2点吊り振子の線形運動解析

望月 孔二[*1*2] 宮内 太積[*2*3] 舟田 敏雄[*2*4] 佐々木 隆吾[*4] マズニ アル イルファン[*4]
川船 雄一郎[*4] 川上 誠[*2*4] 中道 義之[*2*5]

Linear Dynamic Analysis of a Bifilar Suspension Pendulum

Kouji MOCHIZUKI[*1*2] Tatsumi MIYAUCHI[*2*3] Toshio FUNADA[*2*4] Ryugo SASAKI[*4]
Mazni Al IRFAN[*4] Yuichirou KAWAFUNE[*4] Makoto KAWAKAMI[*2*4] and Yoshiyuki NAKAMICHI[*2*5]

Abstract: A bifilar suspension pendulum, a uniform density bar suspended at its two ends by two strings of same length, may swing in a vertical plane. The period and pattern of swinging depend upon the ratio of the bar length to the distance between two end points of the strings attached to an upper wall. When a body is put on the center of the bar, the system may become unstable or stable (in oscillation), which is specified by the height of the mass center of the body from the bar and the ratio. When the ratio is unity, the system is always stable. The most typical feature is clarified in more detail by extending the proceeding work. It also turns out that the most unstable configuration may arise when the height and the ratio are both small. These typical results may be applied for the mitigation in Earthquake Engineering and Seismic Design.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Linear Stability Analysis, Multi-Suspended Pendulums

1　はじめに

2点吊り振子の力学問題[1]–[3] では，2本の糸で一様な密度の棒 (遊動円木) の端を吊り下げている静止平衡状態について，座標値を用いて束縛条件が記述され，それを平面極座標による角度の非線形関数方程式として，図式解法により解いた．しかし，その座標値間の関係式の逆変換が多価関数であるため厳密な扱いは面倒になる．この静止平衡状態周りの振子運動は，糸と円木の成す鉛直面内で揺れる “mode 1” とそれに垂直な鉛直面内で揺れる “mode 2” がある．「2本吊り」[4] として，鉛直軸回りの円木の捩れ振動は，“mode 3” に分類され，その静止平衡状態の角度の関数方程式も図式解法で解かれた．また，“mode 1” の変形に「襷がけ振子」[5] がある．先行研究[1]–[3] の線形自由振動の結果を踏まえ，本報告でより詳細な検討を行い，安定な振動のみならず不安定性も解析される．その結果を踏まえ，さらに支持点の時間的変位による励振問題や非線形振動問題へと展開される．

2　2点吊り振子の静止平衡状態周りの揺動

水平面上の2点 C_1, C_2 (距離 $2c$) に長さ L_1, L_2 の糸の端を繋ぎ，他端を長さ $2a$ の円木の端点 A, B に繋いで，円木を吊り下げると，重力の作用で円木を鉛直面 C_1, A, B, C_2 内で揺動させることができる．これを2点吊り振子 (“mode 1” の振動) と呼ぶ．**Fig.1** には $c > a$ で $L_2 = L_1$ の配置の一様密度の円木の振子 (対称2点吊り振子) の静止平衡状態が示されており，破線のように運動するとき糸の振れと円木の振れ (傾き) が逆位相となり，円木は並進・回転運動する．一方，$c < a$ の場合では糸と円木の振れが同位相となる．ほかに，並進振子 ($c = a$) の場合には，振子が揺れても円木は水平に保たれ，円木は並進運動する．$c = 0$ では物理振子となり，$a = 0$ では円木を質点と見做せて “V 字型振子” となる (なお，“V 字型振子” が「2点吊り振子」または「bifilar suspension pendulum」を表す場合があり，注意されたい．さらに，Newton の揺りかごの振子を V 字型振子と呼ぶ場合もある)．

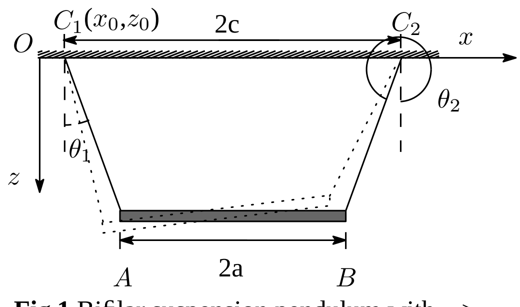

Fig.1 Bifilar suspension pendulum with $c > a$.

Fig.1 の振子の配置を表すために，デカルト座標系 (x, y, z) の原点を O に取り，右向き水平に x 軸，鉛直下方に z 軸を取る．糸に束縛されて，円木は一般には3次元運動するが，ここでは $y = 0$ の鉛直面内で2次元運動すると仮定する．左側支持点 C_1 の位置を (x_0, z_0) と表し，静止壁面の場合には一定値とし，壁面の時間変位を考慮するときには (x_0, z_0) を時間の既知関数とする． 右側支持点 C_2 の位置は $(x_0 + 2c, z_0)$ と表わされる． 鉛直面 C_1, A, B, C_2 内に取った平面極座標系 (r, θ) を用い，左側支持点 C_1 を通る鉛直軸と糸が成す角度を θ_1 とし，右側支持点 C_2 を通る鉛直軸と糸が成す角度を θ_2 と表すと，円木の各端点

[*1] 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.
[*2] 専攻科: Advanced Engineering Course.
[*3] 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.
[*4] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
[*5] 総合情報センター: Information Technology Center.

の座標は次式で表される:

$$\begin{cases} 左側端点\ A : (x_A,\ z_A) \\ \qquad = (x_0 + L_1 \sin(\theta_1),\ z_0 + L_1 \cos(\theta_1)), \\ 右側端点\ B : (x_B,\ z_B) \\ \qquad = (x_0 + 2c + L_2 \sin(\theta_2),\ z_0 + L_2 \cos(\theta_2)) \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで，円木が一様な線密度 ρ を持つとすると，円木の質量は $m_1 = 2a\rho$ であり，重心の位置 (x_G, z_G) は，円木の中央になるから，次のように表される:

$$x_G = (x_A + x_B)/2,\ \ z_G = (z_A + z_B)/2 \tag{2.2}$$

円木の並進運動は (x_G, z_G) を用いて記述され，円木の重心回りの鉛直面内の回転 (y 軸回りの回転) は角度 φ で記述される．水平面を基準として測った円木の傾き角度 φ は，次式で定義される:

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= -\frac{z_B - z_A}{x_B - x_A} \\ &= -\frac{L_2 \cos(\theta_2) - L_1 \cos(\theta_1)}{2c + L_2 \sin(\theta_2) - L_1 \sin(\theta_1)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

これらを用いて，円木の端点間の距離 (円木の長さ) の自乗 $(2a)^2$ が求められる:

$$(2a)^2 = (x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \tag{2.4}$$

(2.4) 式を考慮して，等高線処理による作図のために，関数 $F(\theta_1, \theta_2)$ を次式で定義する:

$$\begin{aligned} F(\theta_1, \theta_2) &\equiv (x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - (2a)^2 \\ &= (2c + L_2 \sin(\theta_2) - L_1 \sin(\theta_1))^2 \\ &\quad + (\ L_2 \cos(\theta_2) - L_1 \cos(\theta_1))^2 - (2a)^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

即ち，$F(\theta_1, \theta_2) = 0$ が (2.4) 式であり，角度 θ_1 ($-\pi/2 \le \theta_1 \le \pi/2$) と θ_2 ($3\pi/2 \le \theta_2 \le 5\pi/2$) の間の関係を与える超越方程式であり，解は解析的に求められる．

糸の長さが等しい場合 ($L_1 = L_2$) には，対称 2 点吊り振子 (振子が静止平衡状態において，糸の張力と円木の自重の釣合並びに力の moment の釣合により，鉛直軸に対して左右対称に配置されることを意味する) である．

2.1 対称 2 点吊り振子の静止平衡状態と攪乱状態

対称 2 点吊り振子の静止平衡状態は $\theta_1 = \alpha, \theta_2 = 2\pi - \alpha$, $F_s(\theta_1, \theta_2) = 0$ と表され，解 α が求められる:

$$\begin{aligned} F_s(\theta_1, \theta_2) &= F_s(\alpha, 2\pi - \alpha) = 0 \\ &= 4c^2 - 4a^2 - 8cL_1 \sin(\alpha) + 4L_1^2 \sin^2(\alpha) \\ \sin(\alpha) &= \frac{c \mp a}{L_1} \ \rightarrow\ \alpha = \arcsin\left(\frac{c \mp a}{L_1}\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

静止平衡解 α ($-\pi/2 \le \alpha \le \pi/2$) が存在するための条件は，$|(c \mp a)/L_1| \le 1$ である．(2.6) 式の復号の正の場合 (区別のため $\alpha = \alpha_2$ と表す) は，襷がけ振子の静止平衡状態を表す．ここでは，復号の負の場合 ($\alpha = \alpha_1$) を扱う．

ここで，$h = L_1 \cos(\alpha_1)$ とおいて，振子の静止平衡状態を規定する parameter α_1, β を次式で定義する:

$$\tan(\alpha_1) = \frac{c - a}{h},\ \ \beta = \frac{c}{a} \tag{2.7}$$

これは，$0 < \alpha_1 < \pi/2$ のときに $\tan(\alpha_1) > 0, \beta > 1$ (つまり **Fig.1** の配置の静止平衡状態) となり，$-\pi/2 \le \alpha_1 < 0$ のときには $\tan(\alpha_1) < 0, \beta < 1$ である．特別な場合として，$\beta = 0$ ($\alpha_1 < 0$) は C_1, C_2 点が 1 点となる場合 (物理振子) である．また，$\beta = 1$ ($a = c, \alpha_1 = 0$) は C_1, A, B, C_2 点は静止平衡状態では長方形の頂点となり，運動するときには平行四辺形となるから，円木 AB の姿勢は水平に保たれる．この場合が並進振子である．

2.2 静止平衡状態周りの円木の攪乱の記述と円木の運動

対称 2 点吊り振子の場合，静止平衡解に攪乱 θ_{11}, θ_{21} を加えて，次のように表すことができる:

$$\begin{aligned} &F_s(\alpha_1 + \theta_{11}, 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21}) \\ &\quad = d_1 + a_1 \sin(\theta_{21}) - b_1 \cos(\theta_{21}) \\ &\quad = d_1 + c_1 \sin(\theta_{21} - \gamma) = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

ここに含まれる角度 $\gamma \equiv \gamma(\theta_{11})$ は次式で定義される:

$$\gamma = \arcsin(b_1/c_1)\ \ (-\pi/2 \le \gamma \le \pi/2) \tag{2.9}$$

また，(2.8) 式の係数 a_1-d_1 は次式で定義される:

$$\begin{cases} a_1 = 4cL_1 \cos(\alpha_1) - 2L_1^2 \sin(2\alpha_1 + \theta_{11}), \\ b_1 = 2L_1^2 \cos(2\alpha_1 + \theta_{11}) + 4cL_1 \sin(\alpha_1), \\ c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \\ d_1 = 4c^2 - 4a^2 + 2L_1^2 - 4cL_1 \sin(\alpha_1 + \theta_{11}) \end{cases} \tag{2.10}$$

これらを用いて (2.8) 式が書き換えられ，θ_{21} は θ_{11} の関数で表される:

$$\theta_{21} \equiv \theta_{21}(\theta_{11}) = \gamma - \arcsin\left(\frac{d_1}{c_1}\right) \tag{2.11}$$

この解と等高線処理による図式解法で得られた解 $F_s(\alpha_1 + \theta_{11}, 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21}) = 0$ を比較すると，(2.11) 式の解析解 $\theta_{21}(\theta_{11})$ は，解が θ_{11} の一価関数として表されている領域では完全に図式解法の解と一致することが分かる．更に，三角関数の逆関数 (多価関数) の領域ごとの表現に対応して解析解を構成する必要がある．

以上の $\theta_{21}(\theta_{11})$ の解析結果を考慮して，φ の関係式は次のようになり，逆正接関数を用いて，φ の解析的表現 $\varphi = 0 + \varphi_1$ ($\varphi_1 \equiv \varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$) が求められる:

$$\tan(\varphi_1) = -\frac{\cos(\alpha_1 - \theta_{21}) - \cos(\alpha_1 + \theta_{11})}{2c/L_1 - \sin(\alpha_1 - \theta_{21}) - \sin(\alpha_1 + \theta_{11})} \tag{2.12}$$

この場合，関数 $\theta_{21}(\theta_{11})$ は (2.11) 式の逆正弦関数の定義領域の制限に影響されるので注意が必要である．

円木の並進運動は (2.2) 式の (x_G, z_G) を用いて記述され，θ_{21} は θ_{11} の関数である．円木の重心回りの鉛直面内

の回転 (y 軸回りの回転) は (2.12) 式の角度 $\varphi = 0 + \varphi_1$ で記述され，φ_1 は θ_{11}, θ_{21} の関数である．重心回りの円木の慣性 moment J は $J = 2\rho a^3/3 = m_1 a^2/3$ と求められ，回転の運動 energy は $J\dot{\varphi}_1^2/2$ と表される．また，重力 potential energy は $-m_1 g z_G$ である．よって，円木の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_1$ は次のように表される:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2\right) + \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2 + m_1 g z_G \tag{2.13}$$

この Lagrange 関数 $\mathcal{L}_1$ は，静止平衡状態と攪乱状態の重ね合わせ ($\theta_1 = \alpha_1 + \theta_{11}, \theta_2 = 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21}, \varphi = 0 + \varphi_1$) で表現されて，静止平衡解の周りで攪乱 θ_{11}, $\theta_{21}(\theta_{11})$, $\varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$ に対して整理でき，次の $\mathcal{L}_{10}$ で表される:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{10} = K_1 - U_1, \\ K_1 = \dfrac{J}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\theta_{11}}\right)^2 \dot{\theta}_{11}^2 + \dfrac{m_1}{8}L_1^2\left[1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}\theta_{21}}{\mathrm{d}\theta_{11}}\right)^2\right. \\ \qquad \left. + 2\cos(2\alpha_1 + \theta_{11} - \theta_{21})\dfrac{\mathrm{d}\theta_{21}}{\mathrm{d}\theta_{11}}\right]\dot{\theta}_{11}^2 \\ U_1 = -m_1 g \dfrac{L_1}{2}\left[\cos(\alpha_1 + \theta_{11})\right. \\ \qquad \left. + \cos(\alpha_1 - \theta_{21})\right] - m_1 g z_0 \end{cases} \tag{2.14}$$

ここで，(2.11) 式により，$\dot{\theta}_{21} = \dot{\theta}_{11}\left(\mathrm{d}\theta_{21}/\mathrm{d}\theta_{11}\right)$ である．$\dot{\varphi}_1$ は，(2.12) 式と (2.11) 式により，θ_{11}, θ_{21} で表される．故に，(2.14) 式は円木の運動を角度攪乱 θ_{11} で記述している．

静止壁面の場合, 円木は自由振動し, Lagrange 関数 (2.14) を構成している運動 energy K_1 と重力 potential energy U_1 の和の力学的 energy E_1 は保存量である:

$$E_1 = K_1 + U_1 \tag{2.15}$$

これにより，位相面図を描き，E_1 が一定値のときの運動の特徴を表示できる．なお，重力 potential energy U_1 に基づき，2.4 節で運動の特徴が説明される．また，E_1 が保存することは，数値計算精度の保証を得るために用いられる．

2.3　対称 2 点吊り振子上の物体の運動

Fig.2 は円木上に物体がある場合の静止平衡状態を表し，円木の重心位置から物体の重心までの高さは h_g である．

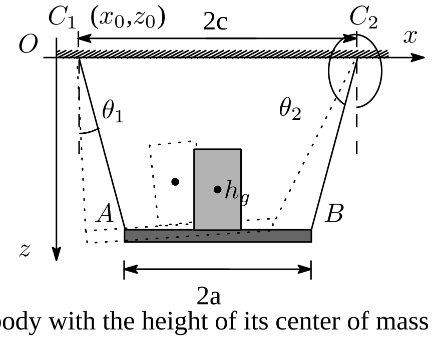

Fig.2 A body with the height of its center of mass h_g, on the bifilar suspension pendulum.

円木と共に物体も傾くとき，回転 moment を生じる．円木に載せた質量 m_2 の物体の重心の座標 (x_{G2}, z_{G2}) は，重心の高さ h_g を用いて，次のように表わされる:

$$x_{G2} = x_G - h_g\sin(\varphi) \quad z_{G2} = z_G - h_g\cos(\varphi) \tag{2.16}$$

物体の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_2$ は，物体重心の並進運動と重心回りの回転運動と重力を考慮して，次のように表される:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_{G2}^2 + \dot{z}_{G2}^2\right) + \frac{J_2}{2}\dot{\varphi}^2 + m_2 g z_{G2} \tag{2.17}$$

これに (2.16) 式を代入して整理し，次の $\mathcal{L}_{20}$ を得る:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{20} = K_2 - U_2, \\ K_2 = \dfrac{m_2}{8}L_1^2\left[1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}\theta_{21}}{\mathrm{d}\theta_{11}}\right)^2\right. \\ \qquad \left. + 2\cos(2\alpha_1 + \theta_{11} - \theta_{21})\dfrac{\mathrm{d}\theta_{21}}{\mathrm{d}\theta_{11}}\right]\dot{\theta}_{11}^2 \\ \qquad - \dfrac{m_2}{2}L_1 h_g\left[\cos\left(\alpha_1 + \theta_{11} - \varphi_1\right)\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\theta_{11}}\right. \\ \qquad \left. + \cos\left(\alpha_1 - \theta_{21} + \varphi_1\right)\dfrac{\mathrm{d}\theta_{21}}{\mathrm{d}\theta_{11}}\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\theta_{11}}\right]\dot{\theta}_{11}^2 \\ \qquad + \dfrac{J + m_2 h_g^2}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\theta_{11}}\right)^2\dot{\theta}_{11}^2, \\ U_2 = -m_2 g z_0 - m_2 g\left[\dfrac{L_1}{2}\left[\cos(\alpha_1 + \theta_{11})\right.\right. \\ \qquad \left.\left. + \cos(\alpha_1 - \theta_{21})\right] - h_g\cos(\varphi_1)\right] \end{cases} \tag{2.18}$$

ここでも，(2.11) 式により，$\dot{\theta}_{21} = \dot{\theta}_{11}\left(\mathrm{d}\theta_{21}/\mathrm{d}\theta_{11}\right)$ である．$\dot{\varphi}_1$ は，(2.12), (2.11) 式により θ_{11}, θ_{21} で表される．その結果，(2.18) 式は物体の運動を角度攪乱 θ_{11} で記述できる．

静止壁面の場合, 物体は自由振動し, Lagrange 関数 (2.18) を構成している運動 energy K_2 と重力 potential energy U_2 の和の力学的 energy E_2 は保存量である:

$$E_2 = K_2 + U_2 \tag{2.19}$$

これにより，位相面図を描き，E_2 が一定値のときの運動の特徴を表示できる．E_2 が保存することは，数値計算精度の保証を得るために用いられる．重力 potential energy U_2 は次の小節で説明される．

2.4　線形振動系を記述する角度攪乱の近似式

攪乱 θ_{11}, $\theta_{21}(\theta_{11})$, $\varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$ を用いて対称 2 点吊り振子の運動を記述するとき，時間の未知関数 $\theta_{11}(t)$ により Lagrange 関数や運動方程式が表現され，運動方程式を解いて攪乱の時間発展が求められる．このとき，$\theta_{21}(\theta_{11})$, $\varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$ が θ_{11} の一価関数であり，それらの時間微分の表式があまり複雑でないことが必要である．実際，(2.11), (2.12) 式の変数と parameter を文字式のままで円木・物体・小振子の座標値を表現し，角度を時間の未知関数として Lagrange 関数や運動方程式を導出することは Mathematica6J (RAM2GB) では困難であり，表式の置き換えや数値化が必要となる．ここでは，静止平衡解からの摂動として攪乱 θ_{11}, $\theta_{21}(\theta_{11})$, $\varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$ が小さいと

仮定して，(2.11) 式を $\theta_{11}=0$ の周りで Taylor 展開して θ_{11} の 2 次の多項式を求めて次のように表す:

$$\theta_{22}(\theta_{11})=\theta_{220}+\theta_{221}\theta_{11}+\theta_{222}\theta_{11}^2 \tag{2.20}$$

但し，先の検討結果により，(2.20) 式中の係数について $\theta_{220}=0$, $\theta_{221}=1$ が成り立つ．θ_{222} は，それぞれの場合で異なる値を取り，a, c, L_1, α_1 の関数である．$a=1$, $L_1=1$ の場合には，θ_{222} は β の関数となる:

$$\theta_{222}=\frac{(1-\beta)\sqrt{\beta}}{\sqrt{2-\beta}} \tag{2.21}$$

同様に，φ の定義式 (2.12) を平衡解の周りで展開して，次の近似式 $\varphi\sim\varphi_2$ を得る:

$$\varphi_2=-\beta_1\left[\theta_{11}+\frac{\theta_{222}}{2}\theta_{11}^2\right] \tag{2.22}$$

振子の運動では，水平変位の Taylor 展開は角度攪乱 θ_{11} の 1 次の項から始まり，鉛直変位は θ_{11} の 2 次の項から始まる．従って，水平変位による運動 energy は 2 次の項から始まる．鉛直変位による運動 energy は 4 次の項から始まるので線形振動では無視できる．一方，重力 potential energy は鉛直変位で記述されるので，2 次の項から始まる．これらを考慮して Lagrange 関数を攪乱の 2 次の項までで構成し，Lagrange の運動方程式 (線形化運動方程式) を導くことができる．

3　対称 2 点吊り振子の線形化運動

円木と物体の重心の座標値 (2.2), (2.16) の近似表現は，(2.20), (2.22) 式を用いて，x 座標は θ_{11} の 1 次の項まで，z 座標は 2 次の項まで取り，次のようになる:

$$\begin{cases} x_G=x_0+a\beta+h\theta_{11}, \\ z_G=z_0+h-\dfrac{1}{2}(h-a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2, \\ x_{G2}=x_0+a\beta+(h+h_g\beta_1)\theta_{11}, \\ z_{G2}=z_0+h-h_g \\ +\dfrac{1}{2}\left(-h+a\theta_{222}\beta_1+h_g\beta_1^2\right)\theta_{11}^2, \end{cases} \tag{3.1}$$

これらにより，円木と物体の運動が θ_{11} で記述される．

3.1　円木の線形化運動

円木の線形化運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_{11}$ は次のように表される:

$$\mathcal{L}_{11}=\frac{m_1}{2}\dot{x}_G^2+\frac{J}{2}\dot{\varphi}^2+m_1gz_G \tag{3.2}$$

この重心の座標 (x_G, z_G) に (3.1) を代入し，φ には (2.22) から θ_{11} の 1 次の項まで取って回転運動の energy を表し，静止平衡解周りの攪乱 $\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}), \varphi_2$ に対する Lagrange 関数が導かれる:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{11}=&\frac{m_1}{2}h^2\dot{\theta}_{11}^2+\frac{J}{2}\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2+m_1g(h+z_0)\\ &+\frac{1}{2}m_1g\left(a\theta_{222}\beta_1-h\right)\theta_{11}^2\end{aligned} \tag{3.3}$$

これにより，Lagrange の運動方程式が導かれる:

$$\left(m_1h^2+J\beta_1^2\right)\ddot{\theta}_{11}=-m_1g(h-a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11} \tag{3.4}$$

静止壁面の場合，円木は自由振動し，その複素固有角振動数 ω は次式で与えられる:

$$\omega^2=\frac{m_1g(h-a\theta_{222}\beta_1)}{m_1h^2+J\beta_1^2} \tag{3.5}$$

この $\omega^2\geq 0$ は，h, θ_{222} が β の関数であるので，β を横軸に取り，慣性 moment J を parameter として，**Fig.3** に図示される．並進振子 ($\beta=1$) のときの固有角振動数は $\omega^2=m_1gL_1/(m_1L_1^2)=g/L_1\equiv\omega_0^2$ となるので，これを基準に ω^2/ω_0^2 と無次元表示されている．$J=1, 2$ (無次元では $J/(m_1L_1^2)$) では β と共に ω^2 は単調に増加する．$J<1$ の場合，$\beta<1$ では ω^2 の極大値，$\beta\geq 1$ では ω^2 の極小値が現れる．$J=1/3$ は，一様な密度の円木の場合である．しかし，$J=10$ では $\beta=1$ で極大値 $\omega^2/\omega_0^2=1$ を取る．このような J の大きな値は，円木の長さが $2b$ ($b>a$) で中央から左右に a の位置に糸を結ぶ場合や円木上に質点を対称に配列する場合に実現できる．なお，固有角振動数 (3.5) は，物体の固有角振動数 (3.8) の $h_g=0$ の場合にあたる．

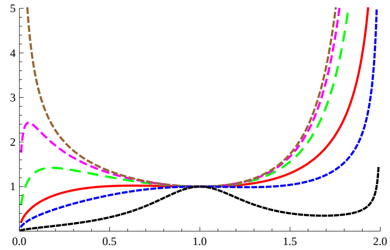

Fig.3 ω^2/ω_0^2 versus β for $J=1$ (solid), 1/3 (dashed 1), 0.1 (dashed 2), 0 (dashed 3), 2 (dashed 4), 10 (dotted). $m_1=1$.

3.2　物体の線形化運動

物体の線形化運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_{22}$ は θ_{11} の 2 次まで取り，次のようになる:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{22}=&\frac{J_2}{2}\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2+\frac{m_2}{2}(h+h_g\beta_1)^2\dot{\theta}_{11}^2\\ &-\frac{m_2}{2}g\left(h-\beta_1(a\theta_{222}+h_g\beta_1)\right)\theta_{11}^2\\ &+m_2g\left(h-h_g+z_0\right)\end{aligned} \tag{3.6}$$

これにより，Lagrange の運動方程式が導かれる:

$$\begin{aligned}&\left(J_2\beta_1^2+m_2(h+h_g\beta_1)^2\right)\ddot{\theta}_{11}\\ &=-m_2g(h-\beta_1(a\theta_{222}+h_g\beta_1))\theta_{11}\end{aligned} \tag{3.7}$$

よって，物体の運動の複素固有角振動数 ω は次式で与えられる:

$$\omega^2=\frac{m_2g(h-\beta_1(a\theta_{222}+h_g\beta_1))}{J_2\beta_1^2+m_2(h+h_g\beta_1)^2} \tag{3.8}$$

これは $h_g=0$ のとき，(3.5) 式と同形となる．$h_g\neq 0$ のとき，β の値により $h-\beta_1(a\theta_{222}+h_g\beta_1)$ は正負に変化し，$\omega^2>0$ の領域で物体は固有角振動数 ω で振動する．$\omega^2<0$ の領域では物体の運動は不安定となり，成長率

$\sigma > 0$ ($\sigma^2 = -\omega^2 > 0$) で，攪乱が時間と共に指数関数的に増大することを表す．

(3.8) 式の ω^2 の β 依存性を陽に示すために，次のように書き換える:

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \left[\sqrt{(2-\beta)\beta} - \beta_1^2\left(h_g - \frac{\beta}{\sqrt{(2-\beta)\beta}}\right)\right] \Big/ \left[J_2/(m_2L_1^2)\beta_1^2 + \left(h_g\beta_1 + \sqrt{(2-\beta)\beta}\right)^2\right] \equiv f_2(h_g, \beta) \tag{3.9}$$

ここで $f_2(h_g, \beta) = 0$ と取る (つまり，(3.9) 式で $\omega = 0$ を与える) と，分数式 (3.9) の分子より h_g の線形の代数方程式を得るから，解は次式となる:

$$h_g = \frac{3 - 3\beta + \beta^2}{\sqrt{2/\beta - 1}(\beta - 1)^2} \equiv h_{g0} \tag{3.10}$$

この h_{g0} が安定・不安定の境界を与える．また，正の数 $A_1 > 0$ を用いて，方程式 $f_2(h_g, \beta) = A_1$ (振動解の領域) あるいは $f_2(h_g, \beta) = -A_1$ (不安定解の領域) は h_g の 2 次の代数方程式となり，根が求められる．$f_2(h_g, \beta) = A_1$ の根の一つは，h_{g0} の内側に描かれる． $f_2(h_g, \beta) = -A_1$ の 2 つの根は閉/開曲線の上側と下側に描かれる．$0 < \beta < 1$ と $1 < \beta < 2$ に不安定な根があるが，前者の側の根 (成長率) の値の方が大きい．$J_2 = 1$ で，h_{g0}, 幾つかの A_1 の値の曲線を **Fig.4a** に示す．$f_2(h_g, \beta)$ の等高線は **Fig.4b** に，$\beta = 0.1$, 0,3, 1.8 での σ^2 の値は **Fig.4c** に示され，h_{g0} を少し超えたところに σ^2 の最大値があることが分かる．

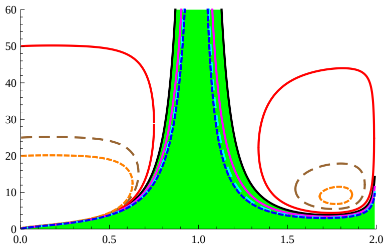

Fig.4a h_g versus β. The curve of h_{g0} gives the border of stability (shaded region) and instability. $f_2(h_g, \beta) = \pm 0.02$ (solid line), $f_2(h_g, \beta) = \pm 0.04$ (dashed line), $f_2(h_g, \beta) = \pm 0.05$ (dotted line).

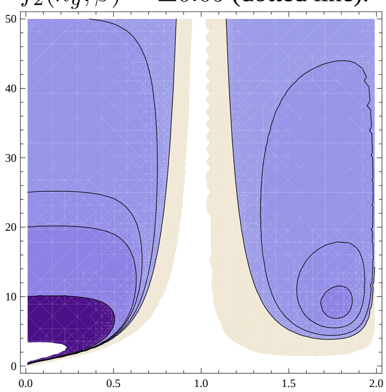

Fig.4b Contour plot of $f(h_g, \beta)$ in the (β, h_g) plane. $f(h_g, \beta) = -5, -0.1, -0.05, -0.04, -0.02, 0, 1$. $J_2 = 1$.

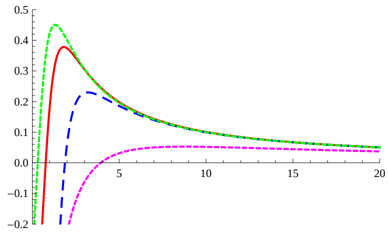

Fig.4c Square growth rate σ^2 versus h_g, for $\beta = 0.1$ (solid line), 0.3 (dashed line), 1.8 (dotted line) and $J_2 = 1$.

次に，$J_2 = 0.1$ の結果では，最大成長率は **Fig.4c** よりも大きな値を取る．$J_2 = 10$ の結果では，最大成長率は **Fig.4c** や $J_2 = 0.1$ の結果よりも小さな値を取る．よって，J_2 の値が小さい方が，成長率が大きいと言える．

(3.8) 式の $\omega^2 \geq 0$ は，h_g を parameter として，**Fig.5a-5c** に図示されている．この場合にも，並進振子 ($\beta = 1$) のときの $\omega^2/\omega_0^2 = 1$ が基準である．h_g が増加すると，$\beta < 1$ での極大値 $\omega^2/\omega_0^2 > 1$ は増加し，$\beta > 1$ での極小値 $\omega^2/\omega_0^2 < 1$ は減少する．$J_2 = 1$ (**Fig.5a**) に対して，$J_2 = 2$ (**Fig.5b**) では極大値は小さく，極小値は大きくなる．しかし，$J_2 = 0.1$ (**Fig.5c**) では極大値は大きく，極小値は小さくなり，β に対する ω^2 の変化率は大きい．この固有角振動数 (3.8) が β に依存して変化することが免震・制振技術に応用される．

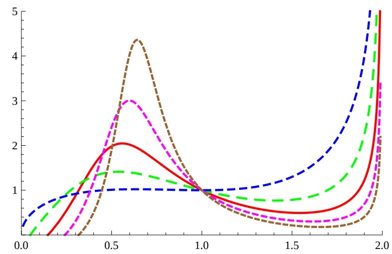

Fig.5a ω^2/ω_0^2 versus β for $h_g = 1$ (red), 0.5 (green), 0 (blue), 1.5 (magenta), 2 (brown). $m_2 = 1$, $J_2 = 1$.

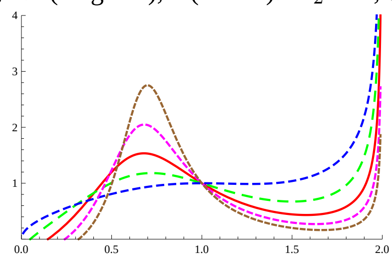

Fig.5b ω^2/ω_0^2 versus β for $h_g = 1$ (red), 0.5 (green), 0 (blue), 1.5 (magenta), 2 (brown). $m_2 = 1$, $J_2 = 2$.

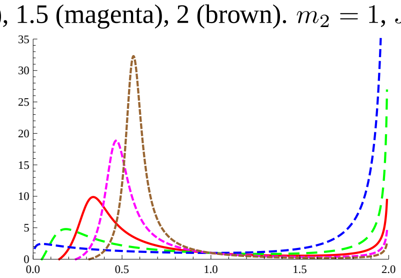

Fig.5c ω^2/ω_0^2 versus β for $h_g = 1$ (red), 0.5 (green), 0 (blue), 1.5 (magenta), 2 (brown). $m_2 = 1$, $J_2 = 0.1$.

(3.9) 式より，極値の条件式 $\partial\omega^2/\partial\beta = 0$ を求める．それは β の無理式を含むので，J_2 の 1 次代数方程式と見做して解くと，次の解を得る:

$$\begin{aligned}\frac{J_2}{m_2 L_1^2} = &\left[3\beta\left(2-3\beta+\beta^2\right)\right.\\ &-2h_g\sqrt{(2-\beta)\beta}\left(2-6\beta+3\beta^2\right)\\ &\left.+h_g^2\left(1-7\beta+9\beta^2-3\beta^3\right)\right]\\ &\Big/\left(3-3\beta-\beta^2+\beta^3\right)\end{aligned} \tag{3.11}$$

これは **Fig.6** に示され，縦軸 J_2 と横軸 β の曲線 (3.10) と $J_2 > 0$ が一定値の直線との交点が (3.9) 式の解であり，(3.8) 式の極値を与える．

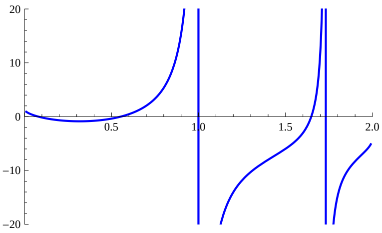

Fig.6 $J_2(\beta)$ versus β, with $m_2 = 1$ and $h_g = 2$.

4 おわりに

前報[2],[6] では，2 点吊り振子の 3 つの振動 mode の特徴を述べ，それらの振子の静止平衡状態を表す幾何学的関係式を図式解法により解いた．それに続き，本報告では，対称 2 点吊り振子の mode 1 の「遊動円木」に焦点をあて，静止平衡状態の幾何学的関係式を解析的に解き，攪乱状態の角度変数を用いて円木と物体の力学的 energy の厳密な関係式を示し，重力 potential energy に基づく運動の特性を求めた．また，線形振動を記述する Lagrange 関数を求めて Lagrange の運動方程式を導き，円木と物体の固有角振動数の特性を議論した．物体の運動の場合には重心の高さ h_g により線形的に不安定が起こり，不安定のメカニズムと最大成長率を求めた．この点は本報告で初めて明らかになったことであり，振動解析上で意義あるものと思われる．

本報告の一部は，先に講演発表したもの[7]–[10] であることを付記する．本報告で用いられた静止平衡状態回りの角度攪乱の展開は，非線形振動領域にも適用され次報[11] で数値解析される．

本研究遂行にあたり，本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して，柳下福藏校長に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] 川口 衛，立道 郁生: “21318 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 1 原理と免震床の実大実験” 学術講演梗概集. B-2, 構造 II, 振動, 原子力プラント 2000 (2000), pp.635-636(社団法人日本建築学会).

[2] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (3): 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.63-70.

[3] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の基礎運動解析” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.

[4] 小出 昭一郎: “解析力学” 岩波書店，1983.

[5] 坪井 忠二: “振動論” (昭和 17 年初版発行，昭和 51 年復刻再版発行) 理工学社, 1976.

[6] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (4): 2 点吊り振子の実験と解析” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.71-78.

[7] 望月 孔二，宮内 太積，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之，Mazni Al Irfan，川船 雄一郎，佐々木 隆吾，舟田 敏雄: “PSD 簡易計測システム試作と 2 点吊り振子の実験・解析” 電子情報通信学会 2009 年総合大会 2009 年 3 月 17 日 (火)〜20 日 (金) 愛媛大 (松山市) 3 月 18 日 (水) 午前，「D-15 教育工学」(一般セッション)，講演番号 : D-15-24.「電子情報通信学会 2009 年 総合大会講演論文集」の DVD 情報・システムソサイエティ p.202. file: d_15_024.pdf

[8] 宮内 太積，望月 孔二，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之，舟田 敏雄: “水平加振による非線形振動系の実験と振動解析 (振動学教材開発)” 日本機械学会東海支部第 58 期総会・講演会 2009 年 3 月 17 日 (火)，18 日 (水) 岐阜大学 工学部 3 月 18 日 (水)12:45-14:00 GS 機械力学 講演番号 263. 日本機械学会 東海支部 第 58 回総会講演会 講演論文集 (’09.3.17-18) No.093-1, pp.133-134.

[9] 舟田 敏雄，宮内 太積，望月 孔二，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成振動の数値解析” 第 58 回理論応用力学講演会 講演論文集 NCTAM2009, pp.255-256. 第 58 回理論応用力学講演会，日本学術会議，2009 年 6 月 9 日 (火)〜11 日 (木), OS15 連成現象・複合現象のシミュレーション 講演番号 2B13 (6/10).

[10] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之，大庭 勝久: “2 点吊り振子の基礎運動解析と PSD による簡易計測システム試作計画” 第 29 回高専情報処理教育研究発表会 論文集第 29 号，pp.8-11.

[11] 川上 誠，舟田 敏雄，マズニ アル イルファン，佐々木 隆吾，川船 雄一郎，中道 義之，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の非線形振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.