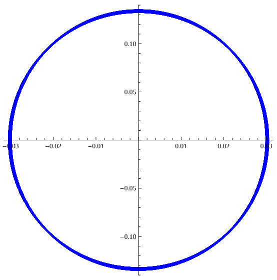

Fig.6a Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

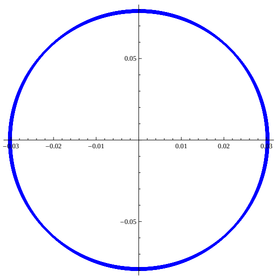

Fig.6b Phase portrait of $(\theta_z(t), \dot{\theta}_z(t))$.

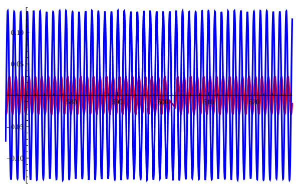

Fig.6c Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

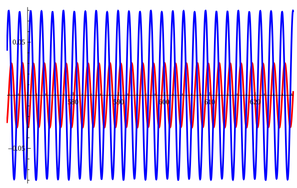

Fig.6d Time sequence of $\theta_z(t)$ and $\dot{\theta}_z(t)$ versus t.

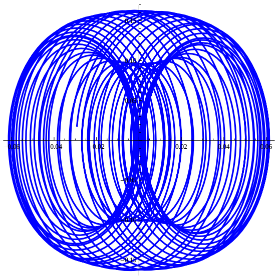

Fig.7a Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

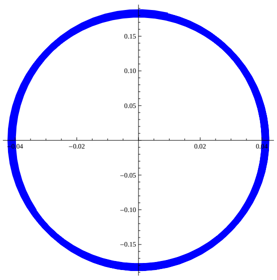

Fig.7b Phase portrait of $(\theta_z(t), \dot{\theta}_z(t))$.

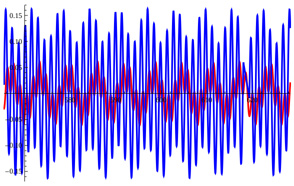

Fig.7c Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

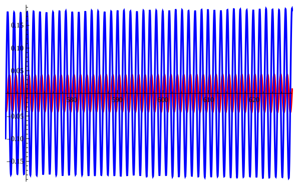

Fig.7d Time sequence of $\theta_z(t)$ and $\dot{\theta}_z(t)$ versus t.

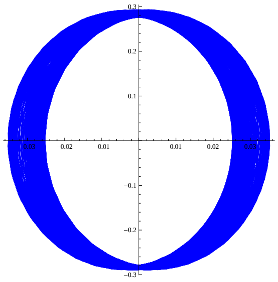

Fig.8a Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

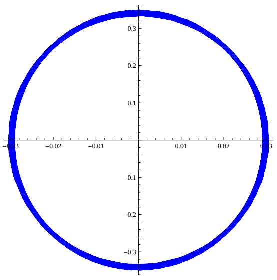

Fig.8b Phase portrait of $(\theta_z(t), \dot{\theta}_z(t))$.

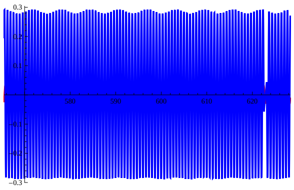

Fig.8c Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

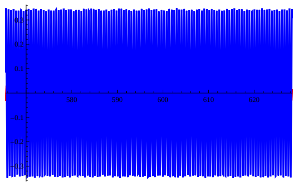

Fig.8d Time sequence of $\theta_z(t)$ and $\dot{\theta}_z(t)$ versus t.

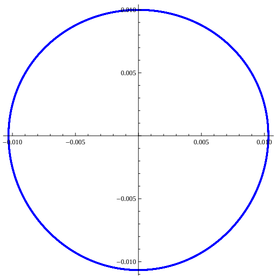

Fig.9a Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

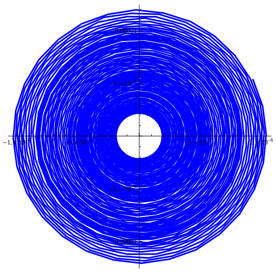

Fig.9b Phase portrait of $(\theta_z(t), \dot{\theta}_z(t))$.

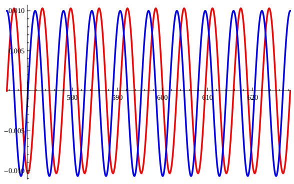

Fig.9c Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

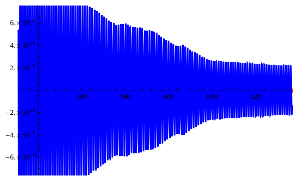

Fig.9d Time sequence of $\theta_z(t)$ and $\dot{\theta}_z(t)$ versus t.

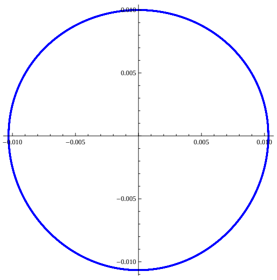

Fig.10a Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

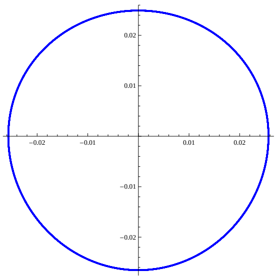

Fig.10b Phase portrait of $(\theta_z(t), \dot{\theta}_z(t))$.

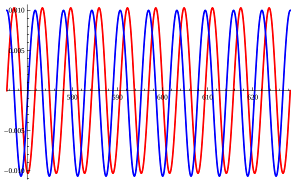

Fig.10c Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

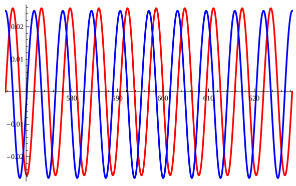

Fig.10d Time sequence of $\theta_z(t)$ and $\dot{\theta}_z(t)$ versus t.

parameter 励振 (**Fig.3-8**) では，励振の代表的な場合に対し，$c = a$ を基準に c が大きい/小さい場合の計算結果を示した．3 次元励振と 2 点吊り振子の配置の多くの組合せが可能であるが，目下様々な組合せの計算を進めており，それらの結果は十分に分類できていない．

強制振動と parameter 励振では，θ_{yg} 方向の運動方程式に外力を加えた場合 (**Fig.9**) と θ_z 方向の運動方程式に外力を加えた場合 (**Fig.10**) の例を示した．そこでは，θ_z の運動方程式の減衰係数値の取り方が微妙に計算結果に影響することが分かっている．

4　おわりに

本研究は，文献[1] に刺激されて始まっているが，3 つの振動 mode があり，質量や慣性 moment の振子運動への影響に注目し教材として整備する計画で進めて来た．前報告では，2 点吊り振子の 3 つの振動 mode の実測値と線形理論値との対応を述べ，様々な解析を行い，非線形連成振動が起こることが理論的・実験的に確認された．mode

1, 2, 3 を同時に扱う場合には，水平上壁面上を原点とし棒の質量中心に向けて球座標系を取り，さらにその質量中心を原点とする球座標系で棒の姿勢を記述し，棒上の紐の結び目から上壁面の結び目までの距離 (紐の長さ) が一定に保たれる拘束条件を課している[8]–[10]．一連の報告の第一報[9] では，mode 1, 2, 3 の運動の記述と個々の記述の確認を行い，3 つの mode の相互作用が起こることを示し，第二報[10] では，mode 1, 2, 3 の運動の記述と 2 つずつの mode の相互作用並びに個々の運動を記述する運動方程式を示した．第三報[11] では，3 つの mode の相互作用の数値計算例を示した．加えて，本報告では，振れ振動 mode (mode 3) と遊動円木 mode (mode 1) の連成振動 (自由振動，parameter 励振，強制振動) を数値解析した．これらの系では，線形振動では互いに独立で，非線形連成振動が起こることが特徴である．自由振動の計算例では，線形共振点での計算例を示した．parameter 励振・強制振動では，3 次元的加振の組合せにより，複雑な挙動が見られる．mode1 のみまたは mode3 のみの場合には，2 点吊り振子の配置により非線形軟性/硬性バネ特性が現れるが，2 つが混在する場合にはまだ分類ができていない．

一方，紐の伸縮を許す場合の問題の定式化は報告[12] で行っており，今後，本報告の問題との関連や差異を検討し，個々の振動問題の解析を行う．また，従来の表現による mode 間相互作用の報告[13]–[15] も参照されたい．

本報告の一部は，先に第 60 回理論応用力学講演会[7] 並びに日本機械学会 2011 年度年次大会[8] において講演したことを付記する．

本研究遂行にあたり，本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して，柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] 川口 衛，立道 郁生: “21318 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 1 原理と免震床の実大実験” 学術講演梗概集. B-2, 構造 II, 振動, 原子力プラント 2000 (2000), pp.635-636(社団法人日本建築学会).

[2] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), pp.55-60.

[3] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，中道 義之:“2 点吊り振子の振り振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), pp.83-88.

[4] 望月 孔二，鈴木 秀，舟田 敏雄，岩本 大，宮内 太積，大庭 勝久，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の 3 つの線形振動 mode の実験と解析” 沼津高専研究報告 第 45 号 (2011), pp.163-168.

[5] 鈴木 秀, 舟田 敏雄, 金子 裕哉, 宮内 太積, 福田 克也: “2 点吊り振子と剛体振子の振動実験と解析” 日本機械学会東海支部 東海学生会　第 42 回学生員卒業研究発表講演会，2011 年 3 月 13 日 (日) 豊橋技術科学大学，第 9 室 10:50 〜 12:14 機械力学・計測・制御　講演番号 909，講演前刷集 (日本機械学会東海学生会 平成 23 年 3 月 1 日発行) CD/ROM，pp.268-269.

[6] 宮内 太積，福田 克也，鈴木 秀，金子 裕哉，舟田 敏雄: “ 2 点吊り振子の非線形内部共振の解析 ” 日本機械学会東海支部東海支部第 60 期総会・講演会 (支部 60 周年記念行事) 豊橋技術科学大学，第 8 室 (A207 教室) 3 月 14 日 (月) OS5 振動解析と制振 OS5-2 非線形振動 10:45〜12:00 講演番号 811 東海支部第 60 期総会講演会講演論文集 No. 113-1 (日本機械学会東海支部 2011 年 3 月 1 日発行), pp.403-404.

[7] 舟田 敏雄，鈴木 秀，金子 裕哉，ビン モハマド イドロス ムハマド イッザト，大庭 勝久，中道 義之，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二，川上 誠: “ 2 点吊り振子の mode 間相互作用と内部共振の数値解析 ” 第 60 回理論応用力学講演会 3 月 9 日 (水) 第 4 室 9:30-9:45 OS12-4 機械系及び構造物系の振動制御 講演番号 OS12-10，講演論文集 OS12-10.pdf

[8] 舟田 敏雄，宮内 太積，大庭 勝久，中道 義之，青木 悠祐，出川 智啓，望月 孔二: “2 点吊り振子の連成振動と内部共振の数値解析” 日本機械学会 2011 年度年次大会 『機械工学が牽引するイノベーション』，2011 年 9 月 11 日 (日)〜15 日 (木)，東京工業大学 大岡山キャンパス，[OS] G100 機械力学・計測制御部門 一般セッションセッション，9 月 13 日 (火) 9:00-10:00 会場：W242，講演番号 G100033．日本機械学会 2011 年度年次大会 講演論文集 DVDROM G100033.pdf.

[9] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の 3 つの mode 間相互作用の解析 (1)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[10] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の 3 つの mode 間相互作用の解析 (2)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[11] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の 3

つの mode 間相互作用の解析 (3)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[12] 木ノ内 智貴，舟田 敏雄，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り物理振子の振動解析: 弾性紐の効果” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[13] 舟田 敏雄，鈴木 秀，金子 裕哉，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二，川上 誠; “2 点吊り振子の mode 間相互作用と外力と外部励振による内部共振の数値解析” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[14] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の mode 間相互作用と外力と外部励振による内部共振の数値解析 (2)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[15] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の mode 間相互作用と外力と外部励振による内部共振の数値解析 (3)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.