

2点吊り振子の3つの mode 間相互作用の解析 (1)

舟田 敏雄^{*1} 木ノ内 智貴^{*1} 桜井 賢人^{*1} 大庭 勝久^{*1} 青木 悠祐^{*1} 宮内 太積^{*2} 望月 孔二^{*3}

An Analysis of Mode Coupling in Three Modes of Bifilar Suspension Pendulum (1)

Toshio FUNADA^{*1} Toshiki KINOUCHI^{*1} Kento SAKURAI^{*1} Katsuhisa OHBA^{*1} Yusuke AOKI^{*1}
Tatsumi MIYAUCHI^{*2} and Kouji MOCHIZUKI^{*3}

Abstract: A bifilar suspension pendulum, a uniform density bar suspended at its two points by two strings of same length, may swing in a vertical plane or make torsional oscillation about a vertical axis. The swinging in a co-plane of the strings and the bar is called Mode 1, and the swinging in a vertical plane perpendicular to the bar is Mode 2. Mode 3 is the torsional oscillation about a vertical axis. These modes are linearly independent of each other, but it is possible to make nonlinear coupling oscillation between the modes and internal resonance. In order to treat such coupling systematically, the formulation of the problems is made on two spherical coordinates systems and equations of motion for the three modes are derived. Linear oscillations are examined for the three modes based on experiments.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Coupling of Three Oscillation Modes, Internal Resonance

1 はじめに

対称 2 点吊り振子 (並進振子) を免震床に応用するための検討^[1] に刺激されて, 2 点吊り振子の静止平衡状態周りの振子運動について, 運動方程式を導出して初期値問題を数値解析し, 実験を行った (Fig.1, Table 1)^{[2]-[7]}. その振子運動には, 紐と円木の成す鉛直面内で揺れる “mode 1 (遊動円木 mode)” とそれに垂直な鉛直面内で揺れる “mode 2 (ブランコ mode)” があり, 鉛直軸回りの円木の振動は, “mode 3 (捩れ振動 mode)” に分類される.

本報告では, 各振動 mode の実験値と線形振動理論値の比較結果 (Table 2, Fig.2)^{[4]-[7]} に基づき, 球座標系を用いた 3 つの振動 mode の表現により, 線形共振/弱非線形内部共振の解析を試みる. 本報告は, 三部の内の第一報告であり, 続報^{[8], [9]} に続く.

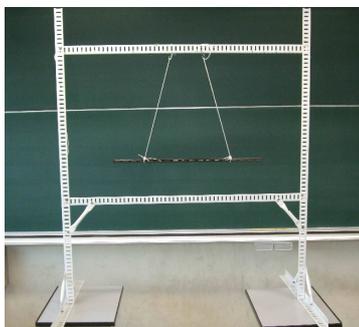


Fig.1 Experimental apparatus for the bifilar suspension pendulum with a bar of $m_1 = 0.6659$ kg and length $2b_1 = 0.899$ m in $a_1 > c_1$. When $a_1 = c_1$, the bar swings horizontally as a part of parallelogram.

Table 1 Specification of the apparatus (Fig.1), a bar of length $2b_1$ and $m = 0.6659$ kg suspended by two ropes of length L_1 at two points which are distant by a_1 from the center.

a_1 [m]	0.26	b_1 [m]	0.4495
c_1 [m]	0.0875, 0.1625, 0.2375, 0.3125, 0.3875, 0.4625, 0.5375		
L_1 [m]	0.443, 0.542, 0.648		

Table 2 Period T for various c_1 and $L_1 = 0.648$ m. Experimental T_{ej} and theoretical T_{0j} for mode j .

c_1	T_{e1}	T_{e2}	T_{e3}	T_{01}	T_{02}	T_{03}
0.0875	1.637	1.617	2.594	1.6247	1.58626	2.72931
0.1625	1.618	1.631	1.992	1.61325	1.60645	2.02826
0.2375	1.614	1.644	1.671	1.61527	1.61519	1.68684
0.3125	1.595	1.641	1.435	1.61193	1.61302	1.46858
0.3875	1.540	1.624	1.288	1.58472	1.59981	1.30802
0.4625	1.469	1.604	1.155	1.51775	1.5747	1.17848
0.5375	1.352	1.566	1.049	1.40409	1.53588	1.06623

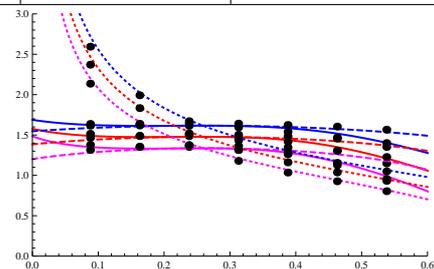


Fig.2 Period T versus c_1 for mode 1 (solid line), 2 (dotted), 3 (dashed). $L_1 = 0.443$ (below), $L_1 = 0.542$ (middle), and $L_1 = 0.648$ (above). Marks are (c_1, T_e) for experimental T_e .

本報告の §2 の解析により, mode 1, 2 の固有角振動数が一致する条件より $c_1 = a_1$, $c_1 = b_1^2/(3a_1)$ が得られ, mode 2, 3 の固有角振動数が一致する条件より $c_1 = b_1^2/(3a_1)$ が得られ, mode 3, 1 の固有角振動数が一致する条件より $c_1 = b_1^2/(3a_1)$, $c_1 = a_1 - L_1$, $c_1 = a_1 + L_1$ が得られる.

^{*1} 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.

^{*2} 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.

^{*3} 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.

一方, 先の実験結果 (Table 2, Fig.2) では $b_1 = 0.4495$, $a_1 = 0.26$ なので, $c_1 = a_1 = 0.26$ で mode 1, 2 の固有角振動数が一致し, $c_1 = b_1^2/(3a_1) = 0.259039$ で 3 つの mode の固有角振動数が一致することが理論的に示される. 実験では $c_1 \sim a_1$ で 3 つの共振点と推定されたが, それは正しかったと言えよう. §3 では非線形連成振動の解析に向け, 様々な連成振動の可能性を線形理論に基づき個々に論ずる.

2 2点吊り振子の3つの振動 mode の球座標系表現

水平右手方向に x 軸, 水平手前方向に y 軸, 鉛直下方向に z 軸とするデカルト座標系 (x, y, z) を用い, Fig.3 に示すように, C_1 点を起点に 2 点吊り振子の配置を記述する. また, 球座標系を併用し, 座標原点は適宜取るものとする. 水平な上壁面上に C_1 点 (x_0, y_0, z_0) を取り. 間隔 c_1 で, O 点 $(x_0 + c_1, y_0, z_0)$, C_2 点 $(x_0 + 2c_1, y_0, z_0)$ を取る. 遊動円木の中央 (質量中心) を G 点 (x_g, y_g, z_g) とし, G 点から間隔 a_1 で, 遊動円木上の左の紐の結び目位置を A_1 点 (x_1, y_1, z_1) , 右の紐の結び目位置を A_2 点 (x_2, y_2, z_2) と表す. これらにより, 各点間の長さ (距離) は $\overline{A_1A_2} = 2a_1$, $\overline{A_1G} = a_1$, $\overline{GA_2} = a_1$, $\overline{A_1C_1} = L_1$, $\overline{A_2C_2} = L_2$, $\overline{OG} = r_g$ と表される. 回転角をデカルト座標系の軸回りに取って軸名の添え字を付け, O 点を原点とする球座標系 (r, θ_y, θ_z) を用い, z - x 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_{yg} , y - z 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_{xg} を取り, G 点の座標 (x_g, y_g, z_g) は次式で表される:

$$\begin{cases} x_g = r_g \sin(\theta_{yg}) + x_0 + c_1, \\ y_g = r_g \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{xg}) + y_0, \\ z_g = r_g \cos(\theta_{yg}) \cos(\theta_{xg}) + z_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

また, G 点を原点とする球座標系を用いて, z - x 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_y , x - y 面内で鉛直軸から反時計回りに θ_z を取り, A_1 点の座標 (x_1, y_1, z_1) と A_2 点の座標 (x_2, y_2, z_2) は次式で表される:

$$\begin{cases} x_1 = x_g - a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z), \\ y_1 = y_g - a_1 \cos(\theta_y) \sin(\theta_z), \\ z_1 = z_g + a_1 \sin(\theta_y) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} x_2 = x_g + a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z), \\ y_2 = y_g + a_1 \cos(\theta_y) \sin(\theta_z), \\ z_2 = z_g - a_1 \sin(\theta_y) \end{cases} \quad (2.3)$$

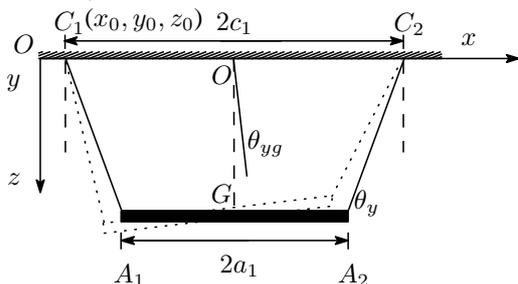


Fig.3 Bifilar suspension pendulum with $c_1 > a_1$ (mode 1).

紐の長さが等しく ($L_2 = L_1$) 一定であるとする. また, $\overline{A_1A_2} = 2a_1$ は次の f_0 で表され, $\overline{A_1C_1} = L_1$ は f_1 , $\overline{A_2C_2} = L_2$ は f_2 で表される. 水平面からの遊動円木の傾き角の関係式は f_3, f_4 で与えられる:

$$\begin{cases} f_0 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 4a_1^2, \\ f_1 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - L_1^2 \\ = a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1c_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z) + r_g^2 \\ + 2r_g (a_1 \cos(\theta_{xg}) \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_y) \\ + (c_1 - a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z)) \sin(\theta_{yg}) \\ - a_1 \sin(\theta_{xg}) \cos(\theta_y) \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_z)) = 0, \\ f_2 = (x_2 - x_0 - 2c_1)^2 + (y_2 - y_0)^2 + (z_2 - z_0)^2 - L_2^2 \\ = a_1^2 + c_1^2 - L_2^2 - 2a_1c_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z) + r_g^2 \\ - 2r_g (a_1 \cos(\theta_{xg}) \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_y) \\ + (c_1 - a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z)) \sin(\theta_{yg}) \\ - a_1 \sin(\theta_{xg}) \cos(\theta_y) \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_z)) = 0, \\ f_3 = -\frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} = \sec(\theta_z) \tan(\theta_y), \\ f_4 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan(\theta_z), \\ f_5 = \frac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1} = -\csc(\theta_z) \tan(\theta_y) \end{cases} \quad (2.4)$$

紐の長さが等しく ($L_2 = L_1$) 一定であるから, f_1, f_2 の条件満たすことが求められる. f_1, f_2 の和を取ると, r_g を θ_y, θ_z で表現する式が得られる:

$$f_1 + f_2 = 2(a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1c_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z) + r_g^2) = 0 \quad (2.5)$$

$$r_g = \sqrt{L_1^2 - (a_1^2 + c_1^2 - 2a_1c_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z))} \equiv r_{g1}(\theta_y, \theta_z) \quad (2.6)$$

f_1, f_2 の差を取ると角度の関係式が得られ, θ_y を個別の振動 mode を記述する変数 $\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z$ で表現できる:

$$f_1 - f_2 = 4r_g [a_1 \cos(\theta_{xg}) \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_y) + (c_1 - a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_z)) \sin(\theta_{yg}) - a_1 \cos(\theta_y) \cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{xg}) \sin(\theta_z)] = 0 \quad (2.7)$$

$$\theta_y = \arcsin(d_{11}/c_{11}) - \arcsin(b_{11}/c_{11}) \equiv \theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z) \quad (2.8)$$

但し, a_{11}, d_{11} は次のように定義した:

$$\begin{cases} a_{11} = \cos(\theta_{xg}) \cos(\theta_{yg}), \\ b_{11} = -\cos(\theta_z) \sin(\theta_{yg}) \\ -\cos(\theta_{yg}) \sin(\theta_{xg}) \sin(\theta_z), \\ c_{11} = \sqrt{a_{11}^2 + b_{11}^2}, \quad d_{11} = -\frac{c_1}{a_1} \sin(\theta_{yg}) \end{cases} \quad (2.9)$$

この系の静止平衡状態は, 5 つの時間の関数を用いて記述されて $(r_g, \theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_y, \theta_z) = (r_{g0}, 0, 0, 0, 0)$ と表される. 但し, r_{g0} は次式で定義される:

$$r_{g0} = \sqrt{L_1^2 - (a_1 - c_1)^2} \quad (2.10)$$

静止平衡状態の回りで攪乱に対して (2.6), (2.8) 式を Taylor 展開し, 微小 parameter ϵ ($\epsilon \ll 1$) を用いて攪乱を $\epsilon\theta_{yg}$,

$\epsilon\theta_{xg}, \epsilon\theta_z$ と表すと, θ_y, r_g は次のように近似される:

$$\begin{aligned} \theta_y &= \left(1 - \frac{c_1}{a_1}\right) \epsilon\theta_{yg} + \epsilon^2\theta_{xg}\theta_z \\ &+ \epsilon^3 \left[\left(1 - \frac{c_1^2}{a_1^2}\right) \frac{c_1\theta_{yg}^3}{6a_1} + \frac{\theta_{yg}}{2} \left[\left(1 - \frac{c_1}{a_1}\right) \theta_{xg}^2 - \theta_z^2 \right] \right] \\ &+ \epsilon^4 \left[\frac{1}{3}\theta_{xg}^3\theta_z - \left(1 - \frac{c_1}{a_1}\right) \theta_{xg}\theta_{yg}^2\theta_z - \frac{1}{6}\theta_{xg}\theta_z^3 \right] \\ &+ O(\epsilon^5) \equiv \theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z) = \theta_{y1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} r_g &= r_{g0} - \frac{\epsilon^2 a_1 c_1}{2r_{g0}} (\theta_y^2 + \theta_z^2) \\ &+ \frac{\epsilon^4 a_1 c_1}{4r_{g0}} \left[\left(\frac{1}{6} - \frac{a_1 c_1}{2r_{g0}^2} \right) (\theta_y^4 + \theta_z^4) \right. \\ &\left. + \left(1 - \frac{a_1 c_1}{r_{g0}^2} \right) \theta_y^2 \theta_z^2 \right] + O(\epsilon^6) \equiv r_{g1}(\theta_y, \theta_z) \\ &= r_{g1}(\theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z), \theta_z) \end{aligned} \quad (2.12)$$

つまり, (2.12) 式の θ_y には (2.11) 式を代入して項を整理し, $O(\epsilon^4)$ まで取るものとする.

以上の表式を用いて, 質量 m_1 , 慣性 moment J_y, J_z ($= J_y = m_1 b_1^2/3$) の遊動円木の運動を記述する Lagrange 関数 \mathcal{L} は, 次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m_1}{2} (\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g^2 + \dot{z}_g^2) + \frac{J_y}{2} \dot{\theta}_y^2 + \frac{J_z}{2} \epsilon^2 \dot{\theta}_z^2 \cos^2(\theta_y) + m_1 g z_g \\ &= \frac{m_1}{2} \dot{r}_g^2 + \frac{m_1}{2} \epsilon^2 r_g^2 (\dot{\theta}_{xg}^2 \cos^2(\epsilon\theta_{yg}) + \dot{\theta}_{yg}^2) + \frac{J_y}{2} \dot{\theta}_y^2 \\ &+ \frac{J_z}{2} \epsilon^2 \dot{\theta}_z^2 \cos^2(\theta_y) + m_1 g (r_g \cos(\epsilon\theta_{xg}) \cos(\epsilon\theta_{yg}) + z_0) \\ &+ m_1 \dot{r}_g [\dot{x}_0 \sin(\epsilon\theta_{yg}) + \dot{y}_0 \sin(\epsilon\theta_{xg}) \cos(\epsilon\theta_{yg}) \\ &+ \dot{z}_0 \cos(\epsilon\theta_{xg}) \cos(\epsilon\theta_{yg})] + m_1 \epsilon r_g [\dot{x}_0 \dot{\theta}_{yg} \cos(\epsilon\theta_{yg}) \\ &+ \dot{y}_0 [\dot{\theta}_{xg} \cos(\epsilon\theta_{xg}) \cos(\epsilon\theta_{yg}) - \dot{\theta}_{yg} \sin(\epsilon\theta_{xg}) \sin(\epsilon\theta_{yg})] \\ &- \dot{z}_0 [\dot{\theta}_{xg} \sin(\epsilon\theta_{xg}) \cos(\epsilon\theta_{yg}) + \dot{\theta}_{yg} \cos(\epsilon\theta_{xg}) \sin(\epsilon\theta_{yg})]] \\ &+ \frac{m_1}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここでは, C_1 点の座標が時間の関数となる場合も含まれている. C_1 点が固定の場合には, $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ であるから, 遊動円木の運動を記述する Lagrange 関数 \mathcal{L}_0 は, 次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{m_1}{2} (\dot{r}_g^2 + \epsilon^2 r_g^2 (\dot{\theta}_{xg}^2 \cos^2(\epsilon\theta_{xg}) + \dot{\theta}_{yg}^2)) \\ &+ \frac{J_y}{2} \dot{\theta}_y^2 + \frac{J_z}{2} \epsilon^2 \dot{\theta}_z^2 \cos^2(\theta_y) + m_1 g r_g \cos(\epsilon\theta_{xg}) \cos(\epsilon\theta_{yg}) \\ &= \frac{m_1}{2} \left[\epsilon^2 \left(\frac{\partial r_{g1}}{\partial(\epsilon\theta_{y1})} \dot{\theta}_{y1} + \frac{\partial r_{g1}}{\partial(\epsilon\theta_z)} \dot{\theta}_z \right)^2 \right. \\ &\left. + \epsilon^2 r_{g1}^2 (\dot{\theta}_{xg}^2 \cos^2(\epsilon\theta_{xg}) + \dot{\theta}_{yg}^2) \right] \\ &+ \frac{J_y}{2} \epsilon^2 \left(\frac{\partial \theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_{xg})} \dot{\theta}_{xg} + \frac{\partial \theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_{yg})} \dot{\theta}_{yg} + \frac{\partial \theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_z)} \dot{\theta}_z \right)^2 \end{aligned}$$

$$+ \frac{J_z}{2} \epsilon^2 \dot{\theta}_z^2 \cos^2(\theta_y) + m_1 g r_{g1} \cos(\epsilon\theta_{xg}) \cos(\epsilon\theta_{yg}) \quad (2.14)$$

ここで, 時間の未知関数は $r_g = r_{g1}(\theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z), \theta_z)$, $\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_y = \theta_{y1}(\theta_{xg}, \theta_{yg}, \theta_z), \theta_z$ であり, 束縛条件 f_1, f_2 により, 運動を記述する上で基本となる変数 (未知関数) は 3 つである. この一般関係式に基づき, 3 つの振動の非線形連成振動系の運動方程式を導出でき, 3 つの振動の統一的表現が得られる. それに先立ち, 本報告では, 系の個々の振動 mode の記述との関連を調べる.

2.1 遊動円木 mode

この振動 mode は z - x 面内で起こるので, $\theta_{xg} = 0, \theta_z = 0$ とおくと, (2.1)-(2.4) 式は次のように表される:

$$\begin{cases} x_g = c_1 + r_g \sin(\epsilon\theta_{yg}), & y_g = 0, & z_g = r_g \cos(\epsilon\theta_{yg}), \\ x_1 = c_1 - a_1 \cos(\theta_y) + r_g \sin(\epsilon\theta_{yg}), & y_1 = 0, \\ z_1 = r_g \cos(\epsilon\theta_{yg}) + a_1 \sin(\theta_y), \\ x_2 = c_1 + a_1 \cos(\theta_y) + r_g \sin(\epsilon\theta_{yg}), & y_2 = 0, \\ z_2 = r_g \cos(\epsilon\theta_{yg}) - a_1 \sin(\theta_y), \\ f_{11} = a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1 c_1 \cos(\theta_y) \\ + r_g^2 + 2r_g(a_1 \sin(\theta_y - \epsilon\theta_{yg}) + c_1 \sin(\epsilon\theta_{yg})) = 0, \\ f_{12} = a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1 c_1 \cos(\theta_y) \\ + r_g^2 - 2r_g(a_1 \sin(\theta_y - \epsilon\theta_{yg}) + c_1 \sin(\epsilon\theta_{yg})) = 0, \\ f_{13} = \tan(\theta_y), & f_{14} = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

この振動 mode の静止平衡状態では, $\theta_{yg} = 0, \theta_y = 0, f_{11}, f_{12}$ により, $r_g = \sqrt{L_1^2 - (c_1 - a_1)^2} \equiv r_{g0}$ を得る. この系は $\theta_{yg}, \theta_y, r_g$ で記述される. 攪乱状態では, θ_{yg} を用いて, θ_y, r_g を表現する. 遊動円木 mode を記述する Lagrange 関数 \mathcal{L}_{11} は, 次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11} &= \frac{m_1}{2} (\dot{r}_g^2 + \epsilon^2 r_g^2 \dot{\theta}_{yg}^2) + \frac{J_y}{2} \dot{\theta}_y^2 + m_1 g r_g \cos(\epsilon\theta_{yg}) \\ &= \frac{m_1}{2} \epsilon^2 \left(\left(\frac{\partial r_{g1}}{\partial(\epsilon\theta_{y1})} \frac{\partial \theta_{y1}}{\partial \theta_{yg}} \dot{\theta}_{yg} \right)^2 + r_{g1}^2 \dot{\theta}_{yg}^2 \right) \\ &+ \frac{J_y}{2} \epsilon^2 \left(\frac{\partial \theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_{yg})} \dot{\theta}_{yg} \right)^2 + m_1 g r_{g1} \cos(\epsilon\theta_{yg}) \\ &= \frac{\epsilon^2}{2} \left[m_1 \left(\left(\frac{\partial r_{g1}}{\partial(\epsilon\theta_{y1})} \frac{\partial \theta_{y1}}{\partial \theta_{yg}} \right)^2 + r_{g1}^2 \right) \right. \\ &\left. + J_y \left(\frac{\partial \theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_{yg})} \right)^2 \right] \dot{\theta}_{yg}^2 + m_1 g r_{g1} \cos(\epsilon\theta_{yg}) \quad (2.16) \\ J_{y2} &\equiv J_{y2}(\theta_{yg}) = \left[m_1 \left(\left(\frac{\partial r_{g1}}{\partial(\epsilon\theta_{y1})} \frac{\partial \theta_{y1}}{\partial \theta_{yg}} \right)^2 + r_{g1}^2 \right) \right. \\ &\left. + J_y \left(\frac{\partial \theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_{yg})} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

これにより, Lagrange の運動方程式は次式となる:

$$\begin{aligned} J_{y2} \epsilon \ddot{\theta}_{yg} + \dot{J}_{y2} \epsilon \dot{\theta}_{yg} \\ = m_1 g \left[\frac{\partial r_{g1}}{\partial(\epsilon\theta_{yg})} \cos(\epsilon\theta_{yg}) - r_{g1} \sin(\epsilon\theta_{yg}) \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

この線形化方程式は次式である:

$$J_{y20}\ddot{\theta}_{yg} = m_1g \left[\frac{\partial^2 r_{g1}}{\partial(\epsilon\theta_{yg})^2} - r_{g0} \right] \theta_{yg} \quad (2.19)$$

この解 $\theta_{yg}(t)$ は調和振動を表し, 固有角振動数 ω_{01} は次のように表される:

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{m_1g \left(r_{g0}^2 + (a_1 - c_1)^2 c_1/a_1 \right)}{r_{g0} \left((1 - c_1/a_1)^2 J_y + m_1 r_{g0}^2 \right)}} \quad (2.20)$$

ここで, 固有角振動数 ω_{01} が, 先の解析の The222 よりも簡明になり, (2.20) 式で表されたことに注目する.

2.2 ブランコ mode

この振動 mode は y - z 面内で起こるので, $\theta_{yg} = 0, \theta_y = 0, \theta_z = 0$ とおくと, (2.1)-(2.4) 式は次のように表される:

$$\begin{cases} x_g = c_1, & y_g = r_g \sin(\epsilon\theta_{xg}), & z_g = r_g \cos(\epsilon\theta_{xg}), \\ x_1 = -a_1 + c_1, & y_1 = r_g \sin(\epsilon\theta_{xg}), \\ z_1 = r_g \cos(\epsilon\theta_{xg}), & x_2 = a_1 + c_1, \\ y_2 = r_g \sin(\epsilon\theta_{xg}), & z_2 = r_g \cos(\epsilon\theta_{xg}), \\ f_{12} = a_1^2 - 2a_1c_1 + c_1^2 - L_1^2 + r_g^2 = 0, \\ f_{22} = a_1^2 - 2a_1c_1 + c_1^2 - L_1^2 + r_g^2 = 0, \\ f_{32} = 0, & f_{42} = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

この振動 mode の静止平衡状態では, $\theta_{xg} = 0, f_{12}, f_{22}$ により, $r_g = \sqrt{L_1^2 - (c_1 - a_1)^2} \equiv r_{g0}$ (r_g は一定) となり, θ_y はこの運動に関与しない. この系は θ_{xg} のみで記述される. 攪乱状態では, θ_{xg} を用いてブランコ mode を表現する. ブランコ mode を記述する Lagrange 関数 \mathcal{L}_{12} は, 次のように表される:

$$\mathcal{L}_{12} = \frac{m_1}{2} \epsilon^2 r_{g0}^2 \dot{\theta}_{xg}^2 + m_1 r_{g0} g \cos(\epsilon\theta_{xg}) \quad (2.22)$$

これにより, Lagrange の運動方程式は次式となる:

$$m_1 r_{g0}^2 \epsilon \ddot{\theta}_{xg} = -m_1 r_{g0} g \sin(\epsilon\theta_{xg}) \quad (2.23)$$

この線形化方程式は次式である:

$$m_1 r_{g0}^2 \ddot{\theta}_{xg} = -m_1 r_{g0} g \theta_{xg} \quad (2.24)$$

この解 $\theta_{xg}(t)$ は調和振動を表し, 固有角振動数 ω_{02} は次のように表される:

$$\omega_{02} = \sqrt{g/r_{g0}} \quad (2.25)$$

これより, $c_1 = a_1$ のとき r_{g0} が最大値となるから ω_{02} が最小値となることが分かる.

2.3 捩れ振動 mode

この振動 mode は x - y 面内で起こり, $\theta_{xg} = 0, \theta_{yg} = 0, \theta_y = 0$ とおくと, (2.1)-(2.4) 式は次式で表される:

$$\begin{cases} x_g = c_1, & y_g = 0, & z_g = r_g, & x_1 = c_1 - a_1 \cos(\epsilon\theta_z), \\ y_1 = -a_1 \sin(\epsilon\theta_z), & z_1 = r_g, \\ x_2 = c_1 + a_1 \cos(\epsilon\theta_z), & y_2 = a_1 \sin(\epsilon\theta_z), \\ z_2 = r_g, \\ f_{13} = a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1c_1 \cos(\epsilon\theta_z) + r_g^2 = 0, \\ f_{23} = a_1^2 + c_1^2 - L_1^2 - 2a_1c_1 \cos(\epsilon\theta_z) + r_g^2 = 0, \\ f_{33} = 0, & f_{43} = \tan(\epsilon\theta_z) \end{cases} \quad (2.26)$$

この振動 mode の静止平衡状態では, $\theta_z = 0, f_{13}, f_{23}$ により, $r_g = \sqrt{L_1^2 - (c_1 - a_1)^2} \equiv r_{g0}$ を得る. この系は θ_z, r_g で記述される. 攪乱状態では, θ_z を用いて, $r_g = \sqrt{L_1^2 - a_1^2 - c_1^2 + 2a_1c_1 \cos(\epsilon\theta_z)} \equiv r_{g2}$ と表現する. 捩れ振動 mode を記述する Lagrange 関数 \mathcal{L}_{13} は, 次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{13} &= \frac{J_y}{2} \epsilon^2 \left(\frac{\partial \theta_{y1}}{\partial(\epsilon\theta_z)} \dot{\theta}_z \right)^2 + \frac{J_z}{2} \epsilon^2 \dot{\theta}_z^2 + m_1 g r_{g2} \\ &= \frac{m_1}{2} \frac{a_1^2 c_1^2 \epsilon^2 \dot{\theta}_z^2 \sin^2(\epsilon\theta_z)}{r_{g2}^2} + \frac{J_z}{2} \epsilon^2 \dot{\theta}_z^2 + m_1 g r_{g2} \\ &\sim \frac{J_z}{2} \epsilon^2 \dot{\theta}_z^2 + m_1 g r_{g2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

これにより, Lagrange の運動方程式は次式となる:

$$J_z \epsilon \ddot{\theta}_z = -m_1 g a_1 c_1 \sin(\epsilon\theta_z)/r_{g2} \quad (2.28)$$

この線形化方程式は次式である:

$$J_z \ddot{\theta}_z = -m_1 g a_1 c_1 \theta_z / r_{g0} \quad (2.29)$$

この解 $\theta_z(t)$ は調和振動を表し, 固有角振動数 ω_{03} は次のように表される:

$$\omega_{03} = \sqrt{m_1 g a_1 c_1 / (J_z r_{g0})} \quad (2.30)$$

これより, $c_1 = a_1$ のとき r_{g0} が最大値となり, $a_1 c_1 \rightarrow 0$ のとき $\omega_{03} \rightarrow 0$ となることが分かる.

2.4 連成振動の条件

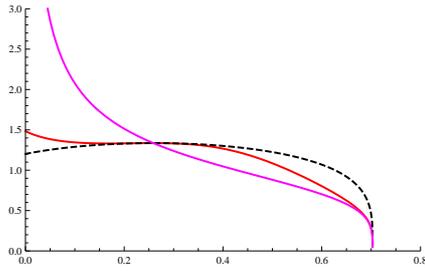
(2.20), (2.25), (2.30) 式より, $\omega_{01}^2 = \omega_{02}^2$ は整理して分母を払うと c_1 の 3 次代数方程式になり, 根 $c_1 = a_1$ (重根), $c_1 = b_1^2/(3a_1)$ を得る. (2.25), (2.30) 式より, $\omega_{02}^2 = \omega_{03}^2$ は c_1 の 1 次代数方程式になり, 根 $c_1 = b_1^2/(3a_1)$ を得る. (2.30), (2.20) 式より, $\omega_{03}^2 = \omega_{01}^2$ は c_1 の 1 次代数方程式になり, 根 $c_1 = b_1^2/(3a_1)$ を得る. 換言すると, $c_1 = a_1$ (並進 2 点吊り振子) の場合には mode 1, 2 の固有角振動数が一致し, $c_1 = b_1^2/(3a_1)$ の場合に 3 つの mode の固有角振動数が一致する. さらに, 有理数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を用いて, 次の方程式を作り, c_1 あるいは b_1 の代数方程式として解くことができる:

$$\omega_{01}^2 = \alpha_1^2 \omega_{02}^2, \quad \omega_{02}^2 = \alpha_2^2 \omega_{03}^2, \quad \omega_{03}^2 = \alpha_3^2 \omega_{01}^2 \quad (2.31)$$

これにより, α_1 等の値を変えて高調波/分数調波の発生を調べることができる.

3 個別振動解析による実験結果の分析

様々な実験条件下で生じる特徴的な振動周期の例を Fig.4 に示す. また, $\{L_1, c_1, a_1, b_1, \frac{b_1^2}{3a_1}\}$ の値を伴い, 周期 (縦軸) と c_1 (横軸) の関係の特徴的な例を Fig.5a-5j に示す.



mode 1 (red), 2 (black, dashed) and 3 (magenta).

Fig.4 Period T_0 versus c_1 with $L_1 = 0.443$, $a_1 = 0.26$, $b_1 = 0.4495$, $b_1^2/(3a_1) = 0.259039$. The curves are for

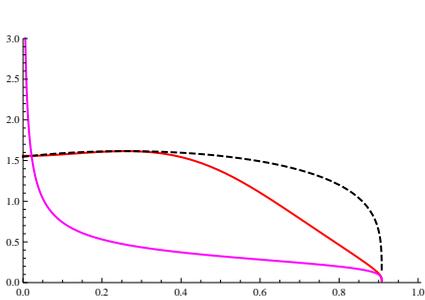


Fig.5a {0.648,0.2375,0.26,0.26,0.0866667}.

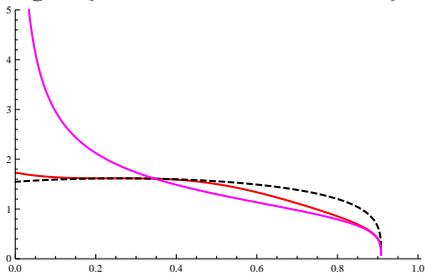


Fig.5b {0.648,0.2375,0.26,1.04,1.38667}.

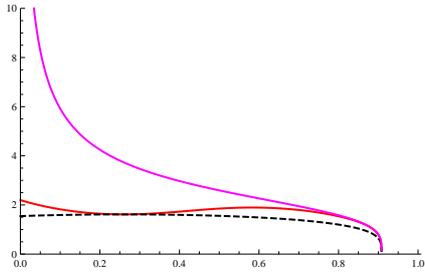


Fig.5c {0.648,0.2375,0.26,1.3,2.16667}.

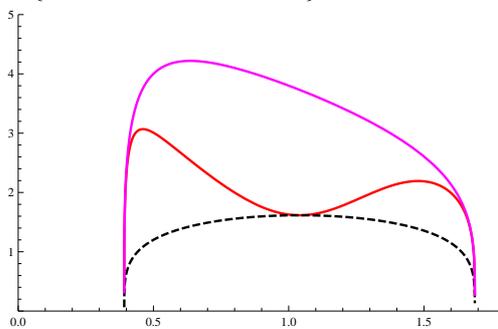


Fig.5j {0.648,0.2375,1.04,4.16,5.54667}.

Fig.5 では、図の書式と線種は **Fig.4** と同様である。**Fig.5a** の mode 1 (赤色) と mode 2 (黒色破線) は、先の実験値 (**Fig.4**) に比べ、棒が短くなったため慣性 moment が

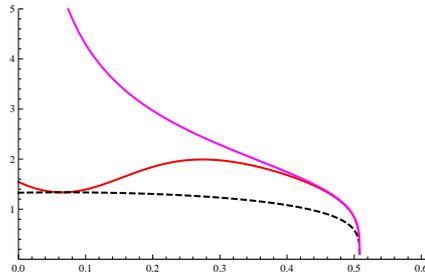


Fig.5d {0.443,0.2375,0.065,0.4495,1.0362}.

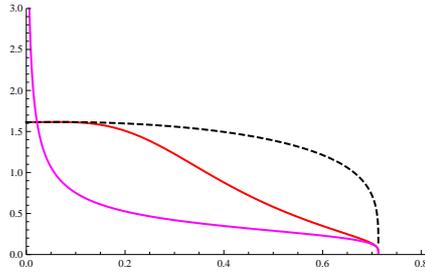


Fig.5e {0.648,0.2375,0.065,0.065,0.02167}.

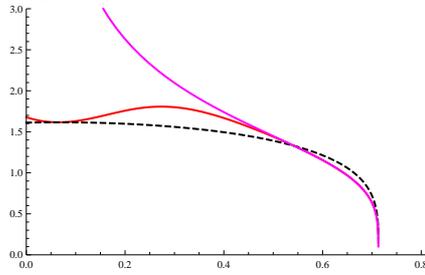


Fig.5f {0.648,0.2375,0.065,0.325,0.54167}.

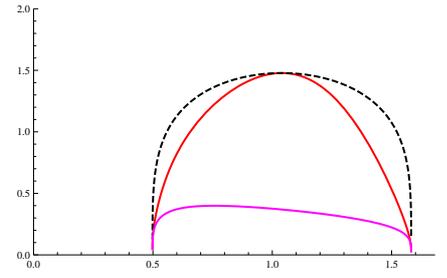


Fig.5g {0.542,0.2375,1.04,0.4495,0.06476}.

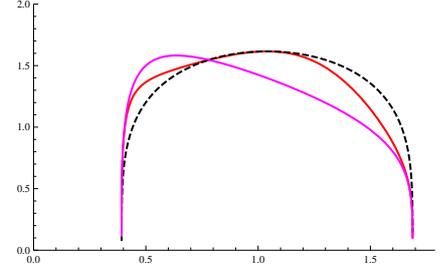


Fig.5h {0.648,0.2375,1.04,1.56,0.78}.

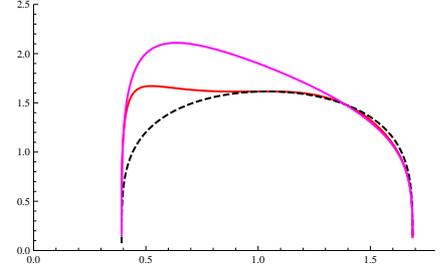


Fig.5i {0.648,0.2375,1.04,2.08,1.38667}.

小さくなり、周期の値の差が大きくなっている。従って、mode 1 の周期の倍が mode 2 の周期となる c_1 の配置がある。また、mode 3 (赤紫色) の周期は、 c_1 に対する変化率が大きく、ほかの周期の $1/2$, $1/3$ となる c_1 の配置がある。このような視点で、**Fig.5b-5j** の振動の特性を分析できる。各 mode の振動周期が 2 点吊り振子の設定条件により大きく変化することに注目されたい。特に、**Fig.5g-5j** は、実験装置に基づく値とは異なり、当初の想定とも異なる結果である。以上の図中で、曲線の交点は共振点にあたるが、線形振動では互いに独立であるので、交点の近傍で弱非線形の連成振動が起こるものと思われる。また、各 mode の周期の倍数あるいは分数の曲線で交点

生じ得る．それらも，非線形連成振動の候補である．

以上，線形的に独立な複数の振動 mode の系について，弱非線形または非線形連成振動の発生可能性を調べた．

4 おわりに

本研究は，文献^[1]に刺激されて始まっているが，3つの振動 mode があり，質量や慣性 moment の振子運動への影響に注目し教材として整備する計画で進めて来た．本報告では，当初は個々に記述した2点吊り振子の3つの振動 mode 表現について，球座標系を用いた統一的表現に改め，非線形連成振動等の解析に向けて準備した．先の線形振動で得られた分散関係式と関連する表式は，いずれも新たな表現と一致することが確認された．これに基づき，非線形連成振動等を扱うことになる．本報告の§3の結果を基に，主共振，高調波/分数調波の連成振動等について当面は数値解析並びに多重尺度法による解析等に取り組む予定である．

棒材による2点吊り振子では3つの mode の共存点 (Fig.2) が見られ，免震効果を検討する上で mode 間相互作用の検討が必要なることを示している．床材等による多点吊り振子の場合に対しても，mode 間の振動解析の検討を要するものと思われる．本報告に続く「新表現の非線形連成振動系の解析」は続報^{[8],[9]}で行われ，従来の記述に従って非線形振動を扱った報告^{[10]-[12]}，2点吊り物理振子の解析と実験^{[13],[14]}にも関連するので，それらの報告も参照されたい．なお，紐の伸縮を考慮した力学 model は別途に報告する．

本報告の一部は，先に第60回理論応用力学講演会^[7]並びに日本機械学会2011年度年次大会^[15]において講演したことを付記する．

参考文献

- [1] 川口 衛, 立道 郁生: “21318 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その1 原理と免震床の実大実験” 学術講演梗概集. B-2, 構造 II, 振動, 原子力プラント2000 (2000), pp.635-636(社団法人日本建築学会).
- [2] 望月 孔二, 宮内 太積, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 川船 雄一郎, 川上 誠, 中道 義之: “2点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告 第44号 (2010), pp.55-60.
- [3] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 中道 義之: “2点吊り振子の捩り振動の基礎解析” 沼津高専研究報告 第44号 (2010), pp.83-88.
- [4] 望月 孔二, 鈴木 秀, 舟田 敏雄, 岩本 大, 宮内 太積, 大庭 勝久, 川上 誠, 中道 義之: “2点吊り振子の3

つの線形振動 mode の実験と解析” 沼津高専研究報告 第45号 (2011), pp.163-168.

- [5] 鈴木 秀, 舟田 敏雄, 金子 裕哉, 宮内 太積, 福田 克也: “2点吊り振子と剛体振子の振動実験と解析” 日本機械学会東海支部 東海学生会 第42回学生員卒業研究発表講演会, 2011年3月13日(日) 豊橋技術科学大学, 第9室 10:50~12:14 機械力学・計測・制御 講演番号 909, 講演前刷集 (日本機械学会東海学生会平成23年3月1日発行) CD/ROM, pp.268-269.
- [6] 宮内 太積, 福田 克也, 鈴木 秀, 金子 裕哉, 舟田 敏雄: “2点吊り振子の非線形内部共振の解析” 日本機械学会東海支部東海支部第60期総会・講演会 (支部60周年記念行事) 豊橋技術科学大学, 第8室 (A207教室) 3月14日(月) OS5 振動解析と制振 OS5-2 非線形振動 10:45~12:00 講演番号 811 東海支部第60期総会講演会講演論文集 No. 113-1 (日本機械学会東海支部2011年3月1日発行), pp.403-404.
- [7] 舟田 敏雄, 鈴木 秀, 金子 裕哉, ピン モハマドイドロス ムハマドイザト, 大庭 勝久, 中道 義之, 青木 悠祐, 宮内 太積, 望月 孔二, 川上 誠: “2点吊り振子の mode 間相互作用と内部共振の数値解析” 第60回理論応用力学講演会 3月9日(水) 第4室 9:30-9:45 OS12-4 機械系及び構造物系の振動制御 講演番号 OS12-10, 講演論文集 OS12-10.pdf
- [8] 舟田 敏雄, 木ノ内 智貴, 桜井 賢人, 大庭 勝久, 青木 悠祐, 宮内 太積, 望月 孔二: “2点吊り振子の3つの mode 間相互作用の解析 (2)” 沼津高専研究報告 第46号 (2012), in press.
- [9] 舟田 敏雄, 木ノ内 智貴, 桜井 賢人, 大庭 勝久, 青木 悠祐, 宮内 太積, 望月 孔二: “2点吊り振子の3つの mode 間相互作用の解析 (3)” 沼津高専研究報告 第46号 (2012), in press.
- [10] 舟田 敏雄, 鈴木 秀, 金子 裕哉, 木ノ内 智貴, 桜井 賢人, 大庭 勝久, 青木 悠祐, 宮内 太積, 望月 孔二, 川上 誠: “2点吊り振子の mode 間相互作用と外力と外部励振による内部共振の数値解析” 沼津高専研究報告 第46号 (2012), in press.
- [11] 舟田 敏雄, 木ノ内 智貴, 桜井 賢人, 大庭 勝久, 青木 悠祐, 宮内 太積, 望月 孔二: “2点吊り振子の mode 間相互作用と外力と外部励振による内部共振の数値解析 (2)” 沼津高専研究報告 第46号 (2012), in press.
- [12] 舟田 敏雄, 木ノ内 智貴, 桜井 賢人, 大庭 勝久, 青木 悠祐, 宮内 太積, 望月 孔二: “2点吊り振子の mode 間相互作用と外力と外部励振による内部共振の数値

- 解析 (3)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.
- [13] 桜井賢人, 舟田敏雄, 木ノ内智貴, 大庭勝久, 鈴木智大, 望月孔二, 土屋吉紀, 青木悠祐, 宮内太積, 遠藤誉人: “2 点吊り物理振子の振動解析と実験 (1)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.
- [14] 桜井賢人, 舟田敏雄, 木ノ内智貴, 大庭勝久, 鈴木智大, 望月孔二, 土屋吉紀, 青木悠祐, 宮内太積, 遠藤誉人: “2 点吊り物理振子の振動解析と実験 (2)” 沼津高専研究報告 第 46 号 (2012), in press.
- [15] 舟田敏雄, 宮内太積, 大庭勝久, 中道義之, 青

木悠祐, 出川智啓, 望月孔二: “2 点吊り振子の連成振動と内部共振の数値解析” 日本機械学会 2011 年度年次大会 『機械工学が牽引するイノベーション』, 2011 年 9 月 11 日 (日)~15 日 (木), 東京工業大学 大岡山キャンパス, [OS] G100 機械力学・計測制御部門 一般セッションセッション, 9 月 13 日 (火) 9:00-10:00 会場: W242, 講演番号 G100033. 日本機械学会 2011 年度年次大会 講演論文集 DVDROM G100033.pdf.