2 点吊り振子の 3 つの mode 間相互作用の解析 (2)

舟田 敏雄[*1] 木ノ内 智貴[*1] 桜井 賢人[*1] 大庭 勝久[*1] 青木 悠祐[*1] 宮内 太積[*2] 望月 孔二[*3]

An Analysis of Mode Coupling in Three Modes of Bifilar Suspension Pendulum (2)

Toshio FUNADA[*1] Toshiki KINOUCHI[*1] Kento SAKURAI[*1] Katsuhisa OHBA[*1] Yusuke AOKI[*1]
Tatsumi MIYAUCHI[*2] and Kouji MOCHIZUKI[*3]

Abstract: A bifilar suspension pendulum, a uniform density bar suspended at its two points by two strings of same length, may swing in a vertical plane or make torsional oscillation about a vertical axis. The swinging in a co-plane of the strings and the bar is called Mode 1, and the swinging in a vertical plane perpendicular to the bar is Mode 2. Mode 3 is the torsional oscillation about a vertical axis. These modes are linearly independent of each other, but it is possible to make nonlinear coupling oscillation between the modes as super/sub-harmonic and internal resonance. In order to study such coupling systematically, the formulation of the problems is made on two spherical coordinates systems and equations of motion for the three modes are derived for future scientific and engineering applications in theory and experiments.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Coupling of Three Oscillation Modes, Full Form of Equations of Motion

1 はじめに

対称 2 点吊り振子 (並進振子) を免震床に応用するための検討[1] に刺激されて，2 点吊り振子の静止平衡状態周りの振子運動について，運動方程式を導出して初期値問題を数値解析し，実験を行った[2]–[7]．その振子運動には，紐と円木の成す鉛直面内で揺れる “mode 1 (遊動円木 mode)” とそれに垂直な鉛直面内で揺れる “mode 2 (ブランコ mode)” があり，鉛直軸回りの円木の振動は，“mode 3 (捩れ振動 mode)” に分類される．

本報告では，各振動 mode の実験値と線形振動理論値の比較結果[4]–[8] に基づき，球座標系を用いた 3 つの振動 mode の表現により，線形共振/弱非線形共振の解析のための運動方程式の導出を試みる．本報告は，三部の内の第二報告であり，§2 を再掲して，前・続報[9],[10] に続く．

2 2 点吊り振子の 3 つの振動 mode の球座標表現

水平右手方向に x 軸，手前方向に y 軸，鉛直下方向に z 軸とするデカルト座標系 (x, y, z) を用い，**Fig.1** に示すように，C_1 点を起点に 2 点吊り振子の配置を記述する．

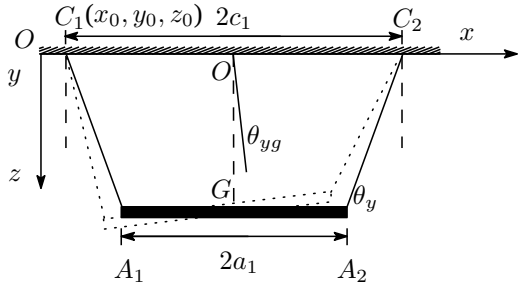

Fig.1 Bifilar suspension pendulum with $c_1 > a_1$ (mode 1).

[*1] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
[*2] 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.
[*3] 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.

また，球座標系を併用し，座標原点は適宜取るものとする．水平な上壁面上に C_1 点 (x_0, y_0, z_0) を取り．間隔 c_1 で，O 点 $(x_0 + c_1, y_0, z_0)$, C_2 点 $(x_0 + 2c_1, y_0, z_0)$ を取る．遊動円木の中央 (質量中心) を G 点 (x_g, y_g, z_g) とし，G 点から間隔 a_1 で，遊動円木上の左の紐の結び目位置を A_1 点 (x_1, y_1, z_1)，右の紐の結び目位置を A_2 点 (x_2, y_2, z_2) と表す．これらにより，各点間の長さ (距離) は $\overline{A_1A_2} = 2a_1$, $\overline{A_1G} = a_1$, $\overline{GA_2} = a_1$, $\overline{A_1C_1} = L_1$, $\overline{A_2C_2} = L_2$, $\overline{OG} = r_g$ と表される．回転角をデカルト座標系の軸回りに取って軸名の添え字を付け，O 点を原点とする球座標系 (r, θ_y, θ_z) を用い，z-x 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_{yg}，y-z 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_{xg} を取り，G 点の座標 (x_g, y_g, z_g) は次式で表される:

$$\begin{cases} x_g = r_g \sin(\theta_{yg}) + x_0 + c_1, \\ y_g = r_g \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{xg}) + y_0, \\ z_g = r_g \cos(\theta_{yg}) \cos(\theta_{xg}) + z_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

また，G 点を原点とする球座標系を用いて，z-x 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_y，x-y 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_z を取り，A_1 点の座標 (x_1, y_1, z_1) と A_2 点の座標 (x_2, y_2, z_2) は次式で表される:

$$\begin{cases} x_1 = x_g - a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z), \\ y_1 = y_g - a_1 \cos(\theta_y) \sin(\theta_z), \\ z_1 = z_g + a_1 \sin(\theta_y) \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_g + a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z), \\ y_2 = y_g + a_1 \cos(\theta_y) \sin(\theta_z), \\ z_2 = z_g - a_1 \sin(\theta_y) \end{cases} \tag{2.3}$$

紐の長さが等しく ($L_2 = L_1$, 対称 2 点吊り振子) 一定である．また, $\overline{A_1A_2} = 2a_1$ は次の f_0 で表され, $\overline{A_1C_1} = L_1$ は f_1，$\overline{A_2C_2} = L_2$ は f_2 で表される．水平面からの遊動

円木の傾き角の関係式は f_3, f_4 で与えられる:

$$\begin{cases} f_0 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 = 4a_1^2, \\ f_1 = (x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2-L_1^2 \\ = a_1^2+c_1^2-L_1^2-2a_1c_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z)+r_g^2 \\ +2r_g\left(a_1\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_y)\right. \\ +(c_1-a_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z))\sin(\theta_{yg}) \\ \left.-a_1\sin(\theta_{xg})\cos(\theta_y)\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_z)\right) = 0, \\ f_2 = (x_2-x_0-2c_1)^2+(y_2-y_0)^2+(z_2-z_0)^2-L_2^2 \\ = a_1^2+c_1^2-L_1^2-2a_1c_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z)+r_g^2 \\ -2r_g\left(a_1\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_y)\right. \\ +(c_1-a_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z))\sin(\theta_{yg}) \\ \left.-a_1\sin(\theta_{xg})\cos(\theta_y)\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_z)\right) = 0, \\ f_3 = -\dfrac{z_2-z_1}{x_2-x_1} = \sec(\theta_z)\tan(\theta_y), \\ f_4 = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \tan(\theta_z), \\ f_5 = \dfrac{z_2-z_1}{y_2-y_1} = -\csc(\theta_z)\tan(\theta_y) \end{cases} \tag{2.4}$$

紐の長さが等しく ($L_2 = L_1$) 一定であるから，f_1, f_2 の条件満たすことが求められる．f_1, f_2 の和を取ると，r_g を θ_y, θ_z で表現する式が得られる:

$$\begin{aligned} f_1+f_2 &= 2\left(a_1^2+c_1^2-L_1^2-2a_1c_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z)+r_g^2\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} r_g &= \sqrt{-\left(a_1^2+c_1^2-L_1^2-2a_1c_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z)\right)} \\ &\equiv r_{g1}(\theta_y,\theta_z) \end{aligned} \tag{2.6}$$

f_1, f_2 の差から角度の関係式が得られ，θ_y を個別の振動 mode を記述する変数 $\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z$ を基にして表現できる:

$$\begin{aligned} f_1-f_2 &= 4r_g\left[a_1\cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_y)\right. \\ &\quad +(c_1-a_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_z))\sin(\theta_{yg}) \\ &\quad \left.-a_1\cos(\theta_y)\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{xg})\sin(\theta_z)\right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \theta_y &= \arcsin(d_{11}/c_{11}) - \arcsin(b_{11}/c_{11}) \\ &\equiv \theta_{y1}(\theta_{xg},\theta_{yg},\theta_z) \end{aligned} \tag{2.8}$$

但し，a_{11}-d_{11} は次のように定義した:

$$\begin{cases} a_{11} = \cos(\theta_{xg})\cos(\theta_{yg}), \\ b_{11} = -\cos(\theta_z)\sin(\theta_{yg}) \\ -\cos(\theta_{yg})\sin(\theta_{xg})\sin(\theta_z), \\ c_{11} = \sqrt{a_{11}^2+b_{11}^2},\ \ d_{11} = -\dfrac{c_1}{a_1}\sin(\theta_{yg}) \end{cases} \tag{2.9}$$

この系の静止平衡状態は，5 つの時間の関数について $(r_g, \theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_y, \theta_z) = (r_{g0}, 0, 0, 0, 0)$ と表される．但し，r_{g0} は次式で定義される:

$$r_{g0} = \sqrt{L_1^2-(a_1-c_1)^2} \tag{2.10}$$

静止平衡状態の回りで攪乱に対して (2.6), (2.8) 式を Taylor 展開し，微小 parameter ϵ ($\epsilon \ll 1$) を用いて攪乱を $\epsilon\theta_{yg}$, $\epsilon\theta_{xg}$, $\epsilon\theta_z$ と表すと，θ_y, r_g は次のように近似される：

$$\begin{aligned} \theta_y &= \left(1-\frac{c_1}{a_1}\right)\epsilon\theta_{yg}+\epsilon^2\theta_{xg}\theta_z \\ &\quad +\epsilon^3\left[\left(1-\frac{c_1^2}{a_1^2}\right)\frac{c_1\theta_{yg}^3}{6a_1}+\frac{\theta_{yg}}{2}\left(\left(1-\frac{c_1}{a_1}\right)\theta_{xg}^2-\theta_z^2\right)\right] \\ &\quad +\epsilon^4\left[\frac{1}{3}\theta_{xg}^3\theta_z-\left(1-\frac{c_1}{a_1}\right)\theta_{xg}\theta_{yg}^2\theta_z-\frac{1}{6}\theta_{xg}\theta_z^3\right] \\ &\quad +O(\epsilon^5) \equiv \theta_{y1}(\theta_{xg},\theta_{yg},\theta_z) = \theta_{y1} \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} r_g &= r_{g0}-\frac{\epsilon^2a_1c_1}{2r_{g0}}\left(\theta_y^2+\theta_z^2\right) \\ &\quad +\frac{\epsilon^4a_1c_1}{4r_{g0}}\left[\left(\frac{1}{6}-\frac{a_1c_1}{2r_{g0}^2}\right)\left(\theta_y^4+\theta_z^4\right)+\left(1-\frac{a_1c_1}{r_{g0}^2}\right)\theta_y^2\theta_z^2\right] \\ &\quad +O(\epsilon^6) \equiv r_{g1}(\theta_y,\theta_z) = r_{g1}(\theta_{y1}(\theta_{xg},\theta_{yg},\theta_z),\theta_z) \end{aligned} \tag{2.12}$$

つまり，(2.12) 式の θ_y には (2.11) 式を代入して項を整理し，$O(\epsilon^4)$ まで取るものとする．

以上の表式を用いて，質量 m_1，慣性 moment J_y, J_z ($= J_y$) の遊動円木の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は，次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_g^2+\dot{y}_g^2+\dot{z}_g^2\right)+\frac{J_y}{2}\dot{\theta}_y^2+\frac{J_z}{2}\epsilon^2\dot{\theta}_z^2\cos^2(\theta_y)+m_1gz_g \\ &= \frac{m_1}{2}\dot{r}_g^2+\frac{m_1}{2}\epsilon^2r_g^2\left(\dot{\theta}_{xg}^2\cos^2(\epsilon\theta_{yg})+\dot{\theta}_{yg}^2\right)+\frac{J_y}{2}\dot{\theta}_y^2 \\ &\quad +\frac{J_z}{2}\epsilon^2\dot{\theta}_z^2\cos^2(\theta_y)+m_1g\left(r_g\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg})+z_0\right) \\ &\quad +m_1\left[\dot{r}_g\dot{x}_0\sin(\epsilon\theta_{yg})+\dot{r}_g\dot{y}_0\sin(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg})\right. \\ &\quad +\dot{r}_g\dot{z}_0\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg})+r_g\dot{x}_0\epsilon\dot{\theta}_{yg}\cos(\epsilon\theta_{yg}) \\ &\quad -\epsilon r_g\dot{z}_0\left(\dot{\theta}_{xg}\sin(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg})+\dot{\theta}_{yg}\cos(\epsilon\theta_{xg})\sin(\epsilon\theta_{yg})\right) \\ &\quad \left.+\epsilon r_g\dot{y}_0\left(\dot{\theta}_{xg}\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg})-\dot{\theta}_{yg}\sin(\epsilon\theta_{xg})\sin(\epsilon\theta_{yg})\right)\right] \\ &\quad +\frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2\right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

ここでは，C_1 点の座標が時間の関数となる場合も含まれている．C_1 点が固定の場合には，$x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ であるから，遊動円木の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}_0$ は，次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{m_1}{2}\left(\dot{r}_g^2+\epsilon^2r_g^2\left(\dot{\theta}_{xg}^2\cos^2(\epsilon\theta_{xg})+\dot{\theta}_{yg}^2\right)\right) \\ &\quad +\frac{J_y}{2}\dot{\theta}_y^2+\frac{J_z}{2}\epsilon^2\dot{\theta}_z^2\cos^2(\theta_y)+m_1gr_g\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg}) \\ &= \frac{m_1}{2}\left(\epsilon^2\left(\frac{\partial r_{g1}}{\partial(\epsilon\theta_{y1})}\dot{\theta}_{y1}+\frac{\partial r_{g1}}{\partial(\epsilon\theta_z)}\dot{\theta}_z\right)^2\right. \\ &\quad \left.+\epsilon^2r_{g1}^2\left(\dot{\theta}_{xg}^2\cos^2(\epsilon\theta_{xg})+\dot{\theta}_{yg}^2\right)\right) \\ &\quad +\frac{J_y}{2}\epsilon^2\left(\frac{\partial\theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_{xg})}\dot{\theta}_{xg}+\frac{\partial\theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_{yg})}\dot{\theta}_{yg}+\frac{\partial\theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_z)}\dot{\theta}_z\right)^2 \\ &\quad +\frac{J_z}{2}\epsilon^2\dot{\theta}_z^2\cos^2(\theta_y)+m_1gr_{g1}\cos(\epsilon\theta_{xg})\cos(\epsilon\theta_{yg}) \end{aligned} \tag{2.14}$$

ここで，時間の未知関数は $r_g = r_{g1}(\theta_{y1}(\theta_{xg},\theta_{yg},\theta_z),\theta_z)$, $\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_y = \theta_{y1}(\theta_{xg},\theta_{yg},\theta_z), \theta_z$ であり，束縛条件 f_1, f_2 により，運動を記述する上で基本となる変数 (未知関数) は 3 つである．この一般関係式に基づき，系の個々の振動 mode の記述との関連を調べる．

3　2 点吊り振子の非線形連成振動系の運動方程式

Lagrange 関数 (2.13) 式では，scaling parameter ϵ ($\epsilon \ll 1$) を用い，$\theta_{yg} \to \epsilon\theta_{yg}, \theta_{xg} \to \epsilon\theta_{xg}, \theta_z \to \epsilon\theta_z$ と変換し，同時に $r_g = r_{g1}(\theta_{y1}(\epsilon\theta_{xg}, \epsilon\theta_{yg}, \epsilon\theta_z), \theta_z), \theta_y = \theta_{y1}(\epsilon\theta_{xg}, \epsilon\theta_{yg}, \epsilon\theta_z), \theta_z$ と変換してある．それを ϵ の冪に展開し，$O(\epsilon^4)$ まで取る．これは静止平衡状態 $(r_g, \theta_{yg}, \theta_{xg}, \theta_z, \theta_y) = (r_{g0}, 0, 0, 0, 0)$ 回りで，ϵ で展開することを意味する．非線形項のさらに高次の効果を考えることはできるが，静止平衡状態からの摂動では，線形理論が $O(\epsilon^2)$ であるので，$O(\epsilon^4)$ まで取込むことにより $O(\epsilon^3)$ と $O(\epsilon^4)$ の非線形効果は考慮される．この打ち切りで問題が数学的に不安定になる可能性があるが，力学的 energy の保存則等で力学的正当性は check する．Lagrange 関数 (2.13) 式の各項を (2.1)-(2.12) 式を用いて書き換え，係数を定義して，運動 energy K_2, 重力 potential enery U_2, 外部励振に関する係数 V_{11}, V_{12}, V_{13} は次式で表される:

$$\begin{aligned}K_2 &= \epsilon^2\left(m_{01}\dot\theta_{xg}^2 + m_{02}\dot\theta_{yg}^2 + m_{03}\dot\theta_z^2\right) + \epsilon^3\left(m_{04}\theta_z\dot\theta_{xg}\dot\theta_{yg} + m_{05}\theta_{xg}\dot\theta_{yg}\dot\theta_z\right)\\ &+ \epsilon^4\left(m_{11}\theta_{yg}^2\dot\theta_{xg}^2 + m_{12}\theta_z^2\dot\theta_{xg}^2 + m_{13}\theta_{xg}\theta_{yg}\dot\theta_{xg}\dot\theta_{yg} + m_{14}\theta_{xg}^2\dot\theta_{yg}^2 + m_{15}\theta_{yg}^2\dot\theta_{yg}^2 + m_{16}\theta_z^2\dot\theta_{yg}^2 + m_{17}\theta_{xg}\theta_z\dot\theta_{xg}\dot\theta_z\right.\\ &\left.+ m_{18}\theta_{yg}\theta_z\dot\theta_{yg}\dot\theta_z + m_{19}\theta_{xg}^2\dot\theta_z^2 + m_{20}\theta_z^2\dot\theta_z^2 + m_{21}\theta_{yg}^2\dot\theta_z^2\right),\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}U_2 &= \epsilon^2\left(u_{01}\theta_{xg}^2 + u_{02}\theta_{yg}^2 + u_{03}\theta_z^2\right) + \epsilon^3 u_{04}\theta_{xg}\theta_{yg}\theta_z\\ &+ \epsilon^4\left(u_{11}\theta_{xg}^4 + u_{12}\theta_{xg}^2\theta_{yg}^2 + u_{13}\theta_{yg}^4 + u_{14}\theta_{xg}^2\theta_z^2 + u_{15}\theta_{yg}^2\theta_z^2 + u_{16}\theta_z^4\right),\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases}V_{11} = \epsilon^2 n_{11}\dot\theta_{yg} + \epsilon^4\left(n_{12}\theta_{yg}^2\dot\theta_{yg} + n_{13}\theta_z^2\dot\theta_{yg} + n_{14}\theta_{yg}\theta_z\dot\theta_z\right),\\ V_{12} = \epsilon^2 n_{21}\dot\theta_{xg} + \epsilon^4\left(n_{22}\theta_{xg}^2\dot\theta_{xg} + n_{23}\theta_{yg}^2\dot\theta_{xg} + n_{24}\theta_z^2\dot\theta_{xg} + n_{25}\theta_{xg}\theta_{yg}\dot\theta_{yg} + n_{26}\theta_{xg}\theta_z\dot\theta_z\right),\\ V_{13} = \epsilon^3\left(n_{31}\theta_{xg}\dot\theta_{xg} + n_{32}\theta_{yg}\dot\theta_{yg} + n_{33}\theta_z\dot\theta_z\right) + \epsilon^4\left(n_{34}\theta_{yg}\theta_z\dot\theta_{xg} + n_{35}\theta_{xg}\theta_z\dot\theta_{yg} + n_{36}\theta_{xg}\theta_{yg}\dot\theta_z\right),\end{cases} \tag{3.3}$$

ここに含まれる係数 u_{01}-u_{16}, m_{01}-m_{21}, n_{11}-n_{36} は，次のように表される:

$$u_{01} = \frac{m_1}{2}gr_{g0},\quad u_{02} = m_1 g\left(\frac{(a_1-c_1)^2c_1}{2a_1r_{g0}} + \frac{r_{g0}}{2}\right),\quad u_{03} = \frac{m_1a_1c_1g}{2r_{g0}},\quad u_{04} = \frac{m_1gc_1(a_1-c_1)}{r_{g0}} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases}u_{11} = -\dfrac{m_1}{24}gr_{g0},\quad u_{12} = m_1g\left(\dfrac{(a_1-c_1)^2c_1}{4a_1r_{g0}} - \dfrac{r_{g0}}{4}\right),\\ u_{13} = \dfrac{m_1g(a_1-c_1)^2}{24a_1^3r_{g0}^3}\left(-(a_1-c_1)^3(a_1^2-6a_1c_1-3c_1^2) + (2a_1^3-7a_1^2c_1+6a_1c_1^2+3c_1^3)L_1^2 - a_1^3L_1^4\right)\\ u_{14} = m_1g\dfrac{a_1c_1}{4r_{g0}},\quad u_{15} = m_1c_1g\dfrac{(a_1-c_1)^2(4a_1^2-3a_1c_1+c_1^2) - (2a_1-c_1)^2L_1^2}{4a_1r_{g0}^3},\\ u_{16} = m_1a_1c_1g\dfrac{(a_1^2+a_1c_1+c_1^2-L_1^2)}{24r_{g0}^3}\end{cases} \tag{3.5}$$

$$\left\{m_{01} = \frac{m_1}{2}r_{g0}^2,\quad m_{02} = \left(\frac{c_1^2}{2a_1^2} - \frac{c_1}{a_1} + \frac{1}{2}\right)J_y + \frac{m_1}{2}r_{g0}^2,\quad m_{03} = \frac{J_y}{2},\quad m_{04} = m_{05} = \frac{(a_1-c_1)J_y}{a_1}\right. \tag{3.6}$$

$$\begin{cases}m_{11} = -\dfrac{m_1\left(a_1^2c_1 + c_1^3 + a_1\left(-2c_1^2 + r_{g0}^2\right)\right)}{2a_1},\quad m_{12} = \dfrac{1}{2}(J_y - a_1c_1m_1),\quad m_{13} = \dfrac{(a_1-c_1)^2J_y}{a_1^2},\\ m_{14} = \dfrac{(a_1-c_1)^2J_y}{2a_1^2},\quad m_{16} = -\dfrac{(a_1J_y - c_1J_y + a_1^2c_1m_1)}{2a_1},\\ m_{15} = \dfrac{m_1}{2a_1^4r_{g0}^2}(a_1-c_1)^2c_1\left(a_1^4c_1 + a_1^2c_1^3 + (a_1+c_1)J_yr_{g0}^2/m_1 - a_1^3\left(2c_1^2 + r_{g0}^2\right)\right),\quad m_{17} = J_y,\\ m_{18} = \dfrac{(a_1-c_1)\left((a_1-c_1)a_1c_1^2m_1 - J_yr_{g0}^2\right)}{a_1r_{g0}^2},\quad m_{19} = \dfrac{J_y}{2},\quad m_{20} = \dfrac{a_1^2c_1^2m_1}{2r_{g0}^2},\quad m_{21} = -\dfrac{(a_1-c_1)^2J_y}{2a_1^2}\end{cases} \tag{3.7}$$

$$\left\{n_{11} = m_1r_{g0},\quad n_{12} = m_1\left(-\frac{3a_1c_1}{2r_{g0}} + \frac{3c_1^2}{r_{g0}} - \frac{3c_1^3}{2a_1r_{g0}} - \frac{r_{g0}}{2}\right),\quad n_{13} = -m_1\frac{a_1c_1}{2r_{g0}},\quad n_{14} = -m_1\frac{a_1c_1}{r_{g0}}\right. \tag{3.8}$$

$$\begin{cases}n_{21} = m_1r_{g0},\quad n_{22} = -\dfrac{m_1}{2}r_{g0},\quad n_{23} = m_1\left(-\dfrac{a_1c_1}{2r_{g0}} + \dfrac{c_1^2}{r_{g0}} - \dfrac{c_1^3}{2a_1r_{g0}} - \dfrac{r_{g0}}{2}\right),\quad n_{24} = -m_1\dfrac{a_1c_1}{2r_{g0}},\\ n_{25} = m_1\left(-\dfrac{a_1c_1}{r_{g0}} + \dfrac{2c_1^2}{r_{g0}} - \dfrac{c_1^3}{a_1r_{g0}} - r_{g0}\right),\quad n_{26} = -m_1\dfrac{a_1c_1}{r_{g0}}\end{cases} \tag{3.9}$$

$$\left\{n_{31} = -m_1r_{g0},\quad n_{32} = m_1\frac{(a_1-c_1)^3 - a_1L_1^2}{a_1r_{g0}},\quad n_{33} = -m_1\frac{a_1c_1}{r_{g0}},\quad n_{34} = n_{35} = n_{36} = m_1\frac{c_1^2 - a_1c_1}{r_{g0}}\right. \tag{3.10}$$

(3.1)-(3.10) 式により，Lagrange 関数 (2.13) 式は，次のように書き換えられる:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{22} &= K_2 - U_2 + (V_{11}\dot{x}_0 + V_{12}\dot{y}_0 + V_{13}\dot{z}_0) + \frac{m_1}{2}\epsilon^2\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2\right) + m_1 g\left(r_{g0} + \epsilon z_0\right) \\
&= m_1 g\left(r_{g0} + \epsilon z_0\right) + \epsilon^2\Big(m_{01}\dot{\theta}_{xg}^2 + m_{02}\dot{\theta}_{yg}^2 + m_{03}\dot{\theta}_z^2 - u_{01}\theta_{xg}^2 - u_{02}\theta_{yg}^2 - u_{03}\theta_z^2 + n_{11}\dot{x}_0\dot{\theta}_{yg} + n_{21}\dot{y}_0\dot{\theta}_{xg} \\
&+ \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2\right)\Big) + \epsilon^3\Big(m_{04}\theta_z\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_{yg} + m_{05}\theta_{xg}\dot{\theta}_{yg}\dot{\theta}_z - u_{04}\theta_{xg}\theta_{yg}\theta_z + \dot{z}_0\left(n_{31}\theta_{xg}\dot{\theta}_{xg} + n_{32}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg} + n_{33}\theta_z\dot{\theta}_z\right)\Big) \\
&+ \epsilon^4\Big(m_{11}\theta_{yg}^2\dot{\theta}_{xg}^2 + m_{12}\theta_z^2\dot{\theta}_{xg}^2 + m_{13}\theta_{xg}\theta_{yg}\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_{yg} + m_{14}\theta_{xg}^2\dot{\theta}_{yg}^2 + m_{15}\theta_{yg}^2\dot{\theta}_{yg}^2 + m_{16}\theta_z^2\dot{\theta}_{yg}^2 + m_{17}\theta_{xg}\theta_z\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_z \\
&+ m_{18}\theta_{yg}\theta_z\dot{\theta}_{yg}\dot{\theta}_z + m_{19}\theta_{xg}^2\dot{\theta}_z^2 + m_{20}\theta_z^2\dot{\theta}_z^2 + m_{21}\theta_{yg}^2\dot{\theta}_z^2 - u_{11}\theta_{xg}^4 - u_{12}\theta_{xg}^2\theta_{yg}^2 - u_{13}\theta_{yg}^4 - u_{14}\theta_{xg}^2\theta_z^2 - u_{15}\theta_{yg}^2\theta_z^2 - u_{16}\theta_z^4 \\
&+ \dot{x}_0\left(n_{12}\theta_{yg}^2\dot{\theta}_{yg} + n_{13}\theta_z^2\dot{\theta}_{yg} + n_{14}\theta_{yg}\theta_z\dot{\theta}_z\right) + \dot{y}_0\left(n_{22}\theta_{xg}^2\dot{\theta}_{xg} + n_{23}\theta_{yg}^2\dot{\theta}_{xg} + n_{24}\theta_z^2\dot{\theta}_{xg} + n_{25}\theta_{xg}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg} + n_{26}\theta_{xg}\theta_z\dot{\theta}_z\right) \\
&+ \dot{z}_0\left(n_{34}\theta_{yg}\theta_z\dot{\theta}_{xg} + n_{35}\theta_{xg}\theta_z\dot{\theta}_{yg} + n_{36}\theta_{xg}\theta_{yg}\dot{\theta}_z\right)\Big)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Lagrange 関数 (3.11) により，3 つの mode の非線形連成振動系の運動方程式が導かれる．

■θ_{yg} に対する運動方程式

$$
\begin{aligned}
&2m_{02}\ddot{\theta}_{yg} + 2u_{02}\theta_{yg} + n_{11}\ddot{x}_0 + \epsilon\left(m_{04}\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_z + m_{04}\theta_z\ddot{\theta}_{xg} + m_{05}\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_z + m_{05}\theta_{xg}\ddot{\theta}_z + u_{04}\theta_{xg}\theta_z + n_{32}\theta_{yg}\ddot{z}_0\right) \\
&+ \epsilon^2\Big(-2m_{11}\theta_{yg}\dot{\theta}_{xg}^2 + m_{13}\theta_{yg}\dot{\theta}_{xg}^2 + m_{13}\theta_{xg}\theta_{yg}\ddot{\theta}_{xg} + 2m_{14}\theta_{xg}^2\ddot{\theta}_{yg} + 4m_{14}\theta_{xg}\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_{yg} + 2m_{15}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg}^2 \\
&+ 2m_{15}\theta_{yg}^2\ddot{\theta}_{yg} + 2m_{16}\theta_z^2\ddot{\theta}_{yg} + m_{18}\theta_{yg}\theta_z\ddot{\theta}_z + 4m_{16}\theta_z\dot{\theta}_{yg}\dot{\theta}_z + \left(m_{18} - 2m_{21}\right)\theta_{yg}\dot{\theta}_z^2 + 2u_{12}\theta_{xg}^2\theta_{yg} + 4u_{13}\theta_{yg}^3 + 2u_{15}\theta_{yg}\theta_z^2 \\
&- \dot{x}_0\left(2n_{12}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg} + n_{14}\theta_z\dot{\theta}_z\right) + \left(n_{12}\theta_{yg}^2 + n_{13}\theta_z^2\right)\ddot{x}_0 + \dot{x}_0\left(2n_{12}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg} + 2n_{13}\theta_z\dot{\theta}_z\right) + n_{25}\theta_{yg}\dot{y}_0\dot{\theta}_{xg} + n_{25}\theta_{xg}\dot{y}_0\dot{\theta}_{yg} \\
&- \dot{y}_0\left(2n_{23}\theta_{yg}\dot{\theta}_{xg} + n_{25}\theta_{xg}\dot{\theta}_{yg}\right) + n_{35}\dot{z}_0\left(\theta_{xg}\dot{\theta}_z + \theta_z\dot{\theta}_{xg}\right) - \dot{z}_0\left(n_{34}\theta_z\dot{\theta}_{xg} + n_{36}\theta_{xg}\dot{\theta}_z\right) + n_{25}\theta_{xg}\theta_{yg}\ddot{y}_0 + n_{35}\theta_{xg}\theta_z\ddot{z}_0\Big) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

■θ_{xg} に対する運動方程式

$$
\begin{aligned}
&2m_{01}\ddot{\theta}_{xg} + 2u_{01}\theta_{xg} + n_{21}\ddot{y}_0 + \epsilon\left(m_{04}\dot{\theta}_{yg}\dot{\theta}_z + m_{04}\theta_z\ddot{\theta}_{yg} - m_{05}\dot{\theta}_{yg}\dot{\theta}_z + u_{04}\theta_{yg}\theta_z + n_{31}\theta_{xg}\ddot{z}_0\right) \\
&+ \epsilon^2\Big(4m_{11}\theta_{yg}\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_{yg} + 4m_{12}\theta_z\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_z + m_{13}\theta_{xg}\dot{\theta}_{yg}^2 - 2m_{14}\theta_{xg}\dot{\theta}_{yg}^2 + m_{17}\theta_{xg}\dot{\theta}_z^2 - 2m_{19}\theta_{xg}\dot{\theta}_z^2 \\
&+ 4u_{11}\theta_{xg}^3 + 2u_{12}\theta_{xg}\theta_{yg}^2 + 2u_{14}\theta_{xg}\theta_z^2 + n_{34}\theta_z\dot{z}_0\dot{\theta}_{yg} + n_{34}\theta_{yg}\dot{z}_0\dot{\theta}_z + \dot{y}_0\left(2n_{22}\theta_{xg}\dot{\theta}_{xg} + 2n_{23}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg} + 2n_{24}\theta_z\dot{\theta}_z\right) \\
&- \dot{y}_0\left(2n_{22}\theta_{xg}\dot{\theta}_{xg} + n_{25}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg} + n_{26}\theta_z\dot{\theta}_z\right) + \left(n_{22}\theta_{xg}^2 + n_{23}\theta_{yg}^2 + n_{24}\theta_z^2\right)\ddot{y}_0 + n_{34}\theta_{yg}\theta_z\ddot{z}_0 \\
&+ 2m_{11}\theta_{yg}^2\ddot{\theta}_{xg} + 2m_{12}\theta_z^2\ddot{\theta}_{xg} + m_{13}\theta_{xg}\theta_{yg}\ddot{\theta}_{yg} + m_{17}\theta_{xg}\theta_z\ddot{\theta}_z - \dot{z}_0\left(n_{35}\theta_z\dot{\theta}_{yg} + n_{36}\theta_{yg}\dot{\theta}_z\right)\Big) = 0
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

■θ_z に対する運動方程式

$$
\begin{aligned}
&2m_{03}\ddot{\theta}_z + 2u_{03}\theta_z + \epsilon\left(-m_{04}\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_{yg} + m_{05}\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_{yg} + m_{05}\theta_{xg}\ddot{\theta}_{yg} + u_{04}\theta_{xg}\theta_{yg} + n_{33}\theta_z\ddot{z}_0\right) \\
&+ \epsilon^2\Big(-2m_{12}\theta_z\dot{\theta}_{xg}^2 - 2m_{16}\theta_z\dot{\theta}_{yg}^2 + m_{17}\theta_z\dot{\theta}_{xg}^2 + m_{17}\theta_{xg}\theta_z\ddot{\theta}_{xg} + m_{18}\theta_z\dot{\theta}_{yg}^2 + m_{18}\theta_{yg}\theta_z\ddot{\theta}_{yg} + 2m_{19}\theta_{xg}^2\ddot{\theta}_z + 4m_{19}\theta_{xg}\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_z \\
&+ 2m_{20}\theta_z\dot{\theta}_z^2 + 2m_{20}\theta_z^2\ddot{\theta}_z + 4m_{21}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg}\dot{\theta}_z + 2m_{21}\theta_{yg}^2\ddot{\theta}_z + 2u_{14}\theta_{xg}^2\theta_z + 2u_{15}\theta_{yg}^2\theta_z + 4u_{16}\theta_z^3 + n_{14}\theta_z\dot{x}_0\dot{\theta}_{yg} \\
&+ n_{36}\theta_{xg}\dot{z}_0\dot{\theta}_{yg} + n_{26}\theta_z\dot{y}_0\dot{\theta}_{xg} + n_{36}\theta_{yg}\dot{z}_0\dot{\theta}_{xg} - \dot{x}_0\left(2n_{13}\theta_z\dot{\theta}_{yg} + n_{14}\theta_{yg}\dot{\theta}_z\right) + n_{14}\theta_{yg}\theta_z\ddot{x}_0 + n_{26}\theta_{xg}\theta_z\ddot{y}_0 + n_{36}\theta_{xg}\theta_{yg}\ddot{z}_0 \\
&- \dot{y}_0\left(2n_{24}\theta_z\dot{\theta}_{xg} + n_{26}\theta_{xg}\dot{\theta}_z\right) - \dot{z}_0\left(n_{34}\theta_{yg}\dot{\theta}_{xg} + n_{35}\theta_{xg}\dot{\theta}_{yg}\right) + n_{14}\theta_{yg}\dot{x}_0\dot{\theta}_z + n_{26}\theta_{xg}\dot{y}_0\dot{\theta}_z\Big) = 0
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

方程式系 (3.12), (3.13), (3.14) が 2 点吊り振子の非線形連成振動を記述する．

4　3 つの mode の非線形連成振動の自立系の運動方程式

方程式系 (3.12), (3.13), (3.14) で $x_0 = y_0 = z_0$ とおき，自律系の運動方程式が導かれる:

■θ_{yg}, θ_{xg}, θ_z に対する自立系の運動方程式

$$
\begin{aligned}
&2m_{02}\ddot{\theta}_{yg} + 2u_{02}\theta_{yg} + \epsilon\left(u_{04}\theta_{xg}\theta_z + (m_{04} + m_{05})\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_z + m_{04}\theta_z\ddot{\theta}_{xg} + m_{05}\theta_{xg}\ddot{\theta}_z\right) \\
&+ \epsilon^2\Big((-2m_{11} + m_{13})\theta_{yg}\dot{\theta}_{xg}^2 + 2m_{15}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg}^2 + \left(m_{18} - 2m_{21}\right)\theta_{yg}\dot{\theta}_z^2 + \dot{\theta}_{yg}\left(4m_{14}\theta_{xg}\dot{\theta}_{xg} + 4m_{16}\theta_z\dot{\theta}_z\right) + m_{13}\theta_{xg}\theta_{yg}\ddot{\theta}_{xg} \\
&+ \left(2m_{14}\theta_{xg}^2 + 2m_{15}\theta_{yg}^2 + 2m_{16}\theta_z^2\right)\ddot{\theta}_{yg} + m_{18}\theta_{yg}\theta_z\ddot{\theta}_z + 4u_{13}\theta_{yg}^3 + \theta_{yg}\left(2u_{12}\theta_{xg}^2 + 2u_{15}\theta_z^2\right)\Big) = 0,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&2m_{01}\ddot{\theta}_{xg} + 2u_{01}\theta_{xg} + \epsilon\left((m_{04}-m_{05})\dot{\theta}_{yg}\dot{\theta}_z + m_{04}\theta_z\ddot{\theta}_{yg} + u_{04}\theta_{yg}\theta_z\right)\\
&+\epsilon^2\left(4m_{11}\theta_{yg}\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_{yg} + \left(2m_{11}\theta_{yg}^2 + 2m_{12}\theta_z^2\right)\ddot{\theta}_{xg} + 4m_{12}\theta_z\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_z + m_{13}\theta_{xg}\theta_{yg}\ddot{\theta}_{yg} + (m_{13}-2m_{14})\theta_{xg}\dot{\theta}_{yg}^2\right.\\
&\left.+m_{17}\theta_{xg}\theta_z\ddot{\theta}_z + (m_{17}-2m_{19})\theta_{xg}\dot{\theta}_z^2 + 4u_{11}\theta_{xg}^3 + 2u_{12}\theta_{xg}\theta_{yg}^2 + 2u_{14}\theta_{xg}\theta_z^2\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&2m_{03}\ddot{\theta}_z + 2u_{03}\theta_z + \epsilon\left((-m_{04}+m_{05})\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_{yg} + m_{05}\theta_{xg}\ddot{\theta}_{yg} + u_{04}\theta_{xg}\theta_{yg}\right)\\
&+\epsilon^2\left(+(-2m_{12}+m_{17})\theta_z\dot{\theta}_{xg}^2 + (-2m_{16}+m_{18})\theta_z\dot{\theta}_{yg}^2 + 4m_{19}\theta_{xg}\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_z + 2m_{20}\theta_z\dot{\theta}_z^2 + m_{17}\theta_{xg}\theta_z\ddot{\theta}_{xg} + m_{18}\theta_{yg}\theta_z\ddot{\theta}_{yg}\right.\\
&\left.+\left(2m_{19}\theta_{xg}^2 + 2m_{20}\theta_z^2\right)\ddot{\theta}_z + 4m_{21}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg}\dot{\theta}_z + 2m_{21}\theta_{yg}^2\ddot{\theta}_z + 2u_{14}\theta_{xg}^2\theta_z + 2u_{15}\theta_{yg}^2\theta_z + 4u_{16}\theta_z^3\right) = 0
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

方程式系 (4.1), (4.2), (4.3) が 2 点吊り振子の非線形連成自由振動を記述する．

5　2 つの mode の非線形連成振動系

Lagrange 関数 (3.11) により，2 つずつの mode の非線形連成振動系の運動方程式が導かれる．

■mode 1, 2: θ_{yg}, θ_{xg} に対する運動方程式

$$
\begin{aligned}
&2m_{02}\ddot{\theta}_{yg} + 2u_{02}\theta_{yg} + n_{11}\ddot{x}_0 + n_{32}\epsilon\theta_{yg}\ddot{z}_0 + \epsilon^2\left((-2m_{11}+m_{13})\theta_{yg}\dot{\theta}_{xg}^2 + m_{13}\theta_{xg}\theta_{yg}\ddot{\theta}_{xg} + 4m_{14}\theta_{xg}\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_{yg}\right.\\
&\left.+2m_{15}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg}^2 + \left(2m_{14}\theta_{xg}^2 + 2m_{15}\theta_{yg}^2\right)\ddot{\theta}_{yg} + n_{12}\theta_{yg}^2\ddot{x}_0 + n_{25}\theta_{xg}\theta_{yg}\ddot{y}_0 + (-2n_{23}+n_{25})\theta_{yg}\dot{y}_0\dot{\theta}_{xg}\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&2m_{01}\ddot{\theta}_{xg} + 2u_{01}\theta_{xg} + n_{21}\ddot{y}_0 + n_{31}\epsilon\theta_{xg}\ddot{z}_0 + \epsilon^2\left(4m_{11}\theta_{yg}\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_{yg} + 2m_{11}\theta_{yg}^2\ddot{\theta}_{xg} + m_{13}\theta_{xg}\theta_{yg}\ddot{\theta}_{yg} + (m_{13}-2m_{14})\theta_{xg}\dot{\theta}_{yg}^2\right.\\
&\left.+4u_{11}\theta_{xg}^3 + 2u_{12}\theta_{xg}\theta_{yg}^2 + \left(n_{22}\theta_{xg}^2 + n_{23}\theta_{yg}^2\right)\ddot{y}_0 + (2n_{23}-n_{25})\,\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg}\dot{y}_0\right) = 0
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

方程式系 (5.1), (5.2) が 2 点吊り振子の mode 1, 2 の非線形連成振動を記述する．

■mode 2, 3: θ_{xg}, θ_z に対する運動方程式

$$
\begin{aligned}
&2m_{01}\ddot{\theta}_{xg} + 2u_{01}\theta_{xg} + n_{21}\ddot{y}_0 + n_{31}\epsilon\theta_{xg}\ddot{z}_0 + \epsilon^2\left(4m_{12}\theta_z\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_z + 2m_{12}\theta_z^2\ddot{\theta}_{xg} + m_{17}\theta_{xg}\theta_z\ddot{\theta}_z + (m_{17}-2m_{19})\theta_{xg}\dot{\theta}_z^2\right.\\
&\left.+4u_{11}\theta_{xg}^3 + 2u_{14}\theta_{xg}\theta_z^2 + (2n_{24}-n_{26})\theta_z\dot{y}_0\dot{\theta}_z + \left(n_{22}\theta_{xg}^2 + n_{24}\theta_z^2\right)\ddot{y}_0\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&2m_{03}\ddot{\theta}_z + 2u_{03}\theta_z + n_{33}\epsilon\theta_z\ddot{z}_0 + \epsilon^2\left((-2m_{12}+m_{17})\theta_z\dot{\theta}_{xg}^2 + m_{17}\theta_{xg}\theta_z\ddot{\theta}_{xg} + 4m_{19}\theta_{xg}\dot{\theta}_{xg}\dot{\theta}_z + \left(2m_{19}\theta_{xg}^2 + 2m_{20}\theta_z^2\right)\ddot{\theta}_z\right.\\
&\left.+2m_{20}\theta_z\dot{\theta}_z^2 + 2u_{14}\theta_{xg}^2\theta_z + 4u_{16}\theta_z^3 + (-2n_{24}+n_{26})\dot{\theta}_{xg}\theta_z\dot{y}_0 + n_{26}\theta_{xg}\theta_z\ddot{y}_0\right) = 0
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

方程式系 (5.3), (5.4) が 2 点吊り振子の mode 2, 3 の非線形連成振動を記述する．

■mode 3, 1: θ_{yg}, θ_z に対する運動方程式

$$
\begin{aligned}
&2m_{02}\ddot{\theta}_{yg} + 2u_{02}\theta_{yg} + n_{11}\ddot{x}_0 + n_{32}\epsilon\theta_{yg}\ddot{z}_0 + \epsilon^2\left(2m_{15}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg}^2 + \left(2m_{15}\theta_{yg}^2 + 2m_{16}\theta_z^2\right)\ddot{\theta}_{yg} + 4m_{16}\theta_z\dot{\theta}_{yg}\dot{\theta}_z + m_{18}\theta_{yg}\theta_z\ddot{\theta}_z\right.\\
&\left.+(m_{18}-2m_{21})\,\theta_{yg}\dot{\theta}_z^2 + 4u_{13}\theta_{yg}^3 + 2u_{15}\theta_{yg}\theta_z^2 + (2n_{13}-n_{14})\theta_z\dot{x}_0\dot{\theta}_z + \left(n_{12}\theta_{yg}^2 + n_{13}\theta_z^2\right)\ddot{x}_0\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&2m_{03}\ddot{\theta}_z + 2u_{03}\theta_z + n_{33}\epsilon\theta_z\ddot{z}_0 + \epsilon^2\left((-2m_{16}+m_{18})\theta_z\dot{\theta}_{yg}^2 + m_{18}\theta_{yg}\theta_z\ddot{\theta}_{yg} + 2m_{20}\theta_z\dot{\theta}_z^2 + 2m_{20}\theta_z^2\ddot{\theta}_z\right.\\
&\left.+4m_{21}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg}\dot{\theta}_z + 2m_{21}\theta_{yg}^2\ddot{\theta}_z + 2u_{15}\theta_{yg}^2\theta_z + 4u_{16}\theta_z^3 + (-2n_{13}+n_{14})\theta_z\dot{x}_0\dot{\theta}_{yg} + n_{14}\theta_{yg}\theta_z\ddot{x}_0\right) = 0
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

方程式系 (5.5), (5.6) が 2 点吊り振子の mode 3, 1 の非線形連成振動を記述する．

6　個別振動 mode θ_{yg}, θ_{xg}, θ_z の運動方程式

Lagrange 関数 (3.11) により，個々の mode の非線形連成振動系の運動方程式が導かれる．

■mode 1: θ_{yg} に対する運動方程式

$$
\begin{aligned}
&2m_{02}\ddot{\theta}_{yg} + 2u_{02}\theta_{yg} + n_{11}\ddot{x}_0 + n_{32}\epsilon\theta_{yg}\ddot{z}_0\\
&+\epsilon^2\left(4u_{13}\theta_{yg}^3 + 2m_{15}\theta_{yg}\dot{\theta}_{yg}^2 + 2m_{15}\theta_{yg}^2\ddot{\theta}_{yg} + n_{12}\theta_{yg}^2\ddot{x}_0\right)\\
&= 0,
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

$x_0(t)$, $z_0(t)$ が parameter 励振の項である．

■mode 2: θ_{xg} に対する運動方程式

$$
\begin{aligned}
&2m_{01}\ddot{\theta}_{xg} + 2u_{01}\theta_{xg} + n_{21}\ddot{y}_0 + n_{31}\epsilon\theta_{xg}\ddot{z}_0\\
&+\epsilon^2\left(4u_{11}\theta_{xg}^3 + n_{22}\theta_{xg}^2\ddot{y}_0\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

■mode 3: θ_z に対する運動方程式

$$
\begin{aligned}
&2m_{03}\ddot{\theta}_z + 2u_{03}\theta_z + n_{33}\epsilon\theta_z\ddot{z}_0\\
&+\epsilon^2\left(4u_{16}\theta_z^3 + 2m_{20}\theta_z\dot{\theta}_z^2 + 2m_{20}\theta_z^2\ddot{\theta}_z\right) = 0
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

各方程式 (6.1), (6.2), (6.3) において，$x_0 = y_0 = z_0 = 0$ とおけば，自立系の運動方程式が導かれる．また，それぞれに，攪乱について線形化することができる．棒の全長 $2b_1$ を用いて慣性 moment は $m_1 b_1^2/3$ であり，$r_{g0} = \sqrt{L_1^2 + (a_1 - c_1)^2}$ と取る．線形化方程式から，固有角振動数 $\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$ は，次式となる:

$$
\omega_{01}^2 = \frac{12a_1 g\left((a_1-c_1)^3 - a_1 L_1^2\right)}{r_{g0}\left((12a_1^2 - b_1^2)(a_1-c_1)^2 - 12a_1^2 L_1^2\right)}
\tag{6.4}
$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{g}{\sqrt{-a_1^2 + 2a_1c_1 - c_1^2 + L_1^2}} = \frac{g}{r_{g0}} \tag{6.5}$$

$$\omega_{03}^2 = \frac{12a_1c_1g}{b_1^2\sqrt{-a_1^2 + 2a_1c_1 - c_1^2 + L_1^2}} = \frac{12a_1c_1g}{b_1^2 r_{g0}} \tag{6.6}$$

これらを用いて，共振発生条件の評価を行う．

7 おわりに

本報告は，三部の内の第二報告であり，球座標系の表現から得られる非線形連成振動に対する方程式系を導いた．幾つかの運動動方程式の数値解は続報[10] に示し，一連の報告をまとめる．直方体による 2 点吊り物理振子については，本研究の関連報告[11]–[15] も参照されたい．

参考文献

[1] 川口 衛, 立道 郁生: “21318 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 1 原理と免震床の実大実験” 学術講演梗概集. B-2, 構造 II, 振動, 原子力プラント 2000 (2000), pp.635-636(社団法人日本建築学会).

[2] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，川船 雄一郎，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), pp.55-60.

[3] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，中道 義之:“2 点吊り振子の捩り振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), pp.83-88.

[4] 望月 孔二，鈴木 秀，舟田 敏雄，岩本 大，宮内 太積，大庭 勝久，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の 3 つの線形振動 mode の実験と解析” 沼津高専研究報告 第 45 号 (2011), pp.163-168.

[5] 鈴木 秀, 舟田 敏雄, 金子 裕哉, 宮内 太積, 福田 克也: “2 点吊り振子と剛体振子の振動実験と解析” 日本機械学会東海支部 東海学生会　第 42 回学生員卒業研究発表講演会，2011 年 3 月 13 日 (日) 豊橋技術科学大学，第 9 室 10:50 〜 12:14 機械力学・計測・制御　講演番号 909，講演前刷集 (日本機械学会東海学生会 平成 23 年 3 月 1 日発行) CD/ROM，pp.268-269.

[6] 宮内 太積，福田 克也，鈴木 秀，金子 裕哉，舟田 敏雄: “ 2 点吊り振子の非線形内部共振の解析 ” 日本機械学会東海支部東海支部第 60 期総会・講演会 (支部 60 周年記念行事) 豊橋技術科学大学，第 8 室 (A207 教室) 3 月 14 日 (月) OS5 振動解析と制振 OS5-2 非線形振動 10:45〜12:00 講演番号 811 東海支部第 60 期総会講演会講演論文集 No. 113-1 (日本機械学会東海支部 2011 年 3 月 1 日発行), pp.403-404.

[7] 舟田 敏雄，鈴木 秀，金子 裕哉，ビン モハマド イドロス ムハマド イッザト，大庭 勝久，中道 義之，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二，川上 誠: “ 2 点吊り振子の mode 間相互作用と内部共振の数値解析 ” 第 60 回理論応用力学講演会 3 月 9 日 (水) 第 4 室 9:30-9:45 OS12-4 機械系及び構造物系の振動制御 講演番号 OS12-10，講演論文集 OS12-10.pdf

[8] 舟田 敏雄，宮内 太積，大庭 勝久，中道 義之，青木 悠祐，出川 智啓，望月 孔二: “2 点吊り振子の連成振動と内部共振の数値解析” 日本機械学会 2011 年度年次大会 『機械工学が牽引するイノベーション』，2011 年 9 月 11 日 (日)〜15 日 (木)，東京工業大学 大岡山キャンパス，[OS] G100 機械力学・計測制御部門 一般セッションセッション, 9 月 13 日 (火) 9:00-10:00 会場：W242，講演番号 G100033. 日本機械学会 2011 年度年次大会 講演論文集 DVDROM G100033.pdf.

[9] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の 3 つの mode 間相互作用の解析 (1)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[10] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の 3 つの mode 間相互作用の解析 (3)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[11] 舟田 敏雄，鈴木 秀，金子 裕哉，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二，川上 誠; “2 点吊り振子の mode 間相互作用と外力と外部励振による内部共振の数値解析” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[12] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の mode 間相互作用と外力と外部励振による内部共振の数値解析 (2)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[13] 舟田 敏雄，木ノ内 智貴，桜井 賢人，大庭 勝久，青木 悠祐，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の mode 間相互作用と外力と外部励振による内部共振の数値解析 (3)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[14] 桜井 賢人，舟田 敏雄，木ノ内 智貴，大庭 勝久，鈴木 智大，望月 孔二，土屋 吉紀，青木 悠祐，宮内 太積，遠藤 誉人: “2 点吊り物理振子の振動解析と実験 (1)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.

[15] 桜井 賢人，舟田 敏雄，木ノ内 智貴，大庭 勝久，鈴木 智大，望月 孔二，土屋 吉紀，青木 悠祐，宮内 太積，遠藤 誉人: “2 点吊り物理振子の振動解析と実験 (2)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.