非対称 2 点吊り振子と小振子の連成運動の基礎解析

宮内 太積[*1*2] 舟田 敏雄[*2*3] 岩本 大[*3] 中道 義之[*2*4] 望月 孔二[*2*5] 川上 誠[*2*3]

Fundamental Dynamic Analysis of Coupling Motion of Asymmetric Bifilar Suspension Pendulum with Small Pendulums

Tatsumi MIYAUCHI[*1*2] Toshio FUNADA[*2*3] Dai IWAMOTO[*3] Yoshiyuki NAKAMICHI[*2*4] Kouji MOCHIZUKI[*2*5] and Makoto KAWAKAMI[*2*3]

Abstract: A uniform density bar is suspended at its two ends by two strings whose two end points are attached to an upper static wall. The bar may swing or make torsional oscillation in a vertical plane from its equilibrium rest state, which is called bifilar suspension pendulum. When the distance of two points may be longer or shorter than the bar length, the bar attitude may change during swinging of the bar. When it is just the same, the bar swings with keeping the attitude horizontal. Taking into account this particular property of the pendulum, some device for seismic mitigation has been proposed. In this connection, we make analysis from linear to nonlinear stage of various modes of oscillations, and some exact mechanical equations are derived for free swinging mode. Fundamental results are discussed here and some of them will be solved in the following papers. The results obtained are expected to provide new education materials and to apply in Earthquake Engineering and Seismic Design.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Multi-Suspended Pendulums

1 はじめに

本報告では，2 点吊り振子の一様な円木に小振子を取り付け、その静止平衡状態周りの連成自由振動の mode 解析を行い，固有角振動数を求め，振動特性を論ずる．また，線形化運動方程式の初期値問題を数値解析する．線形問題では解は解析的にも求められるが，本報告に引き続いて非線形振動問題を数値解析するので，数値計算アルゴリズムの検討も兼ねる．

先ず 2 節では，前報[6] の円木と物体の線形振動の解析に続き，非対称 2 点吊り振子の円木の運動を解析し、次いで 3 節では円木の下側に小振子を取り付けた場合の線形連成振動を解析する．4 節では，小振子が 2 つあるいは 3 つの場合の力学問題を定式化し，線形化運動方程式の mode 解析を行う．これらの系の強制振動系への拡張並びに制振問題の定点理論による解析は続報で検討される．

2 円木と 1 つの小振子の連成運動

Fig.1(a), **(b)** の 2 点吊り振子の円木と小振子の静止平衡状態周りの運動を解析する．左右対称な配置 (**Fig.1(a)**) の場合の円木の運動は前報で解析され、先の結果を考慮して、小振子との連成振動を解析する。非対称な配置 (**Fig.1(b)**) の場合の円木の運動は前報では図式解の一部を示したに留まっていたので、改めて、本報告で解析する。次いで、円木と小振子との連成振動を解析する。

[*1] 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.

[*2] 専攻科: Advanced Engineering Course.

[*3] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.

[*4] 総合情報センター: Information Technology Center.

[*5] 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.

壁面に沿って水平方向に x 軸，鉛直下方を z 軸とするデカルト座標系 (x, y, z) を取り，2 点吊り振子の支持点 C_1 の位置を (x_0, z_0) と表す．C_2 の位置は $(x_0 + 2c, z_0)$ である．各支持点から長さ L_1, L_2 の糸を円木の端点 A, B に結びつけ，長さ $2a$ の円木を吊り下げる．円木の重心位置 (x_G, z_G) から左に水平距離 a_{p1} の位置に長さ L_{p1} の糸を取り付け，糸の他端に質量 m_{p1} の質点を結びつける．$a_{p1} = 0$ の場合 (**Fig.1(a)**) に対し，$a_{p1} \neq 0$ の場合には静止平衡状態は非対称な配置 (**Fig.1(b)**) となる．$y = 0$ の鉛直面内で，円木と小振子は静止平衡状態にあり，その周りで振子運動する．

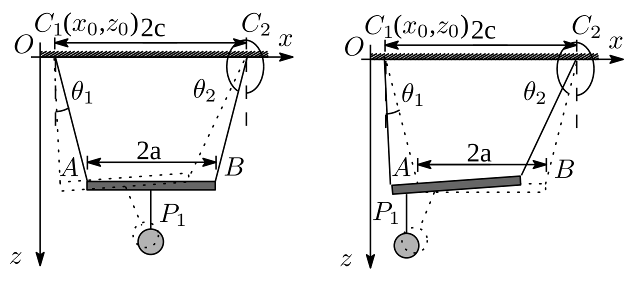


Fig.1 Bifilar suspension pendulum of $c > a$ with a small pendulum. (a) Symmetric configuration and (b) Asymmetric configuration.

Fig.1 の円木の端点 A, B，重心 (x_G, z_G)，円木の長さ (θ_1 と θ_2 の関係式)，重心回りの回転角 φ ($\varphi \equiv \varphi(\theta_1, \theta_2)$) は，

次のように表される:

$$\begin{cases} x_A = x_0 + L_1\sin(\theta_1),\;\; z_A = z_0 + L_1\cos(\theta_1), \\ x_B = x_0 + 2c + L_2\sin(\theta_2),\;\; z_B = z_0 + L_2\cos(\theta_2), \\ x_G = (x_A + x_B)/2,\;\; z_G = (z_A + z_B)/2, \\ 2a = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2}, \\ \tan(\varphi) = -\dfrac{z_B - z_A}{x_B - x_A} \end{cases} \tag{2.1}$$

小振子 P_1 (**Fig.1**) の錘の座標は次のように表される:

$$\begin{cases} x_{p1} = x_G - a_{p1}\cos(\varphi) + L_{p1}\sin(\theta_{p1}), \\ z_{p1} = z_G + a_{p1}\sin(\varphi) + L_{p1}\cos(\theta_{p1}) \end{cases} \tag{2.2}$$

円木の運動は 1 自由度であり，静止平衡状態の周りの運動として記述できる．線密度 ρ の一様な円木の質量は $m_1 = 2a\rho$ で重心 (x_G, z_G) は円木の中央にあり，重心回りの慣性 moment は $J = 2a^3\rho/3 = m_1a^2/3$ である． その静止平衡状態では、次式に示されるように、糸にかかる張力 S_1, S_2 と重力の釣合 (第 1, 2 式)，力の moment の釣合 (第 3, 4 式)，幾何学的関係式 (第 5, 6 式) が成り立つ:

$$\begin{cases} -S_1\sin(\theta_1) + S_2\sin(2\pi - \theta_2) = 0, \\ S_1\cos(\theta_1) + S_2\cos(2\pi - \theta_2) = (m_1 + m_{p1})g, \\ 2cS_2\cos(2\pi - \theta_2) = (L_1\sin(\theta_1) + a\cos(\varphi))\,m_1g \\ \qquad + (L_1\sin(\theta_1) + (a - a_{p1})\cos(\varphi))\,m_{p1}g, \\ 2cS_1\cos(\theta_1) = (L_2\sin(2\pi - \theta_2) + a\cos(\varphi))\,m_1g \\ \qquad + (L_2\sin(2\pi - \theta_2) + (a + a_{p1})\cos(\varphi))\,m_{p1}g, \\ L_1\sin(\theta_1) + 2a\cos(\varphi) + L_2\sin(2\pi - \theta_2) = 2c, \\ L_1\cos(\theta_1) - 2a\sin(\varphi) = L_2\cos(2\pi - \theta_2) \end{cases} \tag{2.3}$$

(2.3) の第 1, 2 式を張力 S_1, S_2 の連立非同次線形代数方程式と見做して解いて、解 S_1, S_2 は次のように表される:

$$\begin{cases} S_1 = -\dfrac{(m_1 + m_{p1})g\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)}, \\ S_2 = \dfrac{(m_1 + m_{p1})g\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} \end{cases} \tag{2.4}$$

この S_1, S_2 を (2.3) の第 3, 4 式に代入して、それらを $\cos(\varphi)$ の方程式と見做して、それぞれに解く:

$$\begin{cases} \dfrac{\cos(\varphi)}{(m_1 + m_{p1})} = \dfrac{(2c\cos(\theta_2) - L_1\sin(\theta_1 - \theta_2))\sin(\theta_1)}{[a(m_1 + m_{p1}) - a_{p1}m_{p1}]\sin(\theta_1 - \theta_2)}, \\ \dfrac{\cos(\varphi)}{(m_1 + m_{p1})} = -\dfrac{(2c\cos(\theta_1) - L_2\sin(\theta_1 - \theta_2))\sin(\theta_2)}{[a(m_1 + m_{p1}) + a_{p1}m_{p1}]\sin(\theta_1 - \theta_2)} \end{cases} \tag{2.5}$$

これらの $\cos(\varphi)$ を等値して、θ_1, θ_2 の関数 $f_1(\theta_1, \theta_2)$ を得る:

$$\begin{cases} \dfrac{f_1(\theta_1, \theta_2)}{(m_1 + m_{p1})} = \dfrac{L_2(a(m_1 + m_{p1}) - a_{p1}m_{p1})}{2\left(a^2(m_1 + m_{p1})^2 - a_{p1}^2m_{p1}^2\right)\sin(\theta_1 - \theta_2)} \\ \times(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_1 - 2\theta_2)) \\ +\dfrac{L_1(a(m_1 + m_{p1}) + a_{p1}m_{p1})(\cos(2\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_2))}{2\left(a^2(m_1 + m_{p1})^2 - a_{p1}^2m_{p1}^2\right)\sin(\theta_1 - \theta_2)} \\ +4c\dfrac{a_{p1}m_{p1}\sin(\theta_1 - \theta_2) + a(m_1 + m_{p1})\sin(\theta_1 + \theta_2)}{2\left(a^2(m_1 + m_{p1})^2 - a_{p1}^2m_{p1}^2\right)\sin(\theta_1 - \theta_2)} \end{cases} \tag{2.6}$$

ここで、$m_{p1} = 0$, $L_2 = L_1$ のときには、$\theta_2 = 2\pi - \theta_1$ が超越方程式 $f_1(\theta_1, \theta_2) = 0$ を満たすことが示される。前報では、$\theta_2 = 2\pi - \theta_1$ の解のみを取り上げ、超越方程式 $f_1(\theta_1, \theta_2) = 0$ については深くは触れなかったことが思い起こされる。この $f_1(\theta_1, \theta_2) = 0$ は静止平衡状態においてのみ成立し、運動状態では成り立たないことに注意されたい。

一方、(2.3) の第 5 式から $\cos(\varphi)$、第 6 式から $\sin(\varphi)$ が求められる:

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{2c - L_1\sin(\theta_1) + L_2\sin(\theta_2)}{2a}, \\ \sin(\varphi) = \dfrac{L_1\cos(\theta_1) - L_2\cos(\theta_2)}{2a} \end{cases} \tag{2.7}$$

これらを三角関数の関係式 $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$ に代入して、次の θ_1, θ_2 の関数 $F(\theta_1, \theta_2)$ を得る:

$$\begin{cases} F(\theta_1, \theta_2) = 4c^2 + L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \qquad -4c\left[L_1\sin(\theta_1) - L_2\sin(\theta_2)\right] - 4a^2 \end{cases} \tag{2.8}$$

この超越方程式 $F(\theta_1, \theta_2) = 0$ は、糸と円木の幾何学的配置から導出されており、糸が弛んだり切れたりしない限り糸と円木の運動中にも成立する。

以上により、静止平衡状態は、連立の超越方程式 $f_1(\theta_1, \theta_2) = 0$, $F(\theta_1, \theta_2) = 0$ を満たす解 θ_1, θ_2 で表される。

2.1 円木の静止平衡状態の例

以下に示す図式解法による数値計算例では、$f_1(\theta_1, \theta_2) = 0$ の解曲線と $F(\theta_1, \theta_2) = 0$ の解曲線との交点が静止平衡状態を表す。一様密度の円木の場合 ($m_1 = 1$, $m_{p1} = 0$) には、対称な配置の $L_2 = L_1 = a = 1$ のとき、**Fig.2a** 上の直線 $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$ が $f_1(\theta_1, \theta_2) = 0$ の解であることが分かるから、これを代入して $F(\theta_1, 2\pi - \theta_1) = 0$ (**Fig.2b**) を解いて、静止平衡解 $\theta_1 = \alpha$, $\theta_2 = 2\pi - \alpha$ が求められた。同様に、**Fig.3**, **Fig.4** は対称 2 点吊り振子の計算例であり、直線 $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$ が $f_1(\theta_1, \theta_2) = 0$ の解である。

Fig.2a Contour plot of $f_1(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) ($-\pi/2 \le \theta_1 \le \pi/2, 3\pi/2 \le \theta_2 \le 5\pi/2$) for $c = 1$.

Fig.2b Contour plot of $F(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) ($-\pi/2 \le \theta_1 \le \pi/2, -\pi/2 \le \theta_2 \le \pi/2$) for $c = 1$. $\alpha = 0$. The black line denotes $\theta_2 = \theta_1$.

Fig.3a Contour plot of $f_1(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) ($-\pi/2 \le \theta_1 \le \pi/2, 3\pi/2 \le \theta_2 \le 5\pi/2$) for $c = 1.5$.

Fig.3b Contour plot of $F(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) $(-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2, -\pi/2 \leq \theta_2 \leq \pi/2)$ for $c = 1.5$. $\alpha = 0.523599$. The black curve denotes $\theta_2 = -0.523599 + \theta_1 - 0.866025\theta_1^2$.

Fig.4a Contour plot of $f_1(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) $(-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2, 3\pi/2 \leq \theta_2 \leq 5\pi/2)$ for $c = 0.5$.

Fig.4b Contour plot of $F(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) $(-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2, -\pi/2 \leq \theta_2 \leq \pi/2)$ for $c = 0.5$. $\alpha = -0.523599$. The black curve denotes $\theta_2 = 0.523599 + \theta_1 + 0.288675\theta_1^2$.

Fig.5a Contour plot of $F(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) $(-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2, 3\pi/2 \leq \theta_2 \leq 5\pi/2)$ for $c = 1.5$. The strings are of $L_1 = 0.7$ and $L_2 = 1.3$.

Fig.5b Contour plot of $F(\alpha_A + \theta_1, \alpha_B + \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) $(-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2, -\pi/2 \leq \theta_2 \leq \pi/2)$ for $c = 1.5$. The strings are of $L_1 = 0.7$ and $L_2 = 1.3$. $\alpha_A = 0.476701$ and $\alpha_B = -0.597008$. The black curve denotes $\theta_2 = -0.597008 + 0.4394499\theta_1 - 0.314038\theta_1^2 - \alpha_B$.

Fig.6a Contour plot of $F(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) $(-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2, 3\pi/2 \leq \theta_2 \leq 5\pi/2)$ for $c = 1.5$. The strings are of $L_1 = 1.3$ and $L_2 = 0.7$.

Fig.6b Contour plot of $F(\alpha_A + \theta_1, \alpha_B + \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) $(-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2, -\pi/2 \leq \theta_2 \leq \pi/2)$ for $c = 1.5$. The strings are of $L_1 = 1.3$ and $L_2 = 0.7$. $\alpha_A = 0.597008$ and $\alpha_B = -0.476701$. The black curve denotes $\theta_2 = -0.476701 + 2.275532\theta_1 - 3.69922\theta_1^2 - \alpha_B$.

Fig.7a Contour plot of $F(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) $(-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2, 3\pi/2 \leq \theta_2 \leq 5\pi/2)$ for $c = 0.5$. The strings are of $L_1 = 1.3$ and $L_2 = 0.7$.

Fig.7b Contour plot of $F(\alpha_A + \theta_1, \alpha_B + \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) $(-\pi/2 \leq \theta_1 \leq \pi/2, -\pi/2 \leq \theta_2 \leq \pi/2)$ for $c = 0.5$. The strings are of $L_1 = 1.3$ and $L_2 = 0.7$. $\alpha_A = -0.425786$ and $\alpha_B = 0.562759$. The black curve denotes $\theta_2 = 0.562759 + 1.43775\theta_1 + 0.4485579\theta_1^2 - \alpha_B$.

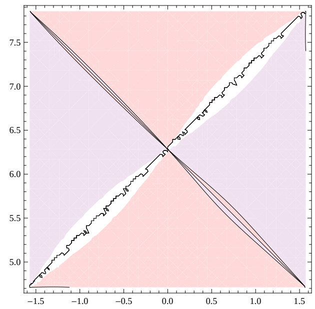


Fig.2a

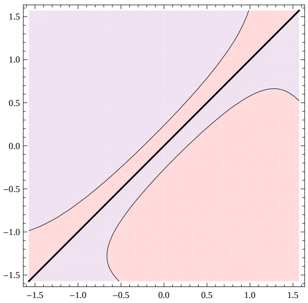


Fig.2b

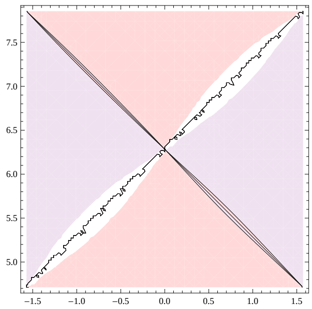


Fig.3a

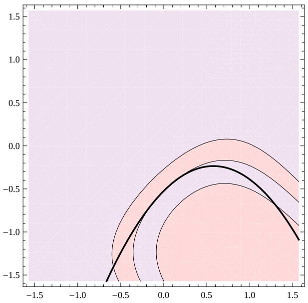


Fig.3b

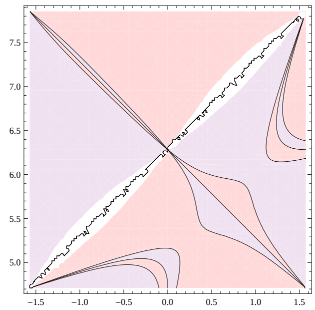


Fig.4a

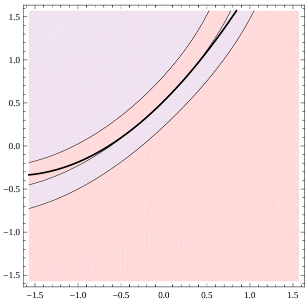


Fig.4b

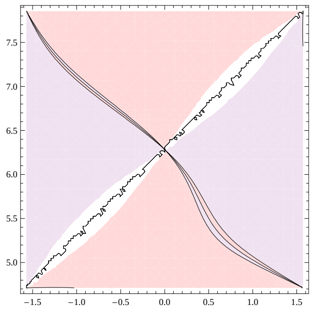


Fig.5a

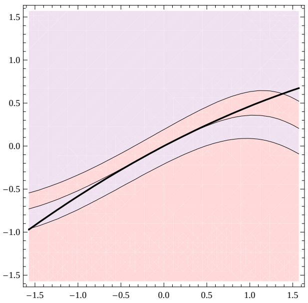


Fig.5b

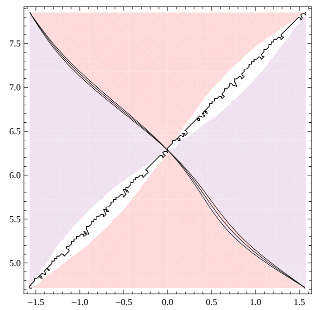


Fig.6a

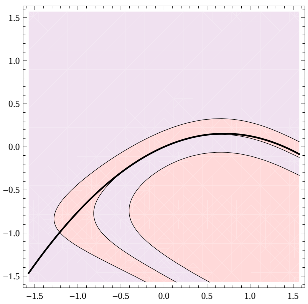


Fig.6b

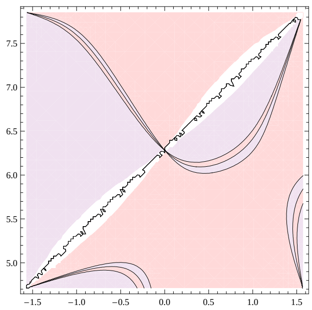


Fig.7a

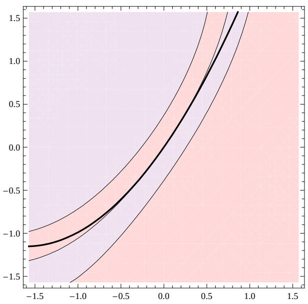


Fig.7b

Fig.5, **Fig.6**, **Fig.7** は非対称 2 点吊り振子の計算例である。

2.2 円木と小振子の静止平衡状態の例

円木と 1 つの小振子の場合 ($m_1 = 1$, $m_{p1} = 1$) には、$L_2 = L_1 = a = 1$ のとき、$f_1(\theta_1, \theta_2) = 0$ の曲線上にあることが分かる **(Fig.8a)** から、これを代入して。一方、$L_2 = L_1 = a = c = 1$ であるから、$F(\theta_1, \theta_2) = 0$ を解いて、$\theta_2 = -\theta_1$ を得る **(Fig.8b)**。解 $\theta_1 = \alpha, \theta_2 = 2\pi - \alpha$ が求められた。**Fig.8**, **Fig.9**, **Fig.10**

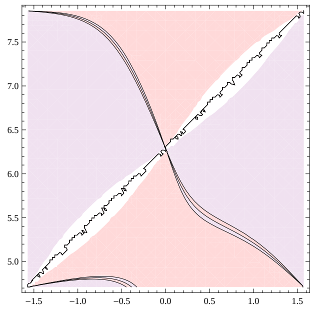


Fig.8a

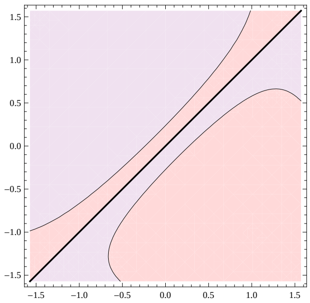


Fig.8b

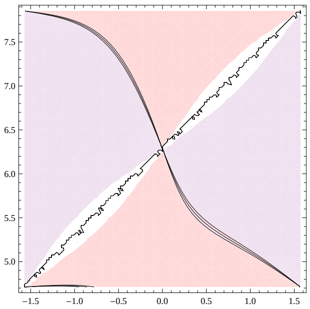


Fig.9a

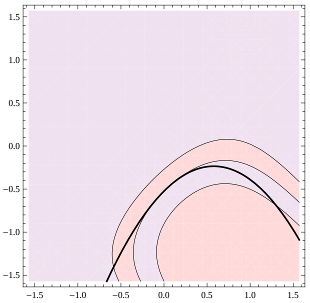


Fig.9b

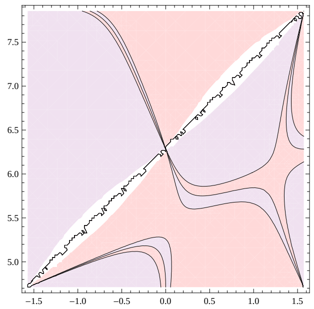


Fig.10a

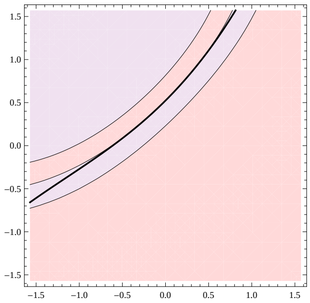


Fig.10b

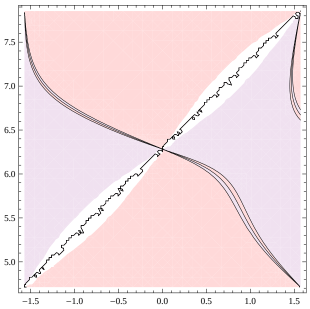


Fig.11a

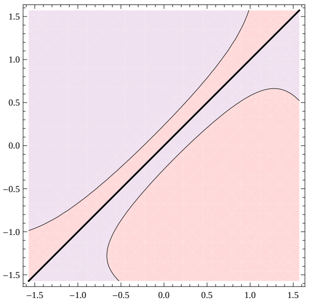


Fig.11b

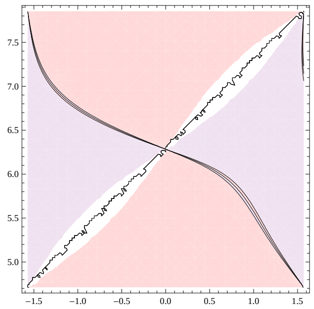


Fig.12a

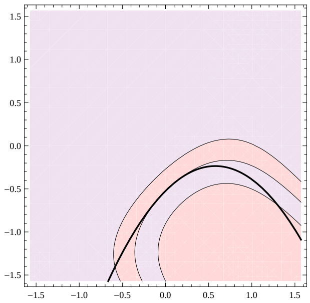


Fig.12b

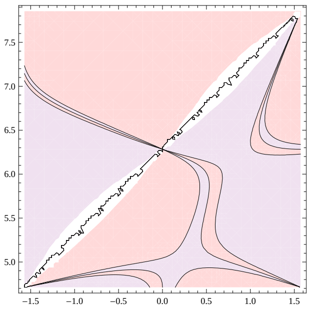


Fig.13a

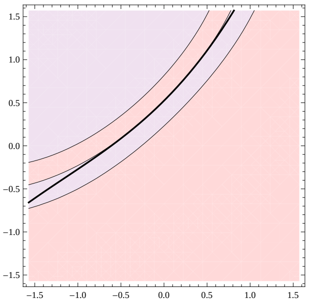


Fig.13b

Fig.8a Contour plot of $f_1(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) for $c = 1$, $m_{p1} = 1$ and $a_{p1} = 0.9$.

Fig.8b Contour plot of $F(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) for $c = 1$, $m_{p1} = 1$ and $a_{p1} = 0.9$. $\alpha = 0$. The black line denotes $\theta_2 = \theta_1$.

Fig.9a Contour plot of $f_1(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) for $c = 1.5$, $m_{p1} = 1$ and $a_{p1} = 0.9$.

Fig.9b Contour plot of $F(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) for $c = 1.5$, $m_{p1} = 1$ and $a_{p1} = 0.9$. $\alpha_A = 0.357553$ and $\alpha_B = -0.718845$. The black curve denotes $\theta_2 = -0.523599 + \theta_1 - 0.866025\theta_1^2$.

Fig.10a Contour plot of $f_1(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) for $c = 0.5$, $m_{p1} = 1$ and $a_{p1} = 0.9$.

Fig.10b Contour plot of $F(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) for $c = 0.5$, $m_{p1} = 1$ and $a_{p1} = 0.9$. $\alpha_A = -0.303118$ and $\alpha_B = 0.759206$. The black curve denotes $\theta_2 = 0.523599 + \theta_1 + 0.288675\theta_1^2 + 0.0833333\theta_1^3$.

Fig.11a Contour plot of $f_1(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) for $c = 1$, $m_{p1} = 1$ and $a_{p1} = -0.9$.

Fig.11b Contour plot of $F(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) for $c = 1$, $m_{p1} = 1$ and $a_{p1} = -0.9$. $\alpha_A = 0$ and $\alpha_B = 0$. The black curve denotes $\theta_2 = \theta_1$.

Fig.12a Contour plot of $f_1(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) for $c = 1.5$, $m_{p1} = 1$ and $a_{p1} = -0.9$.

Fig.12b Contour plot of $F(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) for $c = 1.5$, $m_{p1} = 1$ and $a_{p1} = -0.9$. $\alpha_A = 0.718845$ and $\alpha_B = -0.357553$. The black curve denotes $\theta_2 = -0.523599 + \theta_1 - 0.866025\theta_1^2$.

Fig.13a Contour plot of $f_1(\theta_1, \theta_2)$ in the plane (θ_1, θ_2) for $c = 0.5$, $m_{p1} = 1$ and $a_{p1} = -0.9$.

Fig.13b Contour plot of $F(\theta_1,\theta_2)$ in the plane (θ_1,θ_2) for $c=0.5$, $m_{p1}=1$ and $a_{p1}=-0.9$. $\alpha_A=-0.759206$ and $\alpha_B=0.303118$. The black curve denotes $\theta_2=0.523599+\theta_1+0.288675\theta_1^2+0.0833333\theta_1^3$.

$L_1=0.7$, $L_2=1.3$ の場合に θ_2 を θ_1 の関数として表現したのに対して、$L_1=1.3$, $L_2=0.7$ の場合には θ_1 を θ_2 の関数として表現する方が近似式の適用範囲が広いことが分かる。糸の長さが短い方の角度を基本の変数に選び、それを用いて長い糸の方の角度を表す方が良さそうである。

2.3 円木と 1 つの小振子の線形連成運動

円木から吊り下げられた小振子の運動 (**Fig.1**) は 2 自由度であり，鉛直軸から測った糸の傾き角度 θ_{p1} と θ_{11} で記述される．それ故，固有角振動数は 2 つあり，初期値問題の解では θ_{p1} と θ_{11} が同位相で振動する場合と逆位相で振動する場合が起こり得る．

静止平衡解に角度摂乱を加えて，$\theta_1=\alpha+\theta_{11}$, $\theta_2=2\pi-\alpha+\theta_{21}$, $\theta_{p1}=0+\theta_{p1}$ と表し，摂乱が小さいと仮定して (2.1), (2.2), (2.6), (2.8) 式を Taylor 展開する．x 方向には摂乱の 1 次まで取り，z 方向には摂乱の 2 次まで取る．そして，摂乱の 1 次まで取って運動・回転 energy を評価し，摂乱の 1 次まで取って重力の potential energy を評価する．これらを考慮して，(2.1), (2.2) 式の座標値は次のように表される:

$$
\begin{cases}
x_G=x_0+a\beta+h\theta_{11},\\
z_G=z_0+h-\dfrac{1}{2}(h-a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2,\\
x_{G2}=x_0+a\beta+(h+h_g\beta_1)\theta_{11},\\
z_{G2}=z_0+h-h_g\\
-\dfrac{1}{2}\left(h-a\theta_{222}\beta_1-h_g\beta_1^2\right)\theta_{11}^2,\\
x_{p1}=x_0+a\beta-a_{p1}+h\theta_{11}+L_{p1}\theta_{p1},\\
z_{p1}=z_0+h+L_{p1}-a_{p1}\beta_1\theta_{11},\\
-\dfrac{1}{2}(h-(a-a_{p1})\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2-\dfrac{1}{2}L_{p1}\theta_{p1}^2,\\
x_{p2}=x_0+a\beta+a_{p2}+h\theta_{11}+L_{p2}\theta_{p2},\\
z_{p2}=z_0+h+L_{p2}+a_{p2}\beta_1\theta_{11}\\
-\dfrac{1}{2}(h-(a+a_{p2})\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2-\dfrac{1}{2}L_{p2}\theta_{p2}^2,\\
\varphi_L=-\beta_1\theta_{11}
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

但し，$\beta_1=\beta-1$ とおいた．

Fig.1 の系 は θ_{11}, θ_{p1} で記述され，その線形振動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は次のように表される:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}=&\frac{1}{2}\left[m_1h^2+J\beta_1^2\right]\dot\theta_{11}^2\\
&+\frac{m_{p1}}{2}\left[a_{p1}^2\beta_1^2\dot\theta_{11}^2+\left(h\dot\theta_{11}+L_{p1}\dot\theta_{p1}\right)^2\right]\\
&+m_1g\left(z_0+h+(-h+a\theta_{222}\beta_1)\frac{\theta_{11}^2}{2}\right)\\
&+m_{p1}g\,(z_0+(h+L_{p1})-a_{p1}\beta_1\theta_{11}\\
&-(h-(a-a_{p1})\theta_{222}\beta_1)\frac{\theta_{11}^2}{2}-L_{p1}\frac{\theta_{p1}^2}{2}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

これにより，Lagrange の運動方程式は，次のように表される:

$$
\begin{cases}
a_{000}+a_{110}\theta_{11}+a_{111}\ddot\theta_{11}+a_{121}\ddot\theta_{p1}=0,\\
a_{211}\ddot\theta_{11}+a_{220}\theta_{p1}+a_{221}\ddot\theta_{p1}=0
\end{cases}
\tag{2.11}
$$

ここで，係数 a_{000}-a_{221} は次式で与えられる:

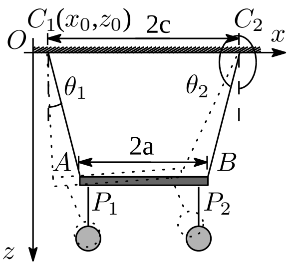
$$
\begin{cases}
M=m_1+m_2+m_{p1},\\
a_{000}=m_{p1}ga_{p1}\beta_1,\\
a_{110}=g\left[Mh+(m_{p1}a_{p1}-Ma)\ \times\theta_{222}\beta_1\right],\\
a_{111}=\left(J+J_2+m_{p1}a_{p1}^2\right)\beta_1^2+Mh^2,\\
a_{121}=m_{p1}hL_{p1},\ \ a_{211}=m_{p1}hL_{p1},\\
a_{220}=m_{p1}gL_{p1},\ \ a_{221}=m_{p1}L_{p1}^2,
\end{cases}
\tag{2.12}
$$

また，$L_2=L_1=a=1$ と取ると，β $(0<\beta<2)$ の変化に対して，θ_{222} は次のように表される:

$$
\theta_{222}=\frac{(1-\beta)\sqrt{\beta}}{\sqrt{2-\beta}}
\tag{2.13}
$$

3 円木と 2 つの小振子の連成運動

長さ $2a$ で質量 m_1 の円木の重心位置 (x_G,z_G) から，左側に距離 a_{p1} の位置に長さ L_{p1} の糸を取り付け，糸の他端に質量 m_{p1} の質点を結びつける．また，右側に距離 a_{p2} の位置に長さ L_{p2} の糸を取り付け，糸の他端に質量 m_{p2} の質点を結びつける (**Fig.51**)．この場合の運動の自由度は 3 で，$\theta_{11}, \theta_{p1}, \theta_{p2}$ で表される．静止平衡状態で 2 つの小振子の重力の moment の釣合が対称な配置が実現される条件を与える．円木の上に質量 m_2 で重心回りの慣性 moment J_2 の物体を置いた場合が **Fig.52** に示される．このとき，円木の重心から物体重心までの高さは h_g である．



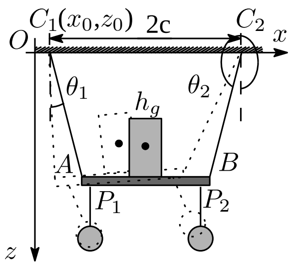


Fig.51 Bifilar suspension pendulum of $c>a$ with two small pendulums.

Fig.52 Bifilar suspension pendulum of $c>a$ with a body of the height of its center of mass h_g and two small pendulums.

Fig.51, **Fig.52** の円木の端点 A, B, 円木の重心 (x_G,z_G), 円木の長さ (θ_1 と θ_2 の関係式), 重心回りの回転角 φ ($\varphi\equiv\varphi(\theta_1,\theta_2)$)，円木から高さ h_g の位置にある物体の

重心 (x_{G2}, z_{G2}) は，次のように表される:

$$\begin{cases} x_A = x_0 + L_1\sin(\theta_1),\ \ z_A = z_0 + L_1\cos(\theta_1), \\ x_B = x_0 + 2c + L_2\sin(\theta_2),\ \ z_B = z_0 + L_2\sin(\theta_2), \\ x_G = (x_A + x_B)/2,\ \ z_G = (z_A + z_B)/2, \\ x_{G2} = x_G - h_g\sin(\varphi),\ \ z_{G2} = z_G - h_g\cos(\varphi), \\ 2a = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2}, \\ \tan(\varphi) = -\dfrac{z_B - z_A}{x_B - x_A} \end{cases} \tag{3.1}$$

小振子 P_1, P_2 **(Fig.51)** の錘の座標は次のように表される:

$$\begin{cases} x_{p1} = x_G - a_{p1}\cos(\varphi) + L_{p1}\sin(\theta_{p1}), \\ z_{p1} = z_G + a_{p1}\sin(\varphi) + L_{p1}\cos(\theta_{p1}), \\ x_{p2} = x_G + a_{p2}\cos(\varphi) + L_{p2}\sin(\theta_{p2}), \\ z_{p2} = z_G - a_{p2}\sin(\varphi) + L_{p2}\cos(\theta_{p2}) \end{cases} \tag{3.2}$$

Fig.1 の系の静止平衡状態における力と力の moment の釣合は，次のように表される:

$$\begin{cases} -S_1\sin(\theta_1) + S_2\sin(2\pi - \theta_2) = 0, \\ S_1\cos(\theta_1) + S_2\cos(2\pi - \theta_2) = (m_1 + m_{p1})g, \\ 2cS_2\cos(2\pi - \theta_2) = (c - a_{p1})m_{p1}g + cm_1 g, \\ (c + a_{p1})m_{p1}g + cm_1 g + 2cS_1\cos(\theta_1) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

ここで，対称な配置の静止平衡解 $\theta_1 = \alpha = 2\pi - \theta_2$ が成り立つならば，(2.3) の第 1 式から $S_1 = S_2$ を得る．第 2 式は $2S_1\cos(\alpha) = m_1 g + m_{p1}g$ となり，第 3, 4 式より $a_{p1}m_{p1}g = 0$ を得る．つまり，$a_{p1} = 0$ ならば，**Fig.1(a)** の左右対称の配置が成り立つ．同様にして，**Fig.2** の静止平衡状態の力と力の moment の釣合により，$m_{p1}ga_{p1} - m_{p2}ga_{p2} = 0$ であれば **Fig.2** の左右対称の配置が成り立つことが導かれる．これらの点に留意して，以下では **Fig.2** の系の運動方程式を解き，その特別な場合として **Fig.1(a)** の系の運動を扱う．

静止平衡解に角度攪乱を加えて，$\theta_1 = \alpha + \theta_{11}, \theta_2 = 2\pi - \alpha + \theta_{21}, \theta_{p1} = 0 + \theta_{p1}, \theta_{p2} = 0 + \theta_{p2}$ と表し，攪乱が小さいと仮定して (2.2) 式を Taylor 展開する．x 方向には攪乱の 1 次まで取り，z 方向には攪乱の 2 次まで取る．そして，攪乱の 1 次まで取って運動・回転 energy を評価し，攪乱の 1 次まで取って重力の potential energy を評価する．これらを考慮して，(2.2) 式の座標値は次のように表される:

$$\begin{cases} x_G = x_0 + a\beta + h\theta_{11}, \\ z_G = z_0 + h - \dfrac{1}{2}(h - a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2, \\ x_{G2} = x_0 + a\beta + (h + h_g\beta_1)\theta_{11}, \\ z_{G2} = z_0 + h - h_g \\ -\dfrac{1}{2}\left(h - a\theta_{222}\beta_1 - h_g\beta_1^2\right)\theta_{11}^2, \\ x_{p1} = x_0 + a\beta - a_{p1} + h\theta_{11} + L_{p1}\theta_{p1}, \\ z_{p1} = z_0 + h + L_{p1} - a_{p1}\beta_1\theta_{11}, \\ -\dfrac{1}{2}(h - (a - a_{p1})\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2 - \dfrac{1}{2}L_{p1}\theta_{p1}^2, \\ x_{p2} = x_0 + a\beta + a_{p2} + h\theta_{11} + L_{p2}\theta_{p2}, \\ z_{p2} = z_0 + h + L_{p2} + a_{p2}\beta_1\theta_{11} \\ -\dfrac{1}{2}(h - (a + a_{p2})\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2 - \dfrac{1}{2}L_{p2}\theta_{p2}^2, \\ \varphi_L = -\beta_1\theta_{11} \end{cases} \tag{3.4}$$

但し，$\beta_1 = \beta - 1$ とおいた．

Fig.2 の系 は $\theta_{11}, \theta_{p1}, \theta_{p2}$ で記述され，その線形振動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= m_1 g\left(z_0 + h + (-h + a\theta_{222}\beta_1)\frac{\theta_{11}^2}{2}\right) \\ &+ m_{p1}g\,(z_0 + (h + L_{p1}) - a_{p1}\beta_1\theta_{11} \\ &\left. -(h - (a - a_{p1})\theta_{222}\beta_1)\frac{\theta_{11}^2}{2} - L_{p1}\frac{\theta_{p1}^2}{2}\right) \\ &+ m_{p2}g\,(z_0 + (h + L_{p2}) + a_{p2}\beta_1\theta_{11} \\ &\left. -(h - (a + a_{p2})\theta_{222}\beta_1)\frac{\theta_{11}^2}{2} - L_{p2}\frac{\theta_{p2}^2}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left[m_1 h^2 + J\beta_1^2\right]\dot{\theta}_{11}^2 \\ &+ \frac{m_{p1}}{2}\left[a_{p1}^2\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2 + \left(h\dot{\theta}_{11} + L_{p1}\dot{\theta}_{p1}\right)^2\right] \\ &+ \frac{m_{p2}}{2}\left[a_{p2}^2\beta_1^2\dot{\theta}_{11}^2 + \left(h\dot{\theta}_{11} + L_{p2}\dot{\theta}_{p2}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

これにより，Lagrange の運動方程式は，次のように表される:

$$\begin{cases} a_{000} + a_{110}\theta_{11} + a_{111}\ddot{\theta}_{11} \\ +a_{121}\ddot{\theta}_{p1} + a_{131}\ddot{\theta}_{p2} = 0, \\ a_{211}\ddot{\theta}_{11} + a_{220}\theta_{p1} + a_{221}\ddot{\theta}_{p1} = 0, \\ a_{311}\ddot{\theta}_{11} + a_{330}\theta_{p2} + a_{331}\ddot{\theta}_{p2} = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

ここで，係数 a_{000}-a_{331} は次式で与えられる:

$$\begin{cases} M = m_1 + m_{p1} + m_{p2}, \\ a_{000} = g(m_{p1}a_{p1} - m_{p2}a_{p2})\beta_1, \\ a_{110} = g\left[Mh + (m_{p1}a_{p1} - m_{p2}a_{p2} - Ma)\right. \\ \left.\times\theta_{222}\beta_1\right], \\ a_{111} = \left(J + m_{p1}a_{p1}^2 + m_{p2}a_{p2}^2\right)\beta_1^2 + Mh^2, \\ a_{121} = m_{p1}hL_{p1},\ \ a_{131} = m_{p2}hL_{p2}, \\ a_{211} = m_{p1}hL_{p1}, \\ a_{220} = m_{p1}gL_{p1},\ \ a_{221} = m_{p1}L_{p1}^2, \\ a_{311} = m_{p2}hL_{p2}, \\ a_{330} = m_{p2}gL_{p2},\ \ a_{331} = m_{p2}L_{p2}^2 \end{cases} \tag{3.7}$$

また，$L_2 = L_1 = a = 1$ と取ると，$\beta\,(0 < \beta < 2)$ の変化に対して，θ_{222} は次のように表される:

$$\theta_{222} = \frac{(1-\beta)\sqrt{\beta}}{\sqrt{2-\beta}} \tag{3.8}$$

4 おわりに

前報[1],[2] では，2 点吊り振子の 3 つの振動 mode の特徴を述べ，それらの振子の静止平衡状態を表す幾何学的関係式を図式解法により解いた．それに続き，本報告では，対称 2 点吊り振子の mode 1 の「遊動円木」に焦点をあて，静止平衡状態の幾何学的関係式を解析的に解き，攪乱状態の角度変数を用いて円木と物体の重力 potential energy 特性を示した．また，線形振動を記述する Lagrange 関数を求めて Lagrange の運動方程式を導き，固有角振動数の特性を議論した．関連する解析は，次報? で扱う．

なお，本報告の一部は，先に講演発表したもの[3],[4] であることを付記する．

参考文献

[1] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (3): 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.63-70.

[2] 望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，宮内 太積，川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (4): 2 点吊り振子の実験と解析” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.71-78.

[3] 望月 孔二，宮内 太積，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之，Mazni Al Irfan，川船 雄一郎，佐々木 隆吾，舟田 敏雄: “PSD 簡易計測システム試作と 2 点吊り振子の実験・解析” 電子情報通信学会 2009 年総合大会 2009 年 3 月 17 日 (火)〜20 日 (金) 愛媛大（松山市）3 月 18 日 (水) 午前，「D-15 教育工学」(一般セッション)，講演番号：D-15-24 「電子情報通信学会 2009 年 総合大会講演論文集」の DVD 情報・システムソサイエティ p.202. file: d_15_024.pdf

[4] 宮内 太積，望月 孔二，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之，舟田 敏雄: “水平加振による非線形振動系の実験と振動解析 (振動学教材開発)” 日本機械学会東海支部第 58 期総会・講演会 2009 年 3 月 17 日 (火)，18 日 (水) 岐阜大学 工学部 3 月 18 日 (水) 12:45-14:00 GS 機械力学 講演番号 263. 日本機械学会 東海支部 第 58 回総会講演会 講演論文集 (’09.3.17-18)No.093-1, pp.133-134.

[5] 舟田 敏雄，宮内 太積，望月 孔二，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成振動の数値解析” 第 58 回理論応用力学講演会実行委員会

[6] 望月 孔二，宮内 太積，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，川船 雄一郎，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦， 川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子の基礎運動解析と PSD による簡易計測システム試作” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[7] 舟田 敏雄，マズニ アル イルファン，佐々木 隆吾，川船 雄一郎，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子の非線形振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[8] 宮内 太積，望月 孔二，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，川船 雄一郎，マズニ アル イルファン，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成運動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[9] 内堀 晃彦，舟田 敏雄，佐々木 隆吾，川船 雄一郎，マズニ アル イルファン，川上 誠，中道 義之，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子と小振子の連成振動の制振評価 — 静岡県の「プロジェクト TOUKAI (東海・倒壊)-0 (ゼロ)」による教材の開発 (3)” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[10] 舟田 敏雄，マズニ アル イルファン，佐々木 隆吾，川船 雄一郎，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之，宮内 太積，望月 孔二: “2 点吊り振子のカオス解の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[11] 舟田 敏雄，宮内 太積，望月 孔二，内堀 晃彦，川上 誠，中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成振動の数値解析” 第 58 回理論応用力学講演会 講演論文集 NCTAM2009, pp.255-256. 第 58 回理論応用力学講演会、日本学術会議、2009 年 6 月 9 日（火）〜11 日（木）、OS15 連成現象・複合現象のシミュレーション 講演番号 2B13 (6/10).

目次