

## 2点吊り振子の基礎運動解析

望月 孔二<sup>\*1\*2</sup> 宮内 太積<sup>\*2\*3</sup> 舟田 敏雄<sup>\*2\*4</sup> 佐々木 隆吾<sup>\*4</sup> マズニ アルイルファン<sup>\*4</sup>  
川船 雄一郎<sup>\*4</sup> 川上 誠<sup>\*2\*4</sup> 中道 義之<sup>\*2\*5</sup>

### Fundamental Dynamic Analysis of a Bifilar Suspension Pendulum

Kouji MOCHIZUKI<sup>\*1\*2</sup> Tatsumi MIYAUCHI<sup>\*2\*3</sup> Toshio FUNADA<sup>\*2\*4</sup> Ryugo SASAKI<sup>\*4</sup>  
Mazni Al IRFAN<sup>\*4</sup> Yuichirou KAWAFUNE<sup>\*4</sup> Makoto KAWAKAMI<sup>\*2\*4</sup> and Yoshiyuki NAKAMICHI<sup>\*2\*5</sup>

**Abstract:** A uniform density bar is suspended at its two ends by two strings whose two end points are attached to an upper static wall. The bar may swing or make torsional oscillation in a vertical plane from its equilibrium rest state, which is called bifilar suspension pendulum. When the distance between the two points is longer or shorter than the bar length, the bar attitude may change during swinging of the bar. When it is just the same, the bar swings with keeping the attitude horizontal. Taking into account this particular property of the pendulum, some device for seismic mitigation has been proposed. In this connection, we make analysis from linear to nonlinear stage of various modes of oscillations, and some exact mechanical equations are derived for free swinging mode. Fundamental results are discussed here and some of them will be solved in the following papers.

**Keywords:** Bifilar Suspension Pendulum, Seismic Mitigation, Linear and Nonlinear Free Oscillations

#### 1 はじめに

先に「振子は最も基本的な免震手法であるにも関わらず、構造物の免震デバイスとしての実施例は極めて少ない」<sup>[1]</sup>と現状分析され、一連の「並進振子原理を用いた免震システムの開発」<sup>[1]-[4]</sup>が進められて来ている。そこでは、2つの支持点から糸で対称に吊るされた遊動円木状の振子(2点吊り振子)を考え、円木と吊り材の質量は無視して、円木上の物体の小振幅振動の免震(振)効果が実験的・理論的に解明されている。また、最近 Zhou & Ji<sup>[5]</sup>により、遊動円木の自由振動の線形問題が支持点の条件を拡張して解析的に解かれており、吊橋や床の免振問題への応用を意図して様々な振動例が述べられている。

2点吊り振子の力学問題<sup>[6]</sup>では、2本の糸で一樣な密度の棒(遊動円木)の端を吊り下げている静止平衡状態について、座標値を用いて束縛条件が記述され、それを平面極座標による角度の非線形関数方程式として、図式解法により解いた。しかし、その座標値間の関係式の逆変換が多価関数であるため厳密な扱いは面倒になる。この静止平衡状態周りの振子運動は、糸と円木の成す鉛直面内で揺れる“mode 1”とそれに垂直な鉛直面内で揺れる“mode 2”がある。「2本吊り」<sup>[7]</sup>として、鉛直軸回りの円木の捩れ振動は、“mode 3”に分類され、その静止平衡状態の角度の関数方程式も図式解法で解かれた。また、“mode 1”の変形に「襷がけ振子」<sup>[8]</sup>がある。これらは、鉛直面あるいは水平面での

運動の分類であり、さらに一般化すると球座標での表現が求められるが、それは将来的課題となろう。先行研究<sup>[1],[6]</sup>の線形自由振動の結果を踏まえ、支持点の時間的変位による励振問題や非線形振動問題への展開が求められる。

本研究では、これらの力学問題の理論解析にあたり、基本的な線形振動 mode を求めるが、線形振動のみならず非線形振動に関しても可能な限り厳密に扱い、機械振動学的実験・電気電子工学的計測システム・力学現象の数学モデルと数値 simulation 等が相互に関連して専門学科の枠を越えて共同教育研究を進め、非線形力学・カオス工学への crossover として位置づける。また、これらの振子の支持点からの励振の問題があり、それらの免振・制振効果に関して数値的解析、実験的解明を図り、計測系の構築を進める計画である。本報告では、2点吊り振子の基本運動を解析する。

#### 2 2点吊り振子の静止平衡状態周りの揺動

水平面上の2点  $C_1, C_2$  (距離  $2c$ ) に長さ  $L_1, L_2$  の糸の端を繋ぎ、他端を長さ  $2a$  の円木の端点  $A, B$  に繋いで、円木を吊り下げると、重力の作用で円木を鉛直面  $C_1, A, B, C_2$  内で揺動させることができる。これを2点吊り振子(“mode 1”の振動)と呼ぶ。Fig.1(a)には  $c > a$  で  $L_2 = L_1$  の配置の一樣密度の円木の振子(対称2点吊り振子)の静止平衡状態が示されており、破線のように運動するとき糸の振れと円木の振れ(傾き)が逆位相となり、円木は並進・回転運動する。Fig.1(b)の  $c < a$  の場合では糸と円木の振れが同位相となる。ほかに、並進振子( $c = a$ )の場合には、振子が揺れても円木は水平に保たれ、円木は並進運動する。 $c = 0$  では物理振子となり、 $a = 0$  では円木を質点と見做せて“V字型振子”となる(なお、“V字型振子”が「2点吊

<sup>\*1</sup> 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.

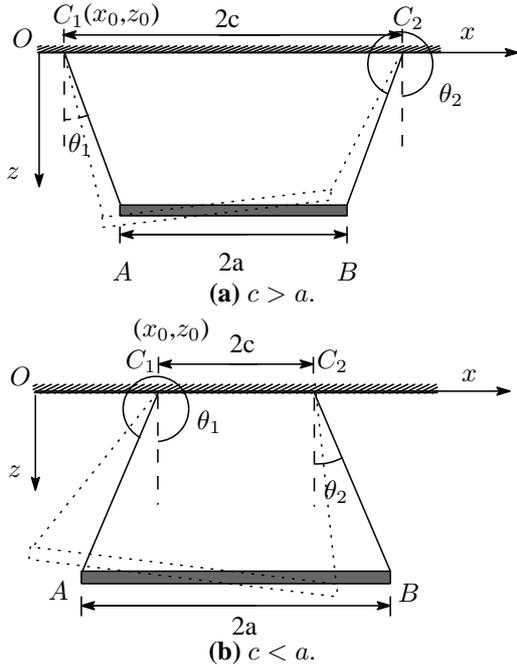
<sup>\*2</sup> 専攻科: Advanced Engineering Course.

<sup>\*3</sup> 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.

<sup>\*4</sup> 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.

<sup>\*5</sup> 総合情報センター: Information Technology Center.

り振り」または「bifilar suspension pendulum」を表す場合があるので、注意されたい).



**Fig.1** Bifilar suspension pendulum. (a)  $c > a$  and (b)  $c < a$ . Such configurations are guaranteed by the mechanical balance conditions (2.7) and (2.8).

**Fig.1** の振子の配置を表すために、デカルト座標系  $(x, y, z)$  の原点を  $O$  に取り、右向き水平に  $x$  軸、鉛直下方に  $z$  軸を取る。糸に束縛されて、円木は一般には 3 次元運動するが、ここでは  $y = 0$  の鉛直面内で 2 次元運動すると仮定する。左側支持点  $C_1$  の位置を  $(x_0, z_0)$  と表し、静止壁面の場合には一定値とし、壁面の時間変位を考慮するときには  $(x_0, z_0)$  を時間の既知関数とする。右側支持点  $C_2$  の位置は  $(x_0 + 2c, z_0)$  と表わされる。鉛直面  $C_1, A, B, C_2$  内に取った平面極座標系  $(r, \theta)$  を用い、左側支持点  $C_1$  を通る鉛直軸と糸が成す角度を  $\theta_1$  とし、右側支持点  $C_2$  を通る鉛直軸と糸が成す角度を  $\theta_2$  と表すと、円木の各端点の座標は次式で表される:

$$\begin{cases} \text{左側端点 } A : (x_A, z_A) \\ \quad = (x_0 + L_1 \sin(\theta_1), z_0 + L_1 \cos(\theta_1)), \\ \text{右側端点 } B : (x_B, z_B) \\ \quad = (x_0 + 2c + L_2 \sin(\theta_2), z_0 + L_2 \cos(\theta_2)) \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで、円木が一般的な線密度  $\rho$  を持つとすると、円木の質量は  $m_1 = 2a\rho$  であり、重心の位置  $(x_G, z_G)$  は、円木の中央になるから、次のように表される:

$$\begin{cases} x_G = (x_A + x_B) / 2 \\ \quad = x_0 + c + (L_2 \sin(\theta_2) + L_1 \sin(\theta_1)) / 2, \\ z_G = (z_A + z_B) / 2 \\ \quad = z_0 + (L_2 \cos(\theta_2) + L_1 \cos(\theta_1)) / 2 \end{cases} \quad (2.2)$$

円木の並進運動は  $(x_G, z_G)$  を用いて記述され、円木の重心回りの鉛直面内の回転 ( $y$  軸回りの回転) は角度  $\varphi$  で記述

される。水平面を基準として測った円木の傾き角度  $\varphi$  は、次式で定義される:

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= -\frac{z_B - z_A}{x_B - x_A} \\ &= -\frac{L_2 \cos(\theta_2) - L_1 \cos(\theta_1)}{2c + L_2 \sin(\theta_2) - L_1 \sin(\theta_1)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

これにより、右側端点  $B$  の位置は次式でも表される:

$$(x_B, z_B) = (x_A + 2a \cos(\varphi), z_A - 2a \sin(\varphi)) \quad (2.4)$$

これらを用いて、円木の端点間の距離 (円木の長さ) の自乗  $(2a)^2$  が求められる:

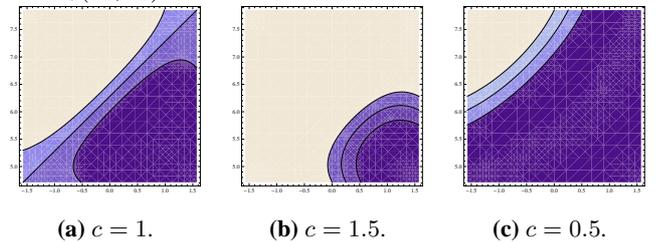
$$(2a)^2 = (x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \quad (2.5)$$

(2.5) 式を考慮して、等高線処理による作図のために、関数  $F(\theta_1, \theta_2)$  を次式で定義する:

$$\begin{aligned} F(\theta_1, \theta_2) &\equiv (x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - (2a)^2 \\ &= (2c + L_2 \sin(\theta_2) - L_1 \sin(\theta_1))^2 \\ &\quad + (L_2 \cos(\theta_2) - L_1 \cos(\theta_1))^2 - (2a)^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

即ち、 $F(\theta_1, \theta_2) = 0$  が (2.5) 式であり、角度  $\theta_1$  ( $-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ ) と  $\theta_2$  ( $3\pi/2 \leq \theta_2 \leq 5\pi/2$ ) の間の関係を与える超越方程式であり、解は解析的に求められる。

糸の長さが等しい場合 ( $L_1 = L_2$ ) には、対称 2 点吊り振り (振子が静止平衡状態において、糸の張力と円木の自重の釣合並びに力の moment の釣合により、鉛直軸に対して左右対称に配置されることを意味する) である。 $F_s(\theta_1, \theta_2)$  (対称 2 点吊り振子の代表的な配置に対する  $F(\theta_1, \theta_2)$ ) の等高線図の例を **Fig.2** に示す。図では、横軸を  $\theta_1$ 、縦軸を  $\theta_2$  として、関数の値域を 4 つに分けて、 $F_s(\theta_1, \theta_2) > 1$ ,  $0 < F_s(\theta_1, \theta_2) < 1$ ,  $-1 < F_s(\theta_1, \theta_2) < 0$ ,  $F_s(\theta_1, \theta_2) < -1$  の順に明るい色から色分けしている。3 本の境界の曲線 ( $F_s(\theta_1, \theta_2) = 1$ ,  $F_s(\theta_1, \theta_2) = 0$ ,  $F_s(\theta_1, \theta_2) = -1$ ) の中央が解  $F_s(\theta_1, \theta_2) = 0$  である。



**Fig.2** Contour plot of  $F_s(\theta_1, \theta_2)$  in the  $(\theta_1, \theta_2)$  plane, where  $L_2 = L_1 = 1$  and  $a = 1$ .

**Fig.2** で、 $F_s(\theta_1, \theta_2) = 0$  の解曲線と  $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$  の直線の交点が静止平衡解 (即ち、 $\theta_1 = \alpha$ ,  $\theta_2 = 2\pi - \alpha$  で、 $\alpha$  の表式は (2.9) 式に示される) を表す。**Fig.2(a)** は  $c = a = 1$  (並進振り) の場合の  $F_s(\theta_1, \theta_2)$  の等高線図であり、運動中に糸と円木は平行四辺形を成し、静止平衡解は  $\theta_1 = \alpha = 0$ ,  $\theta_2 = 2\pi$  と表され、 $\varphi = 0$  なので円木は水平に保たれる。**Fig.2(b)** の等高線図は  $c = 1.5$ ,  $\alpha = 30^\circ = \pi/6$  の場合であり、 $F_s(\theta_1, \theta_2) = 0$  の解は上に凸の曲線であり、 $\theta_2$  が

$\theta_1$  の二価関数となる領域が見られる．**Fig.2(c)** は  $c = 0.5$ ,  $\alpha = -30^\circ = -\pi/6$  の場合であり，解は下に凸の曲線である．いずれの場合も， $\theta_1 = \alpha$  の近傍での角変位について線形化できる．

この系の静止平衡状態は，糸の張力  $S_1, S_2$  ( $S_1 \geq 0, S_2 \geq 0$ ) と円木の重力による力の釣り合いで与えられ，対称 2 点吊り振子の場合の静止平衡解が示される：

$$\begin{cases} -S_1 \sin(\theta_1) + S_2 \sin(2\pi - \theta_2) = 0 \rightarrow S_1 = S_2, \\ S_1 \cos(\theta_1) + S_2 \cos(2\pi - \theta_2) = m_1 g \\ \rightarrow 2S_1 \cos(\alpha) = m_1 g \end{cases} \quad (2.7)$$

このときの  $C_1, C_2$  点の回りの力の moment の釣合は，次のように表わされる：

$$\begin{cases} -(x_G - x_0)m_1 g + 2cS_2 \cos(2\pi - \theta_2) = 0, \\ -2cS_1 \cos(\theta_1) + (2c + x_0 - x_G)m_1 g = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

これらは，(2.7) 式の後者の式を導く．**Fig.1, 2** の場合について，これらの関係式は満足されている．つまり，**Fig.1** の壁・糸・円木の配置と円木の重心位置が力学的に適合している保証を (2.7), (2.8) が与えている．

## 2.1 対称 2 点吊り振子の静止平衡状態と攪乱状態 (微小攪乱)

対称 2 点吊り振子の静止平衡状態は  $\theta_1 = \alpha, \theta_2 = 2\pi - \alpha$ ,  $F_s(\theta_1, \theta_2) = 0$  と表され，解  $\alpha$  が求められる：

$$\begin{aligned} F_s(\theta_1, \theta_2) &= F_s(\alpha, 2\pi - \alpha) = 0 \\ &= 4c^2 - 4a^2 - 8cL_1 \sin(\alpha) + 4L_1^2 \sin^2(\alpha) \\ \sin(\alpha) &= \frac{c \mp a}{L_1} \rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{c \mp a}{L_1}\right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

静止平衡解  $\alpha$  ( $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ ) が存在するための条件は， $|(c \mp a)/L_1| \leq 1$  である．(2.9) 式の復号の正の場合 (区別のため  $\alpha = \alpha_2$  と表す) は，襷がけ振子の静止平衡状態を表す．ここでは，復号の負の場合 ( $\alpha = \alpha_1$ ) を扱う．ここで， $h = L_1 \cos(\alpha_1)$  とおいて，振子の静止平衡状態を規定する parameter  $\alpha_1, \beta$  を先例<sup>[3]</sup> に習い次のように定義する：

$$\tan(\alpha_1) = \frac{c - a}{h}, \quad \beta = \frac{c}{a} \quad (2.10)$$

これは， $0 < \alpha_1 < \pi/2$  のときに  $\tan(\alpha_1) > 0, \beta > 1$  (つまり **Fig.1(a)** の配置の静止平衡状態) となり， $-\pi/2 \leq \alpha_1 < 0$  のときには  $\tan(\alpha_1) < 0, \beta < 1$  (**Fig.1(b)** の静止平衡状態) である．特別な場合として， $\beta = 0$  ( $\alpha_1 < 0$ ) は  $C_1, C_2$  点が 1 点となる場合 (物理振子) である．また， $\beta = 1$  ( $a = c, \alpha_1 = 0$ ) は  $C_1, A, B, C_2$  点は静止平衡状態では長方形の頂点となり，運動するときには平行四辺形となるから，円木  $AB$  の姿勢は水平に保たれる．この場合が並進振子である．

静止平衡状態に攪乱  $\theta_{11}$  のみを加えて， $\theta_1 = \alpha_1 + \theta_{11}$ ,  $\theta_2 = 2\pi - \alpha_1 + \theta_{11}$  とおくと， $F_s(\theta_1, \theta_2)$  は次式となる：

$$\begin{aligned} F_s(\theta_1, \theta_2) &= F_s(\alpha_1 + \theta_{11}, 2\pi - \alpha_1 + \theta_{11}) \\ &= 8c(c - a)(1 - \cos(\theta_{11})) \end{aligned} \quad (2.11)$$

即ち， $c = 0$  ( $\beta = 0$ ),  $c = a$  ( $\beta = 1$ ) の場合には， $F_s(\theta_1, \theta_2) = 0$  が成り立つので，攪乱状態は  $\theta_{11}$  で表現できる．そのほかの場合， $1 - \cos(\theta_{11}) = O(\theta_{11}^2)$  の程度であるから，その近似の範囲で  $\theta_{11}$  が解である．ここから  $F_s(\theta_1, \theta_2) = 0$  の近似解  $\theta_2 = 2\pi - \alpha_1 + \theta_{11} + O(\theta_{11}^2)$  を求めることもできるが，ここでは攪乱の leading term の具体形として記録するに留めておき，次の小節で厳密解を求める．

更に，攪乱の大きさの程度と相互関係を調べるため，先に求めた静止平衡状態  $(\theta_1, \theta_2, \varphi) = (\alpha_1, 2\pi - \alpha_1, 0)$  に攪乱  $\epsilon(\theta_{11}, \theta_{21}, \varphi_1)$  ( $0 < \epsilon \ll 1$  は微小 parameter) を加え，次のように表す：

$$(\theta_1, \theta_2, \varphi) = (\alpha_1 + \epsilon\theta_{11}, 2\pi - \alpha_1 + \epsilon\theta_{21}, \epsilon\varphi_1) \quad (2.12)$$

この攪乱状態を (2.3) 式と方程式  $F_s(\theta_1, \theta_2) = 0$  に代入し，それらを静止平衡状態の周りで Taylor 展開し，攪乱の 2 次の量まで求めると次の関係式が導かれる：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\beta_1(\theta_{11} + \theta_{21}) + 2\varphi)\epsilon + \frac{h\beta(\theta_{11}^2 - \theta_{21}^2)}{4a}\epsilon^2 \\ + O(\epsilon^3) = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} -4ah(\theta_{11} - \theta_{21})\epsilon + [L_1^2(\theta_{11} - \theta_{21})^2 \\ + 2a^2\beta_1(\theta_{11}^2 + 2\beta_1\theta_{11}\theta_{21} + \theta_{21}^2)]\epsilon^2 \\ + O(\epsilon^3) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

但し， $\beta_1 = \beta - 1$  である．後者から  $\theta_{11} = \theta_{21}$  を得るから，前者に代入して， $\varphi_1$  が  $\theta_{11}$  で表される：

$$\varphi_1 = -\beta_1\theta_{11} \quad (2.15)$$

即ち， $c > a$  ( $\beta > 1$ ) のとき  $\varphi_1$  と  $\theta_{11}$  とは逆位相であり， $c < a$  ( $\beta < 1$ ) のとき  $\varphi_1$  と  $\theta_{11}$  は同位相となることが確認できる．

## 2.2 静止平衡状態周りの円木の攪乱の記述と円木の運動

対称 2 点吊り振子の場合，静止平衡解に攪乱  $\theta_{11}, \theta_{21}$  を加えて，次のように表すことができる：

$$\begin{aligned} F_s(\alpha_1 + \theta_{11}, 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21}) \\ = 4c^2 - 4a^2 + 2L_1^2 - 4cL_1 \sin(\alpha_1 + \theta_{11}) \\ + a_1 \sin(\theta_{21}) - b_1 \cos(\theta_{21}) \\ = d_1 + c_1 \sin(\theta_{21} - \gamma) = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

ここに含まれる角度  $\gamma \equiv \gamma(\theta_{11})$  は次式で定義される：

$$\gamma = \arcsin(b_1/c_1) \quad (-\pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2) \quad (2.17)$$

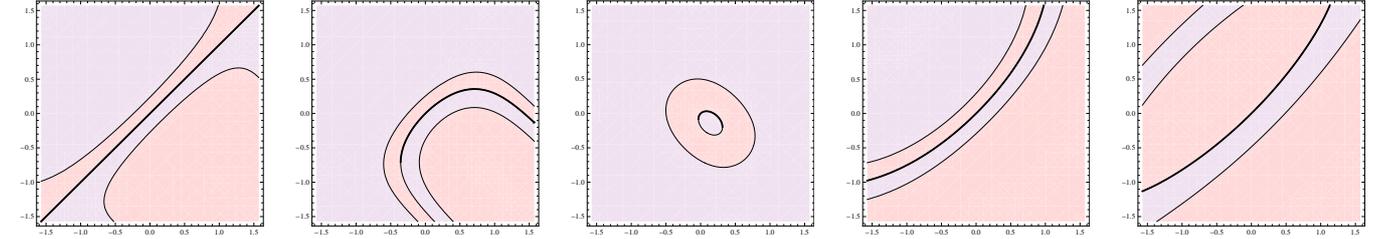
また, (2.16) 式の係数  $a_1-d_1$  は次式で定義される:

$$\begin{cases} a_1 = 4cL_1 \cos(\alpha_1) - 2L_1^2 \sin(2\alpha_1 + \theta_{11}), \\ b_1 = 2L_1^2 \cos(2\alpha_1 + \theta_{11}) + 4cL_1 \sin(\alpha_1), \\ c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \\ d_1 = 4c^2 - 4a^2 + 2L_1^2 - 4cL_1 \sin(\alpha_1 + \theta_{11}) \end{cases} \quad (2.18)$$

これらを用いて (2.16) 式が書き換えられ,  $\theta_{21}$  は  $\theta_{11}$  の関数で表される:

$$\theta_{21} \equiv \theta_{21}(\theta_{11}) = \gamma - \arcsin\left(\frac{d_1}{c_1}\right) \quad (2.19)$$

この解と等高線処理による図式解法で得られた解  $F_s(\alpha_1 + \theta_{11}, 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21}) = 0$  を Fig.3 に示す. (2.19) 式の解析



**Fig.3** Contour plot of analytic solution  $\theta_{21}(\theta_{11})$  (black solid line) given by (2.19) and contour plot of  $F_s(\alpha_1 + \theta_{11}, 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21})$  in the  $(\theta_1, \theta_2)$  plane, where  $L_1 = 1, a = 1$  and  $\alpha_1 = \arcsin[(c - a)/L_1]$ . The three thin solid curves are for  $F_s = 1, F_s = 0$  and  $F_s = -1$ .

円木の並進運動は (2.2) 式の  $(x_G, z_G)$  を用いて記述され,  $\theta_{21}$  は  $\theta_{11}$  の関数である. 円木の重心回りの鉛直面内の回転 ( $y$  軸回りの回転) は (2.20) 式の角度  $\varphi = 0 + \varphi_1$  で記述され,  $\varphi_1$  は  $\theta_{11}, \theta_{21}$  の関数である. 重心回りの円木の慣性 moment  $J$  は  $J = \frac{2}{3}\rho a^3 = \frac{1}{3}m_1 a^2$  と求められ, 回転の運動 energy は  $\frac{J}{2}\dot{\varphi}_1^2$  と表される. また, 重力 potential energy は  $-m_1 g z_G$  である. よって, 円木の運動を記述する Lagrange 関数  $\mathcal{L}_1$  は次のように表される:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{J}{2}\dot{\varphi}_1^2 + m_1 g z_G \quad (2.21)$$

この Lagrange 関数  $\mathcal{L}_1$  は, 静止平衡状態と攪乱状態の重ね合わせ ( $\theta_1 = \alpha_1 + \theta_{11}, \theta_2 = 2\pi - \alpha_1 + \theta_{21}, \varphi = 0 + \varphi_1$ ) で表現されて, 静止平衡解の周りで攪乱  $\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}), \varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$  に対して整理でき, 次のように表される:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{10} = K_1 - U_1, \\ K_1 = \frac{J}{2} \left( \frac{d\varphi_1}{d\theta_{11}} \right)^2 \dot{\theta}_{11}^2 + \frac{m_1}{8} L_1^2 \left[ 1 + \left( \frac{d\theta_{21}}{d\theta_{11}} \right)^2 + 2 \cos(2\alpha_1 + \theta_{11} - \theta_{21}) \frac{d\theta_{21}}{d\theta_{11}} \right] \dot{\theta}_{11}^2 \\ U_1 = -m_1 g \frac{L_1}{2} [\cos(\alpha_1 + \theta_{11}) + \cos(\alpha_1 - \theta_{21})] - m_1 g z_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

ここで, (2.19) 式により,  $\dot{\theta}_{21} = \dot{\theta}_{11} (d\theta_{21}/d\theta_{11})$  である.  $\dot{\varphi}_1$  は, (2.20) 式と (2.19) 式により,  $\theta_{11}, \theta_{21}$  で表される.

解  $\theta_{21}(\theta_{11})$  (黒い実線) は, 解が  $\theta_{11}$  の一価関数として表されている領域では完全に図式解法の解と一致していることが分かる. 更に, 三角関数の逆関数 (多価関数) の領域ごとの表現に対応して解析解を構成する必要がある.

以上の  $\theta_{21}(\theta_{11})$  の解析結果を考慮して,  $\varphi$  の関係式は次のようになり, 逆正接関数を用いて,  $\varphi$  の解析的表現  $\varphi = 0 + \varphi_1$  ( $\varphi_1 \equiv \varphi_1(\theta_{11}, \theta_{21}(\theta_{11}))$ ) が求められる:

$$\tan(\varphi_1) = -\frac{\cos(\alpha_1 - \theta_{21}) - \cos(\alpha_1 + \theta_{11})}{2c/L_1 - \sin(\alpha_1 - \theta_{21}) - \sin(\alpha_1 + \theta_{11})} \quad (2.20)$$

この場合, 関数  $\theta_{21}(\theta_{11})$  は (2.19) 式の逆正弦関数の定義領域の制限に影響されるので注意が必要である.

以上の結果, (2.22) 式は円木の運動を角度攪乱  $\theta_{11}$  で記述する.

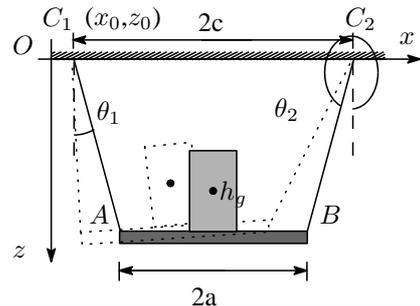
静止壁面の場合, 円木は自由振動し, Lagrange 関数 (2.22) を構成している運動 energy  $K_1$  と重力 potential energy  $U_1$  の和の力学的 energy  $E_1$  は保存量である:

$$E_1 = K_1 + U_1 \quad (2.23)$$

これにより, 位相面図を描き,  $E_1$  が一定値のときの運動の特徴を表示できる. なお, 重力 potential energy  $U_1$  に基づき, 2.4 節で運動の特徴が説明される. また,  $E_1$  が保存することは, 数値計算精度の保証を得るために用いられる.

### 2.3 対称 2 点吊り振子上の物体の運動

Fig.4 は円木上に物体がある場合の静止平衡状態を表し, 円木の重心位置から物体の重心までの高さは  $h_g$  である. 円木と共に物体も傾くとき, 回転 moment を生じる.



**Fig.4** A body with the height of its center of mass  $h_g$ , on the bifilar suspension pendulum.

円木に載せた質量  $m_2$  の物体の重心の座標  $(x_{G2}, z_{G2})$  は、重心の高さ  $h_g$  を用いて、次のように表わされる:

$$\begin{cases} x_{G2} = x_G - h_g \sin(\varphi) \\ z_{G2} = z_G - h_g \cos(\varphi) \end{cases} \quad (2.24)$$

物体の運動を記述する Lagrange 関数  $\mathcal{L}_2$  は、物体重心の並進運動と重心回りの回転運動と重力を考慮して、次のように表される:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_{G2}^2 + \dot{z}_{G2}^2) + \frac{J_2}{2} \dot{\varphi}^2 + m_2 g z_{G2} \quad (2.25)$$

これに (2.24) 式を代入して整理すると、次式を得る:

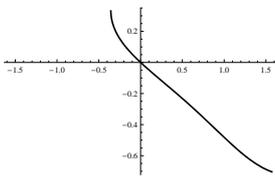
$$\begin{cases} \mathcal{L}_{20} = K_2 - U_2, \\ K_2 = \frac{m_2}{8} L_1^2 \left[ 1 + \left( \frac{d\theta_{21}}{d\theta_{11}} \right)^2 \right. \\ \quad + 2 \cos(2\alpha_1 + \theta_{11} - \theta_{21}) \frac{d\theta_{21}}{d\theta_{11}} \Big] \dot{\theta}_{11}^2 \\ \quad - \frac{m_2}{2} L_1 h_g \left[ \cos(\alpha_1 + \theta_{11} - \varphi_1) \frac{d\varphi_1}{d\theta_{11}} \right. \\ \quad \left. + \cos(\alpha_1 - \theta_{21} + \varphi_1) \frac{d\theta_{21}}{d\theta_{11}} \frac{d\varphi_1}{d\theta_{11}} \right] \dot{\theta}_{11}^2 \\ \quad + \frac{J + m_2 h_g^2}{2} \left( \frac{d\varphi_1}{d\theta_{11}} \right)^2 \dot{\theta}_{11}^2, \\ U_2 = -m_2 g z_0 - m_2 g \left[ \frac{L_1}{2} [\cos(\alpha_1 + \theta_{11}) \right. \\ \quad \left. + \cos(\alpha_1 - \theta_{21})] - h_g \cos(\varphi_1) \right] \end{cases} \quad (2.26)$$

ここでも、(2.19) 式により、 $\dot{\theta}_{21} = \dot{\theta}_{11} (d\theta_{21}/d\theta_{11})$  である。 $\dot{\varphi}_1$  は、(2.20), (2.19) 式により  $\theta_{11}, \theta_{21}$  で表される。その結果、(2.26) 式は物体の運動を角度攪乱  $\theta_{11}$  で記述できる。

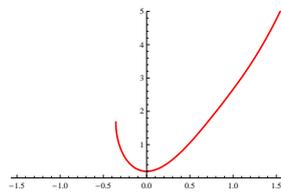
静止壁面の場合、物体は自由振動し、Lagrange 関数 (2.26) を構成している運動 energy  $K_2$  と重力 potential energy  $U_2$  の和の力学的 energy  $E_2$  は保存量である:

$$E_2 = K_2 + U_2 \quad (2.27)$$

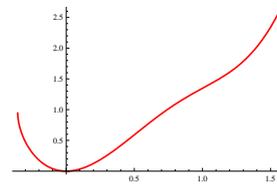
これにより、位相面図を描き、 $E_2$  が一定値のときの運動の特徴を表示できる。 $E_2$  が保存することは、数値計算精度



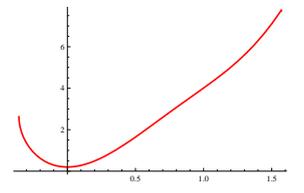
**Fig.5a** Solution  $\varphi(\theta_{11})$  versus  $\theta_{11}$  for  $h_g = 1$ .



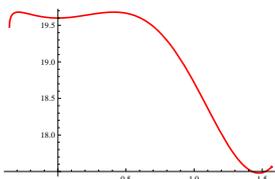
**Fig.5b**  $U_1(\theta_{11})$  versus  $\theta_{11}$  for  $h_g = 1$ .



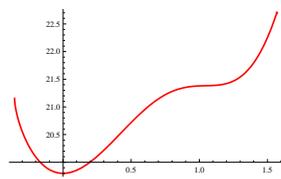
**Fig.5c**  $U_2(\theta_{11})$  versus  $\theta_{11}$  for  $h_g = 1$ .



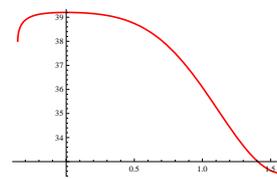
**Fig.5d**  $U(\theta_{11})$  versus  $\theta_{11}$  for  $h_g = 1$ .



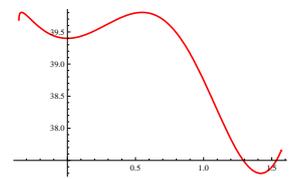
**Fig.6a**  $U_2(\theta_{11})$  versus  $\theta_{11}$  for  $h_g = 3$ .



**Fig.6b**  $U(\theta_{11})$  versus  $\theta_{11}$  for  $h_g = 3$ .



**Fig.7a**  $U_2(\theta_{11})$  versus  $\theta_{11}$  for  $h_g = 5$ .



**Fig.7b**  $U(\theta_{11})$  versus  $\theta_{11}$  for  $h_g = 5$ .

の保証を得るために用いられる。重力 potential energy  $U_2$  は次の小節で説明される。

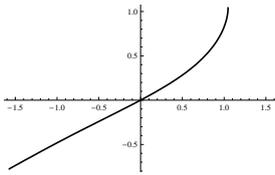
## 2.4 重力 potential energy

Lagrange 関数 (2.22), (2.26) に含まれる重力 potential energy を  $\theta_{11}$  の関数として、次のように定義する:

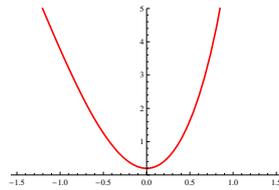
$$\begin{cases} U_1(\theta_{11}) = -m_1 g z_G(\theta_{11}) + 10, \\ U_2(\theta_{11}) = -m_2 g z_{G2}(\theta_{11}), \\ U(\theta_{11}) = U_1(\theta_{11}) + U_2(\theta_{11}) \end{cases} \quad (2.28)$$

但し、 $U_1(\theta_{11})$  は円木の重力 potential energy であり、作図のため一定値 10 だけ shift させている。 $U_2(\theta_{11})$  は物体の重力 potential energy であり、 $U(\theta_{11})$  はそれらの合成である。なお、(2.22), (2.26) 式の重力 potential energy に含まれる一定値  $z_0$  は Lagrange の運動方程式には現れないので、(2.28) 式に  $z_0$  を考慮する必要はない。並進振子 ( $a = c$ ) では  $\varphi_1 = 0$  となり、(2.28) の重力 potential energy は、いずれも下に凸で、 $\theta_{11} = 0$  の軸に対して対称な形状となる。そうでない場合 ( $a \neq c$ ,  $c = 1.5$ ,  $a = 1$ ) には、 $\varphi_1$  も変化して (Fig.5a),  $\theta_{11}$  と逆位相となる。一例として、 $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 1$ ,  $g = 9.8$ ,  $h_g = 1$  と取ると、重力 potential energy は、 $\theta_{11} = 0$  の軸に対して非対称な形状となる (Fig.5b-5d)。 $h_g$  が増加すると、 $U_2(\theta_{11})$  は  $h_g \cos(\varphi_1)$  の項に起因して下に凹になる ( $h_g = 3$  の Fig.6,  $h_g = 5$  の Fig.7)。つまり、重心の高さ  $h_g$  が増加すると、物体が転倒・吊り下がりすることを表す。物体の重心の高さが下がり、 $h_g = 0$  のときには  $U_2(\theta_{11})$  は  $U_1(\theta_{11})$  と同形となる。

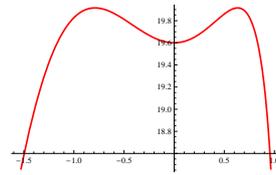
一方、 $c = 0.5$ ,  $a = 1$  の場合には、 $\varphi_1$  の変化 (Fig.8a) は  $\theta_{11}$  と同位相となり、Fig.5a とは異なる。この場合にも、重力 potential energy は、 $\theta_{11} = 0$  の軸に対して非対称な形状となる (Fig.8b-8d)。 $h_g$  が増加すると、 $U_2(\theta_{11})$  は  $h_g \cos(\varphi_1)$  の項に起因して下に凹になる。



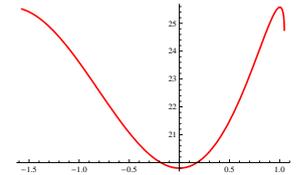
**Fig.8a** Solution  $\varphi(\theta_{11})$  versus  $\theta_{11}$  for  $h_g = 3$ .



**Fig.8b**  $U_1(\theta_{11})$  versus  $\theta_{11}$  for  $h_g = 3$ .



**Fig.8c**  $U_2(\theta_{11})$  versus  $\theta_{11}$  for  $h_g = 3$ .



**Fig.8d**  $U(\theta_{11})$  versus  $\theta_{11}$  for  $h_g = 3$ .

### 3 おわりに

前報<sup>[6],[9]</sup>では、2点吊り振子の3つの振動 mode の特徴を述べ、それらの振子の静止平衡状態を表す幾何学的関係式を図式解法により解いた。それに続き、本報告では、対称2点吊り振子の mode 1 の「遊動円木」に焦点をあて、静止平衡状態の幾何学的関係式を解析的に解き、攪乱状態の角度変数を用いて円木と物体の力学的 energy の厳密な関係式を示し、重力 potential energy に基づく運動の特性を求めた。これらと関連する線形振動は、次報<sup>[10]</sup>で扱う。本報告の一部は、先に講演発表したこと<sup>[11]-[15]</sup>を付記する。

#### 参考文献

- [1] 川口 衛, 立道 郁生: “21318 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 1 原理と免震床の実大実験” 学術講演梗概集. B-2, 構造 II, 振動, 原子カプラント 2000 (2000), pp.635-636 (社団法人日本建築学会).
- [2] 登坂 史生, 川口 衛: “21319 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 2 高層建築物への適用” 学術講演梗概集. B-2, 構造 II, 振動, 原子カプラント 2000 (2000), pp.637-638 (社団法人日本建築学会).
- [3] 島田 圭一郎, 川口 衛: “21298 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 3 対称 2 点吊り振子の性質について” 学術講演梗概集. 構造系 (B-2) (2002), pp.595-596 (社団法人日本建築学会).
- [4] 井出 知良, 川口 衛, 永田 秀正, 服部 宏己, 君島 昭男: “21300 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 4 実構造物における自由振動試験” 学術講演梗概集. 構造系 (B-2) (2002), pp.599-600 (社団法人日本建築学会).
- [5] Ding Zhou & Tianjian Ji: “Dynamic characteristics of a generalised suspension system” International Journal of Mechanical Sciences **50** (2008), pp.30-42.
- [6] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 内堀 晃彦, 宮内 太積, 川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (3): 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.63-70.
- [7] 小出 昭一郎: “解析力学” 岩波書店, 1983.
- [8] 坪井 忠二: “振動論” (昭和 17 年初版発行, 昭和 51 年復刻再版発行) 理工学社, 1976.

- [9] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 内堀 晃彦, 宮内 太積, 川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (4): 2 点吊り振子の実験と解析” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.71-78.
- [10] 望月 孔二, 宮内 太積, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 川船 雄一郎, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.
- [11] 望月 孔二, 宮内 太積, 内堀 晃彦, 川上 誠, 中道 義之, Mazni Al Irfan, 川船 雄一郎, 佐々木 隆吾, 舟田 敏雄: “PSD 簡易計測システム試作と 2 点吊り振子の実験・解析” 電子情報通信学会 2009 年総合大会 2009 年 3 月 17 日 (火) ~ 20 日 (金) 愛媛大 (松山市) 3 月 18 日 (水) 午前, 「D-15 教育工学」 (一般セッション), 講演番号: D-15-24. 「電子情報通信学会 2009 年総合大会講演論文集」の DVD 情報・システムソサイエティ p.202. file: d\_15\_024.pdf
- [12] 宮内 太積, 望月 孔二, 内堀 晃彦, 川上 誠, 中道 義之, 舟田 敏雄: “水平加振による非線形振動系の実験と振動解析 (振動学教材開発)” 日本機械学会東海支部第 58 期総会・講演会 2009 年 3 月 17 日 (火), 18 日 (水) 岐阜大学 工学部 3 月 18 日 (水) 12:45-14:00 GS 機械力学 講演番号 263. 日本機械学会東海支部第 58 回総会講演会 講演論文集 ('09.3.17-18) No.093-1, pp.133-134.
- [13] 舟田 敏雄, 宮内 太積, 望月 孔二, 内堀 晃彦, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成振動の数値解析” 第 58 回理論応用力学講演会 講演論文集 NCTAM2009, pp.255-256. 第 58 回理論応用力学講演会, 日本学術会議, 2009 年 6 月 9 日 (火) ~ 11 日 (木), OS15 連成現象・複合現象のシミュレーション 講演番号 2B13 (6/10).
- [14] 望月 孔二, 宮内 太積, 舟田 敏雄, 内堀 晃彦, 川上 誠, 中道 義之, 大庭 勝久: “2 点吊り振子の基礎運動解析と PSD による簡易計測システム試作計画” 第 29 回高専情報処理教育研究発表会 論文集第 29 号, pp.8-11.
- [15] 中道 義之, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠, 望月 孔二: “出前授業のための「振子」教材の調査と整備” 第 29 回高専情報処理教育研究発表会 論文集第 29 号, pp.12-15.