2 点吊り振子の 3 つの mode 間相互作用の解析 (3)

舟田 敏雄[*1] 木ノ内 智貴[*1] 桜井 賢人[*1] 大庭 勝久[*1] 青木 悠祐[*1] 宮内 太積[*2] 望月 孔二[*3]

An Analysis of Mode Coupling in Three Modes of Bifilar Suspension Pendulum (3)

Toshio FUNADA[*1] Toshiki KINOUCHI[*1] Kento SAKURAI[*1] Katsuhisa OHBA[*1] Yusuke AOKI[*1] Tatsumi MIYAUCHI[*2] and Kouji MOCHIZUKI[*3]

Abstract: A bifilar suspension pendulum, a uniform density bar suspended at its two points by two strings of same length, may swing in a vertical plane or make torsional oscillation about a vertical axis. The swinging in a co-plane of the strings and the bar is called Mode 1, and the swinging in a vertical plane perpendicular to the bar is Mode 2. Mode 3 is the torsional oscillation about a vertical axis. These modes are linearly independent of each other, but it is possible to make nonlinear coupling oscillation between the modes and internal resonance. In order to treat such coupling systematically, the formulation of the problems is made on two spherical coordinates systems and equations of motion for the three modes are derived. Nonlinear coupling oscillations are examined for the three modes based on experiments.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Nonlinear Coupling of Three Oscillation Modes, Internal Resonance

1 はじめに

対称 2 点吊り振子 (並進振子) を免震床に応用するための検討[1] に刺激されて，2 点吊り振子の静止平衡状態周りの振子運動について，運動方程式を導出して初期値問題を数値解析し，実験を行った[2]–[7]．その振子運動には，紐と円木の成す鉛直面内で揺れる “mode 1 (遊動円木 mode)” とそれに垂直な鉛直面内で揺れる “mode 2 (ブランコ mode)” があり，鉛直軸回りの円木の振動は，“mode 3 (捩れ振動 mode)” に分類される．

本報告では，各振動 mode の実験値と線形振動理論値の比較結果[4]–[8] に基づき，球座標系を用いた 3 つの振動 mode の表現により，線形共振/弱非線形共振の解析のための運動方程式の数値解析を試みる．本報告は，三部の内の第三報告であり，§2 を再掲し，前報[9],[10] に続く．

2 2 点吊り振子の 3 つの振動 mode の球座標表現

水平右手方向に x 軸，手前方向に y 軸，鉛直下方向に z 軸とするデカルト座標系 (x, y, z) を用いて，**Fig.1** に示すように，C_1 点を起点に 2 点吊り振子の配置を記述する．

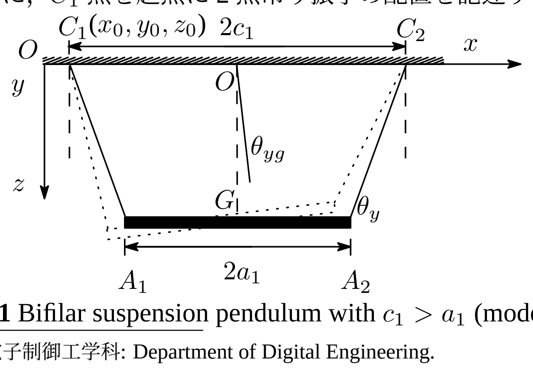

Fig.1 Bifilar suspension pendulum with $c_1 > a_1$ (mode 1).

[*1] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
[*2] 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.
[*3] 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.

また，球座標系を併用し，座標原点は適宜取るものとする．水平な上壁面上に C_1 点 (x_0, y_0, z_0) を取り．間隔 c_1 で，O 点 $(x_0 + c_1, y_0, z_0)$, C_2 点 $(x_0 + 2c_1, y_0, z_0)$ を取る．遊動円木の中央 (質量中心) を G 点 (x_g, y_g, z_g) とし，G 点から間隔 a_1 で，遊動円木上の左の紐の結び目位置を A_1 点 (x_1, y_1, z_1)，右の紐の結び目位置を A_2 点 (x_2, y_2, z_2) と表す．これらにより，各点間の長さ (距離) は $\overline{A_1A_2} = 2a_1$, $\overline{A_1G} = a_1$, $\overline{GA_2} = a_1$, $\overline{A_1C_1} = L_1$, $\overline{A_2C_2} = L_2$, $\overline{OG} = r_g$ と表される．回転角をデカルト座標系の軸回りに取って軸名の添え字を付け，O 点を原点とする球座標系 (r, θ_y, θ_z) を用い，z-x 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_{yg}，y-z 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_{xg} を取り，G 点の座標 (x_g, y_g, z_g) は次式で表される:

$$\begin{cases} x_g = r_g \sin(\theta_{yg}) + x_0 + c_1, \\ y_g = r_g \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{xg}) + y_0, \\ z_g = r_g \cos(\theta_{yg}) \cos(\theta_{xg}) + z_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

また，G 点を原点とする球座標系を用いて，z-x 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_y，x-y 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_z を取り，A_1 点の座標 (x_1, y_1, z_1) と A_2 点の座標 (x_2, y_2, z_2) は次式で表される:

$$\begin{cases} x_1 = x_g - a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z), \\ y_1 = y_g - a_1 \cos(\theta_y) \sin(\theta_z), \\ z_1 = z_g + a_1 \sin(\theta_y) \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_g + a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z), \\ y_2 = y_g + a_1 \cos(\theta_y) \sin(\theta_z), \\ z_2 = z_g - a_1 \sin(\theta_y) \end{cases} \tag{2.3}$$

紐の長さが等しく $(L_2 = L_1)$ 一定である．また，$\overline{A_1A_2} = 2a_1$ は次の f_0 で表され，$\overline{A_1C_1} = L_1$ は f_1, $\overline{A_2C_2} = L_2$ は f_2 で表される: これらの条件は，弾性紐の効果[11] の場合と比べ，特に注意されたい．水平面からの

遊動円木の傾き角の関係式は f_3, f_4 で与えられる:

$$\begin{cases} f_0 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 = 4a_1^2, \\ f_1 = (x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2 - L_1^2 \\ = a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1c_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z) + r_g^2 \\ +2r_g\left(a_1\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_y)\right. \\ +(c_1 - a_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z))\sin(\theta_{yg}) \\ \left.-a_1\sin(\theta_{xg})\cos(\theta_y)\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_z)\right) = 0, \\ f_2 = (x_2-x_0-2c_1)^2 + (y_2-y_0)^2 + (z_2-z_0)^2 - L_2^2 \\ = a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1c_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z) + r_g^2 \\ -2r_g\left(a_1\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_y)\right. \\ +(c_1 - a_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z))\sin(\theta_{yg}) \\ \left.-a_1\sin(\theta_{xg})\cos(\theta_y)\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_z)\right) = 0, \\ f_3 = -\dfrac{z_2-z_1}{x_2-x_1} = \sec(\theta_z)\tan(\theta_y), \\ f_4 = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \tan(\theta_z), \\ f_5 = \dfrac{z_2-z_1}{y_2-y_1} = -\csc(\theta_z)\tan(\theta_y) \end{cases} \tag{2.4}$$

紐の長さが等しく ($L_2 = L_1$) 一定であるから，f_1, f_2 の条件満たすことが求められる．f_1, f_2 の和を取ると，r_g を θ_y, θ_z で表現する式が得られる:

$$f_1 + f_2 = 2\left(a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1c_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z) + r_g^2\right) = 0 \tag{2.5}$$

$$r_g = \sqrt{-\left(a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1c_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z)\right)} \equiv r_{g1}(\theta_y, \theta_z) \tag{2.6}$$

f_1, f_2 の差を取ると，角度の関係式が得られ，θ_y を個別の振動 mode を記述する変数 $\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z$ を基にして表現できる:

$$\begin{aligned} f_1 - f_2 = 4r_g &\left[a_1\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_y)\right. \\ &+(c_1 - a_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z))\sin(\theta_{yg}) \\ &\left.-a_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{xg})\sin(\theta_z)\right] = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\theta_y = \arcsin(d_{11}/c_{11}) - \arcsin(b_{11}/c_{11}) \equiv \theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z) \tag{2.8}$$

但し，a_{11}-d_{11} は次のように定義した:

$$\begin{cases} a_{11} = \cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg}), \\ b_{11} = -\cos(\theta_z)\sin(\theta_{yg}) \\ -\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{xg})\sin(\theta_z), \\ c_{11} = \sqrt{a_{11}^2 + b_{11}^2}, \quad d_{11} = -\dfrac{c_1}{a_1}\sin(\theta_{yg}) \end{cases} \tag{2.9}$$

この系の静止平衡状態は，5 つの時間の関数について $(r_g, \theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_y, \theta_z) = (r_{g0}, 0, 0, 0, 0)$ と表される．但し，r_{g0} は次式で定義される:

$$r_{g0} = \sqrt{L_1^2 - (a_1 - c_1)^2} \tag{2.10}$$

静止平衡状態の回りで攪乱に対して (2.6), (2.8) 式を Taylor 展開し，微小 parameter ϵ ($\epsilon \ll 1$) を用いて攪乱を $\epsilon\theta_{yg}$, $\epsilon\theta_{xg}$, $\epsilon\theta_z$ と表すと，θ_y, r_g は次のように近似される：

$$\begin{aligned} \theta_y = &\left(1 - \frac{c_1}{a_1}\right)\epsilon\theta_{yg} + \epsilon^2\theta_{xg}\theta_z \\ &+ \epsilon^3\left[\left(1 - \frac{c_1^2}{a_1^2}\right)\frac{c_1\theta_{yg}^3}{6a_1} + \frac{\theta_{yg}}{2}\left(\left(1 - \frac{c_1}{a_1}\right)\theta_{xg}^2 - \theta_z^2\right)\right] \\ &+ \epsilon^4\left[\frac{1}{3}\theta_{xg}^3\theta_z - \left(1 - \frac{c_1}{a_1}\right)\theta_{xg}\theta_{yg}^2\theta_z - \frac{1}{6}\theta_{xg}\theta_z^3\right] \\ &+ O(\epsilon^5) \equiv \theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z) = \theta_{y1} \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} r_g = &\, r_{g0} - \frac{\epsilon^2 a_1c_1}{2r_{g0}}\left(\theta_y^2 + \theta_z^2\right) \\ &+ \frac{\epsilon^4 a_1c_1}{4r_{g0}}\left[\left(\frac{1}{6} - \frac{a_1c_1}{2r_{g0}^2}\right)\left(\theta_y^4 + \theta_z^4\right) + \left(1 - \frac{a_1c_1}{r_{g0}^2}\right)\theta_y^2\theta_z^2\right] \\ &+ O(\epsilon^6) \equiv r_{g1}(\theta_y, \theta_z) = r_{g1}(\theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z), \theta_z) \end{aligned} \tag{2.12}$$

つまり，(2.12) 式の θ_y には (2.11) 式を代入して項を整理し，$O(\epsilon^4)$ まで取るものとする．

以上の表式を用いて，質量 m_1，慣性 moment J_y, J_z ($= J_y$) の遊動円木の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は，次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &\frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2\right) + \frac{J_y}{2}\dot{\theta}_y^2 + \frac{J_z}{2}\epsilon^2\dot{\theta}_z^2\cos^2(\theta_y) + m_1 g z_g \\ = &\frac{m_1}{2}\dot{r}_g^2 + \frac{m_1}{2}\epsilon^2 r_g^2\left(\dot{\theta}_{xg}^2\cos^2(\epsilon\theta_{yg}) + \dot{\theta}_{yg}^2\right) + \frac{J_y}{2}\dot{\theta}_y^2 \\ &+ \frac{J_z}{2}\epsilon^2\dot{\theta}_z^2\cos^2(\theta_y) + m_1 g\left(r_g\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg}) + z_0\right) \\ &+ m_1\left[\dot{r}_g\dot{x}_0\sin(\epsilon\theta_{yg}) + \dot{r}_g\dot{y}_0\sin(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg})\right. \\ &+\dot{r}_g\dot{z}_0\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg}) + r_g\dot{x}_0\epsilon\dot{\theta}_{yg}\cos(\epsilon\theta_{yg}) \\ &-\epsilon r_g\dot{z}_0\left(\dot{\theta}_{xg}\sin(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg}) + \dot{\theta}_{yg}\cos(\epsilon\theta_{xg})\sin(\epsilon\theta_{yg})\right) \\ &\left.+\epsilon r_g\dot{y}_0\left(\dot{\theta}_{xg}\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg}) - \dot{\theta}_{yg}\sin(\epsilon\theta_{xg})\sin(\epsilon\theta_{yg})\right)\right] \\ &+ \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2\right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

ここでは，C_1 点の座標が時間の関数となる場合も含まれている．C_1 点が固定の場合には，$x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ であるから，遊動円木の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_0$ は，次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = &\frac{m_1}{2}\left(\dot{r}_g^2 + \epsilon^2 r_g^2\left(\dot{\theta}_{xg}^2\cos^2(\epsilon\theta_{xg}) + \dot{\theta}_{yg}^2\right)\right) \\ &+ \frac{J_y}{2}\dot{\theta}_y^2 + \frac{J_z}{2}\epsilon^2\dot{\theta}_z^2\cos^2(\theta_y) + m_1 g r_g\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg}) \\ = &\frac{m_1}{2}\left(\epsilon^2\left(\frac{\partial r_{g1}}{\partial(\epsilon\theta_{y1})}\dot{\theta}_{y1} + \frac{\partial r_{g1}}{\partial(\epsilon\theta_z)}\dot{\theta}_z\right)^2\right. \\ &\left.+\epsilon^2 r_{g1}^2\left(\dot{\theta}_{xg}^2\cos^2(\epsilon\theta_{xg}) + \dot{\theta}_{yg}^2\right)\right) \\ &+ \frac{J_y}{2}\epsilon^2\left(\frac{\partial\theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_{xg})}\dot{\theta}_{xg} + \frac{\partial\theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_{yg})}\dot{\theta}_{yg} + \frac{\partial\theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_z)}\dot{\theta}_z\right)^2 \\ &+ \frac{J_z}{2}\epsilon^2\dot{\theta}_z^2\cos^2(\theta_y) + m_1 g r_{g1}\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg}) \end{aligned} \tag{2.14}$$

ここで, 時間の未知関数は $r_g = r_{g1}(\theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z), \theta_z)$, $\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_y = \theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z), \theta_z$ であり，束縛条件 f_1, f_2 により，運動を記述する上で基本となる変数 (未知関数) は 3 つである．この一般関係式に基づき，系の個々の振動 mode の記述との関連が求められる[9],[10]．3 つの

mode の運動方程式は，報告[10] の (3.12), (3.13), (3.14) 式で与えられ，θ_{yg} (遊動円木 mode の角度), θ_{xg} (ブランコ mode の角度), θ_z (捩れ振動 mode の角度) に対する連立非線形微分方程式である．外部からの励振がない自立系の場合の運動方程式は (4.1), (4.2), (4.3) 式となる．なお，それらの導出過程では外力や damper は考慮されていないが，後から運動方程式に加えることができる．同じく，報告[10] の (5.1), (5.2) 式が mode 1, 2 間相互作用の運動方程式であり，(5.3), (5.4) 式が mode 2, 3 間相互作用の運動方程式であり， (5.5), (5.6) 式が mode 3, 1 間相互作用の運動方程式である．

報告[10] の個別 mode の運動方程式は，順に，(6.1) (遊動円木 mode の θ_{yg}), (6.2) (ブランコ mode の θ_{xg}), (6.3) (捩れ振動 mode の θ_z) 式であり，再掲する:

$$2m_{02}\ddot{\theta}_{yg} + 2u_{02}\theta_{yg} + n_{11}\ddot{x}_0 + n_{32}\epsilon\theta_{yg}\ddot{z}_0 + \epsilon^2 \Big(4u_{13}\theta_{yg}^3 + 2m_{15}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg}^2 + 2m_{15}\theta_{yg}^2\ddot{\theta}_{yg} + n_{12}\theta_{yg}^2\ddot{x}_0\Big) = 0, \quad (2.15)$$

$$2m_{01}\ddot{\theta}_{xg} + 2u_{01}\theta_{xg} + n_{21}\ddot{y}_0 + n_{31}\epsilon\theta_{xg}\ddot{z}_0 + \epsilon^2 \left(4u_{11}\theta_{xg}^3 + n_{22}\theta_{xg}^2\ddot{y}_0\right) = 0, \quad (2.16)$$

$$2m_{03}\ddot{\theta}_z + 2u_{03}\theta_z + n_{33}\epsilon\theta_z\ddot{z}_0 + \epsilon^2 \Big(4u_{16}\theta_z^3 + 2m_{20}\theta_z\dot{\theta}_z^2 + 2m_{20}\theta_z^2\ddot{\theta}_z\Big) = 0 \quad (2.17)$$

運動方程式 (2.15), (2.16), (2.17) を線形化して，固有角振動数の表式を示す:

$$\omega_{01}^2 = \frac{12a_1 g\left((a_1-c_1)^3 - a_1L_1^2\right)}{r_{g0}\left((12a_1^2-b_1^2)(a_1-c_1)^2 - 12a_1^2L_1^2\right)}, \quad (2.18)$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{g}{\sqrt{-a_1^2+2a_1c_1-c_1^2+L_1^2}} = \frac{g}{r_{g0}}, \quad (2.19)$$

$$\omega_{03}^2 = \frac{12a_1c_1g}{b_1^2\sqrt{-a_1^2+2a_1c_1-c_1^2+L_1^2}} = \frac{12a_1c_1g}{b_1^2 r_{g0}} \quad (2.20)$$

但し，棒の全長 b_1 を用いて慣性 moment は $m_1b_1^2/12$ であり，$r_{g0} = \sqrt{L_1^2+(a_1-c_1)^2}$ と取る．先に線形固有角振動数が等しくなる条件式を解いて，3 つの mode が共に等しい条件 ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_{03}$) は 2 点吊り振子の配置の関係式 $c_1 = b_1^2/(12a_1)$[7],[8] を導いている．

3　2 点吊り振子の 3 つの振動 mode の数値解析

報告[10] の自立系の運動方程式 (4.1), (4.2), (4.3) 式は，θ_{yg}, θ_{xg}, θ_z に対する連立非線形微分方程式であり，3 つの振動 mode が共存するために生ずる相互作用の項があり，それらは攪乱の 2 次の大きさなので発生・相互作用し易く，各 mode i, j, k の角振動数の間に $\omega_i = \omega_j \pm \omega_k$ の関係が成り立つときに内部共振が起こる．その運動方程式の初期値問題の数値計算条件は $L_1 = 0.5$, $a_1 = 0.2$, $b_1 = 0.6$, $m_1 = 1$, $g = 9.8$, $r_{g0} = \sqrt{L1^2-(c_1-a_1)^2}$, $J_y = m_1b_1^2/12$, $\epsilon = 1$, $\theta_{xg}(0) = 0.3$, $\theta_{yg}(0) = 0.3$, $\theta_z(0) = 0.3$ であり，数値計算結果を **Fig.2a-7f** に示す．壁面上の紐の支持点間隔の半値幅を $c_1 = 0.01$ (**Fig.2**), $c_1 = 0.15$ (**Fig.3**), $c_1 = 0.05$ (**Fig.4**), $c_1 = 0.55$ (**Fig.5**), $c_1 = 0.599$ (**Fig.6**), $c_1 = 0.601$ (**Fig.7**) と設定している．それらに先立ち，$c_1 \to 0$ の極限では 2 点吊り振子の壁面上の支持点が 1 点になり，いわゆる球面振子となるため数値解析を試みた．しかし, その場合は数値計算上は不安定解になったので，改めて別途検討を要する．$c_1 = 0.01$ (**Fig.2**) の結果では，mode 1, 2 が基本振動の回りで唸りを生じ (**Fig.2d**, **2e**)，mode 3 が複雑な捩れ振動を起こして，短周期振動と長周期振動が混在した構造 (**Fig.2c**, **2f**) となっている．$c_1 = 0.15$ (**Fig.3**), $c_1 = 0.05$ (**Fig.4**) では，c_1 の値の大きい方が唸りの部分が長くなることが分かる．$c_1 = 0.15$ が，線形固有角振動数が等しくなる条件式[7],[8] を満たす場合である．さらに c_1 の値が大きくなり臨界値 $c_1 = L_1 + a_1$ に近づくと，振動が random 化する (**Fig.5-7**)．しかし，カオス解かどうか未だ確認できていない．

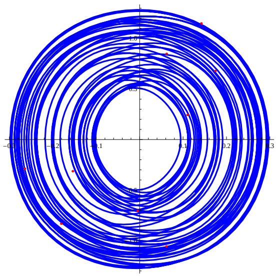

Fig.2a Phase portrait of $(\theta_{xg}(t), \dot{\theta}_{xg}(t))$.

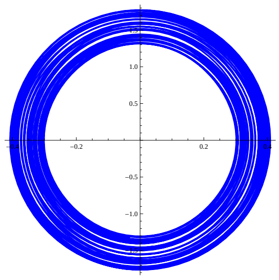

Fig.2b Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

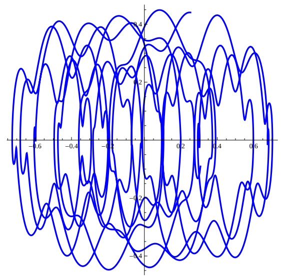

Fig.2c Phase portrait of $(\theta_{z}(t), \dot{\theta}_{z}(t))$.

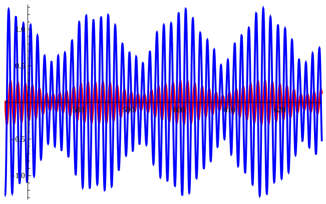

Fig.2d Time sequence of $\theta_{xg}(t)$ and $\dot{\theta}_{xg}(t)$ versus t.

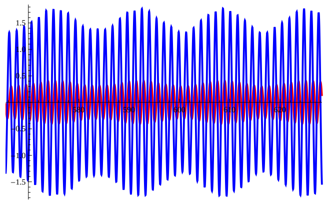

Fig.2e Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

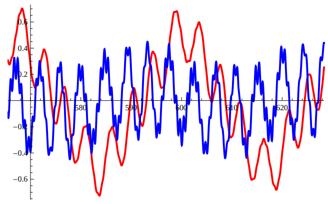

Fig.2f Time sequence of $\theta_{z}(t)$ and $\dot{\theta}_{z}(t)$ versus t.

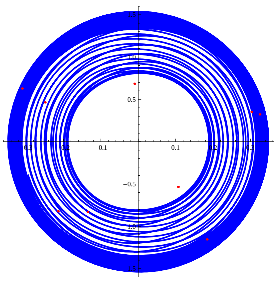

Fig.3a Phase portrait of $(\theta_{xg}(t), \dot{\theta}_{xg}(t))$.

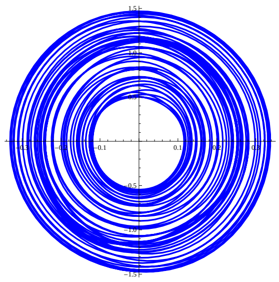

Fig.3b Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

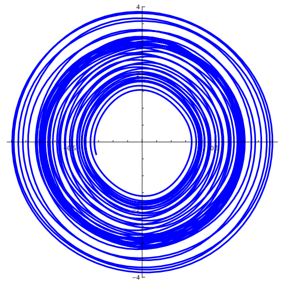

Fig.3c Phase portrait of $(\theta_{z}(t), \dot{\theta}_{z}(t))$.

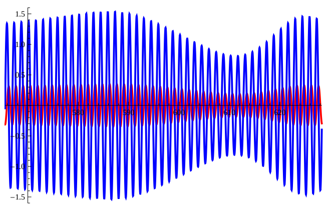

Fig.3d Time sequence of $\theta_{xg}(t)$ and $\dot{\theta}_{xg}(t)$ versus t.

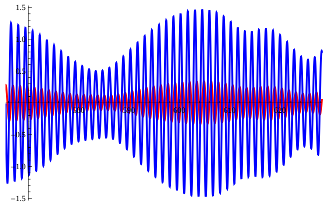

Fig.3e Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

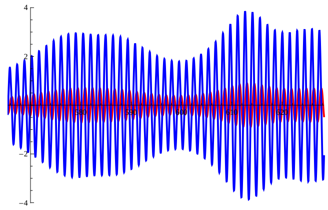

Fig.3f Time sequence of $\theta_{z}(t)$ and $\dot{\theta}_{z}(t)$ versus t.

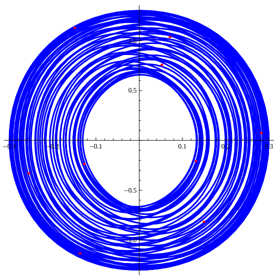

Fig.4a Phase portrait of $(\theta_{xg}(t), \dot{\theta}_{xg}(t))$.

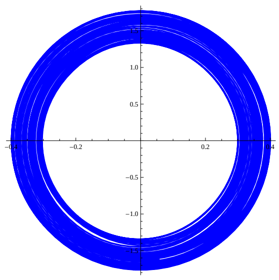

Fig.4b Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

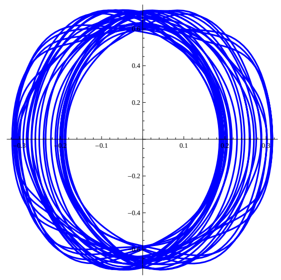

Fig.4c Phase portrait of $(\theta_{z}(t), \dot{\theta}_{z}(t))$.

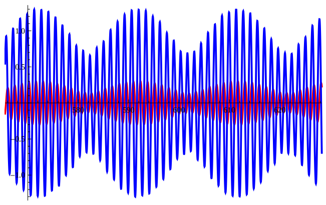

Fig.4d Time sequence of $\theta_{xg}(t)$ and $\dot{\theta}_{xg}(t)$ versus t.

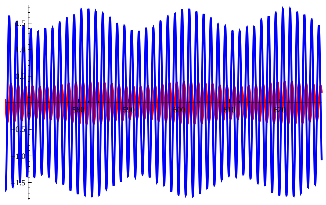

Fig.4e Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

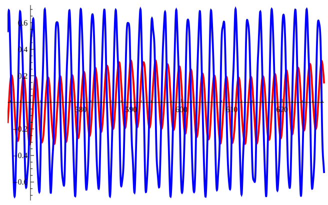

Fig.4f Time sequence of $\theta_{z}(t)$ and $\dot{\theta}_{z}(t)$ versus t.

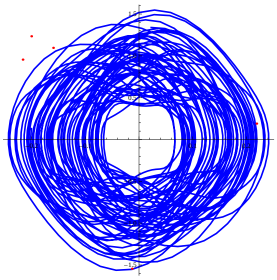

Fig.5a Phase portrait of $(\theta_{xg}(t), \dot{\theta}_{xg}(t))$.

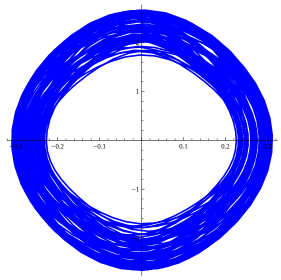

Fig.5b Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

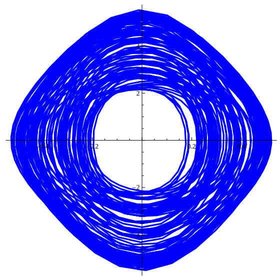

Fig.5c Phase portrait of $(\theta_{z}(t), \dot{\theta}_{z}(t))$.

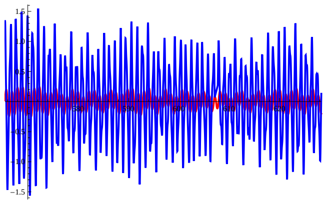

Fig.5d Time sequence of $\theta_{xg}(t)$ and $\dot{\theta}_{xg}(t)$ versus t.

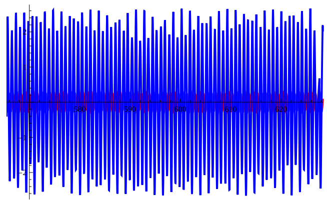

Fig.5e Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

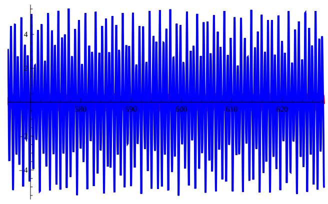

Fig.5f Time sequence of $\theta_{z}(t)$ and $\dot{\theta}_{z}(t)$ versus t.

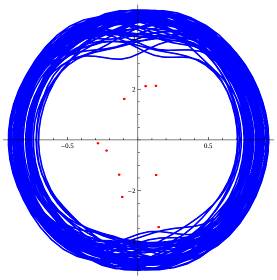

Fig.6a Phase portrait of $(\theta_{xg}(t), \dot{\theta}_{xg}(t))$.

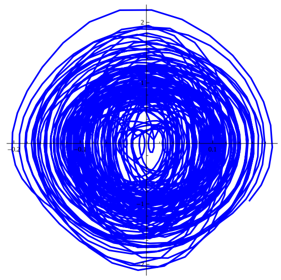

Fig.6b Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

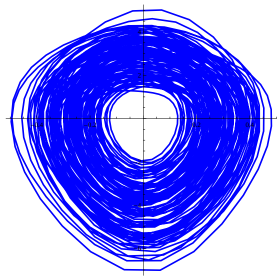

Fig.6c Phase portrait of $(\theta_{z}(t), \dot{\theta}_{z}(t))$.

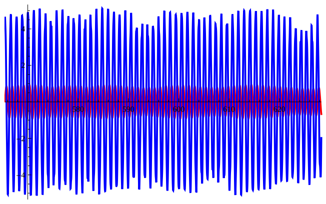

Fig.6d Time sequence of $\theta_{xg}(t)$ and $\dot{\theta}_{xg}(t)$ versus t.

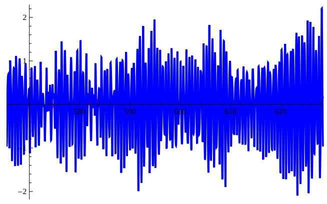

Fig.6e Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

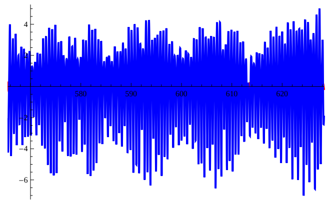

Fig.6f Time sequence of $\theta_{z}(t)$ and $\dot{\theta}_{z}(t)$ versus t.

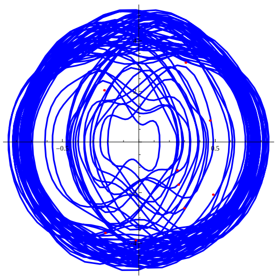

Fig.7a Phase portrait of $(\theta_{xg}(t), \dot{\theta}_{xg}(t))$.

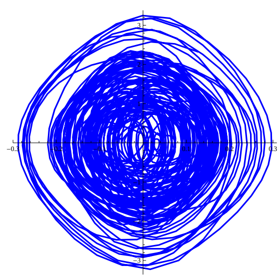

Fig.7b Phase portrait of $(\theta_{yg}(t), \dot{\theta}_{yg}(t))$.

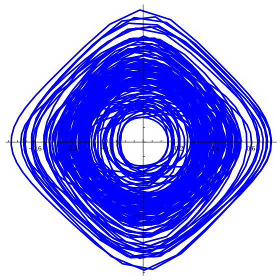

Fig.7c Phase portrait of $(\theta_{z}(t), \dot{\theta}_{z}(t))$.

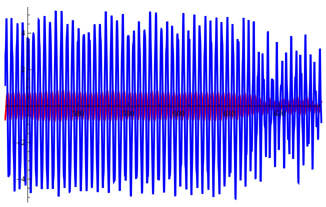

Fig.7d Time sequence of $\theta_{xg}(t)$ and $\dot{\theta}_{xg}(t)$ versus t.

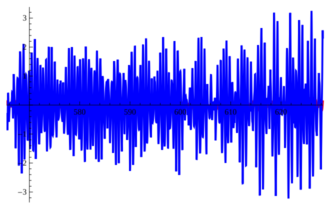

Fig.7e Time sequence of $\theta_{yg}(t)$ and $\dot{\theta}_{yg}(t)$ versus t.

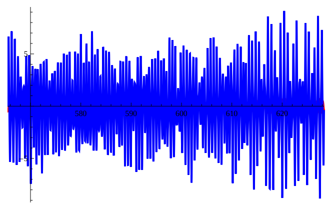

Fig.7f Time sequence of $\theta_{z}(t)$ and $\dot{\theta}_{z}(t)$ versus t.

4　おわりに

本研究は，文献[1] に刺激されて始まっているが，3 つの振動 mode があり，質量や慣性 moment の振子運動への影響に注目し教材として整備する計画で進めて来た．前報告では，2 点吊り振子の 3 つの振動 mode の実測値と線形理論値との対応を述べ，様々な解析を行い，非線形連成振動が起こることが理論的・実験的に確認された．mode 1, 2, 3 を同時に扱う場合には，水平上壁面上を原点とし棒の質量中心に向けて球座標系を取り，さらにその質量中心を原点とする球座標系で棒の姿勢を記述し，棒上の紐の結び目から上壁面の結び目までの距離 (紐の長さ) が一定に保たれる拘束条件を課している[8]–[10]．一連の報告の第一報[9] では，mode 1, 2, 3 の運動の記述と個々の記述の確認を行い，3 つの mode の相互作用が起こることを示し，第二報[10] では，mode 1, 2, 3 の運動の記述と 2 つずつの mode の相互作用並びに個々の運動を記述する運動方程式を示した．第三報の本報告では，3 つの mode の相互作用の数値計算例を示した．これらの系では，線形振動では互いに独立で，非線形連成振動が起こることが特徴である．従って，運動方程式中の非線形項が相互作用を起こすような大きな初期値を用い数値計算しており，一方では damper 等の減衰効果は考慮していないので数値計算上の発散を避けるために共振点での長い数値解析は行っていない．特に，本報告での要点は 3 つの mode の非線形相互作用による振動 (連成振動) であり，2 つの mode 間相互作用や 1 つの mode の非線形振動とは異なる振動機構の解明であることは強調される．3 つの mode によるカオスの発生はまだ確認できないが，それらしき結果は得られており，今後さらに検討する予定である．

一方，紐の伸縮を許す場合には，それを線形バネに限っても，紐が一定長さであることによる拘束条件がなくなり，$r_g, \theta_{yg}, \theta_{xg}, \theta_y, \theta_z, \theta_z$ が互いに独立な変数となりバネの伸縮に関与するので，5 つの変数の線形連成振動系になる．その問題の定式化は報告[11] で行っており，今後，本報告の問題との関連や差異を検討し，個々の振動問題の解析を行う．また，従来の表現による mode 間相互作用の報告[12]–[14] も参照されたい．

本報告の一部は，先に第 60 回理論応用力学講演会[7] 並びに日本機械学会 2011 年度年次大会[8] において講演したことを付記する．

本研究遂行にあたり，本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して，柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] 川口 衛，立道 郁生: “21318 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 1 原理と免震床の実大実験” 学術講演梗概集. B-2, 構造 II, 振動, 原子力プラント 2000 (2000), pp.635-636(社団法人日本建築学会).

[2] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), pp.55-60.

[3] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，中道 義之:“2 点吊り振子の捩り振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), pp.83-88.

[4] 望月 孔二，鈴木 秀，舟田 敏雄，岩本 大，宮内 太積，大庭 勝久，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の 3 つの線形振動 mode の実験と解析” 沼津高専研究報告 第 45 号 (2011), pp.163-168.

[5] 鈴木 秀, 舟田 敏雄, 金子 裕哉, 宮内 太積, 福田 克也: “2 点吊り振子と剛体振子の振動実験と解析” 日本機械学会東海支部 東海学生会　第 42 回学生員卒業研究発表講演会，2011 年 3 月 13 日 (日) 豊橋技術科学大学，第 9 室 10:50 〜 12:14 機械力学・計測・制御　講演番号 909，講演前刷集 (日本機械学会東海学生会 平成 23 年 3 月 1 日発行) CD/ROM，pp.268-269.

[6] 宮内 太積，福田 克也，鈴木 秀，金子 裕哉，舟田 敏雄: “ 2 点吊り振子の非線形内部共振の解析 ” 日本機械学会東海支部東海支部第 60 期総会・講演会 (支部 60 周年記念行事) 豊橋技術科学大学，第 8 室 (A207 教室) 3 月 14 日 (月) OS5 振動解析と制振 OS5-2 非線形振動 10:45〜12:00 講演番号 811 東海支部第 60 期総会講演会講演論文集 No. 113-1 (日本機械学会東海支部 2011 年 3 月 1 日発行), pp.403-404.

[7] 舟田 敏雄，鈴木 秀，金子 裕哉，ビン モハマド イドロス ムハマド イッザト，大庭 勝久，中道 義之，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二，川上 誠: “ 2 点吊り振子の mode 間相互作用と内部共振の数値解析 ” 第 60 回理論応用力学講演会 3 月 9 日 (水) 第 4 室 9:30-9:45 OS12-4 機械系及び構造物系の振動制御 講演番号 OS12-10，講演論文集 OS12-10.pdf

[8] 舟田 敏雄，宮内 太積，大庭 勝久，中道 義之，青木 悠祐，出川 智啓，望月 孔二: “2 点吊り振子の連成振動と内部共振の数値解析” 日本機械学会 2011 年度年次大会 『機械工学が牽引するイノベーション』，2011 年 9 月 11 日 (日)〜15 日 (木)，東京工業

大学 大岡山キャンパス，[OS] G100 機械力学・計測制御部門 一般セッションセッション，9 月 13 日 (火) 9:00-10:00 会場：W242，講演番号 G100033. 日本機械学会 2011 年度年次大会 講演論文集 DVDROM G100033.pdf.

[9] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の 3 つの mode 間相互作用の解析 (1)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[10] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の 3 つの mode 間相互作用の解析 (2)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[11] 木ノ内 智貴，舟田 敏雄，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り物理振子の振動解析: 弾性紐の効果” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[12] 舟田 敏雄，鈴木 秀，金子 裕哉，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二，川上 誠; “2 点吊り振子の mode 間相互作用と外力と外部励振による内部共振の数値解析” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[13] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の mode 間相互作用と外力と外部励振による内部共振の数値解析 (2)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[14] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の mode 間相互作用と外力と外部励振による内部共振の数値解析 (3)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.