

2 点吊り振子と小振子の連成運動の基礎解析

宮内 太積^{*1*2} 望月 孔二^{*2*3} 舟田 敏雄^{*2*4} 佐々木 隆吾^{*4} 川船 雄一郎^{*4}
 マズニ アルイルファン^{*4} 川上 誠^{*2*4} 中道 義之^{*2*5}

Fundamental Dynamic Analysis of a Bifilar Suspension Pendulum with Small Pendulums

Tatsumi MIYAUCHI^{*1*2} Kouji MOCHIZUKI^{*2*3} Toshio FUNADA^{*2*4} Ryugo SASAKI^{*4}
 Yuichirou KAWAFUNE^{*4} Mazni Al IRFAN^{*4} Makoto KAWAKAMI^{*2*4} and Yoshiyuki NAKAMICHI^{*2*5}

Abstract: A uniform density bar is suspended at its two ends by two strings whose two end points are attached to an upper static wall. The bar may swing or make torsional oscillation in a vertical plane from its equilibrium rest state, which is called bifilar suspension pendulum. When the distance between the two points on the wall is longer or shorter than the bar length, the bar attitude may change during swinging of the bar. When it is just the same, the bar swings with keeping the attitude horizontal. These features are important in the design of seismic mitigation. When small pendulums are attached to the bar, those may work to suppress the oscillation of the whole system. This idea is examined in the present paper using a linear theory. It is found that other oscillation modes can be found due to small pendulums, and the response may be suppressed.

Keywords: Bifilar Suspension Pendulum, Seismic Mitigation, Linear Free Oscillations, Tuning by Small Pendulums

1 はじめに

本研究は、2 点吊り振子^{[1]–[7]}の円木と小振子の線形連成自由振動の mode 解析を行い、固有角振動数を求め、振動特性を解明することを目的としている。小振子が 1 つの場合、系の運動の自由度は 2 であり、小振子が 2 つの場合には系の運動の自由度は 3 となる。また、運動方程式の初期値問題を数値解析する。線形連成自由振動問題は固有角振動数の固有値問題であるから解は解析的にも求められるが、引き続いて多数の小振子の連成非線形振動問題を数値解析するので、数値計算アルゴリズムの検討も兼ねる。

本報告では、前報^{[8]–[12]}の円木と物体の線形振動の解析に続き、円木の下側に小振子を取り付けた場合の線形連成振動を解析する。2 節では、小振子が 1 つの場合と 2 つの場合の力学問題を定式化し、線形化運動方程式の mode 解析を行う。これらの系の強制振動系への拡張並びに制振問題の定点理論による解析は続報で検討される。

2 円木と小振子の連成運動

Fig1(a), (b) の 2 点吊り振子の円木と小振子の静止平衡状態周りの運動の特徴を示し、**Fig1(a)** の系の運動を解析する。壁面に沿って水平方向に x 軸、鉛直下方を z 軸とするデカルト座標系 (x, y, z) を取り、2 点吊り振子の支持点 C_1 の位置を (x_0, z_0) と表す。 C_2 の位置は $(x_0 + 2c, z_0)$ である。各支持点から長さ L_1, L_2 の糸を円木の端点 A, B に結

びつけ、長さ $2a$ の一様密度の円木を吊り下げる。但し、円木の重心から左右に長さ a の位置を点 A, B とし、そこに糸を結びつけると考えても良い。円木の重心から距離 a_{p1} の位置に長さ L_{p1} の糸を取り付け、糸の他端に質量 m_{p1} の質点(錘)を取り付ける。この小振子と円木は $y = 0$ の鉛直面内で静止平衡状態にあり、その周りで振子運動する。

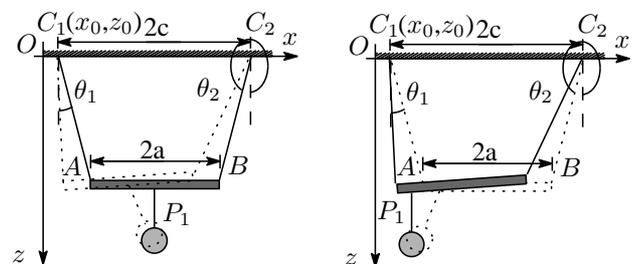


Fig.1 Bifilar suspension pendulum of $c > a$ with a small pendulum. (a) Symmetric configuration and (b) asymmetric configuration.

先の解析^[12]に因ると、対称 2 点吊り振子(糸の長さが等しく $L_2 = L_1$ で一様密度の円木の場合)では、線密度 ρ の一様な円木の質量は $m_1 = 2a\rho$ で重心 (x_G, z_G) は中央にあり、重心回りの慣性 moment は $J = 2a^3\rho/3 = m_1 a^2/3$ である。対称 2 点吊り振子の静止平衡状態を表す parameter は次に示される:

$$\begin{cases} \sin(\alpha) = \frac{c-a}{L_1}, & \beta = \frac{c}{a}, & \frac{L_1}{a} = 1, \\ h = L_1 \cos(\alpha) \end{cases} \quad (2.1)$$

円木の運動は 1 自由度であり、静止平衡状態の周りの角度攪乱 θ_{11} で記述できる。並進振子の場合 ($a = c, \beta = 1$) には、運動中に円木は姿勢を変えない。 $a \neq c$ のとき、円木は重心の並進運動に伴い重心回りに回転する。水平面が

^{*1} 機械工学科: Department of Mechanical Engineering.
^{*2} 専攻科: Advanced Engineering Course.
^{*3} 電気電子工学科: Department of Electrical & Electronics Engineering.
^{*4} 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
^{*5} 総合情報センター: Information Technology Center.

ら測った重心回りの回転角を φ と表すと、 $\beta > 1$ のとき θ_{11} と φ とは逆位相であり、 $\beta < 1$ のときには θ_{11} と φ とは同位相となる。円木の重心位置 (x_G, z_G) から水平距離 a_{p1} の位置に取り付けた小振り子により、系全体の静止平衡状態は、 $a_{p1} = 0$ の場合は左右対称な配置 (Fig1(a)) となり、 $a_{p1} \neq 0$ の場合には非対称な配置 (Fig1(b)) となる。円木から吊り下げられた小振り子の運動 (Fig1) は 2 自由度であり、鉛直軸から測った系の傾き角度 θ_{p1} と θ_{11} で記述される。それ故、固有角振動数は 2 つあり、初期値問題の解では θ_{p1} と θ_{11} の同位相と逆位相の振動が起こり得る。

Fig.2 (a) の 2 つの小振り子の系では、長さ $2a$ で質量 m_1 の一様な円木の重心位置 (x_G, z_G) から、左側に距離 a_{p1} の位置に長さ L_{p1} の糸を取り付け、糸の他端に質量 m_{p1} の質点を結びつける。また、右側に距離 a_{p2} の位置に長さ L_{p2} の糸を取り付け、糸の他端に質量 m_{p2} の質点を結びつける。この場合の運動の自由度は 3 で、 $\theta_{11}, \theta_{p1}, \theta_{p2}$ で表される。静止平衡状態での円木と 2 つの小振り子の力と力の moment の釣合が対称な配置が実現される条件を与える。

円木の上に質量 m_2 で重心回りの慣性 moment J_2 の物体を置いた場合が Fig.2 (b) に示される。このとき、円木の重心から物体重心までの高さは h_g である。

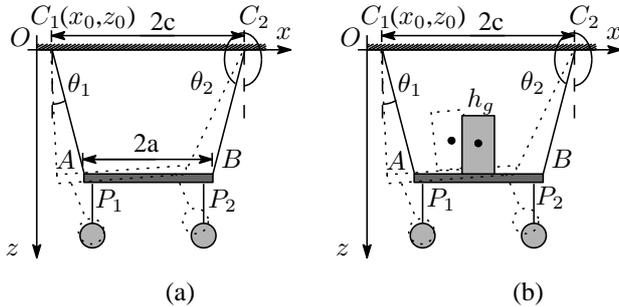


Fig.2 Bifilar suspension pendulum of $c > a$. (a) with two small pendulums, and (b) with a body of the height of its center of mass h_g and two small pendulums.

Fig.1, Fig.2 の円木の端点 A, B, 重心 (x_G, z_G) , 円木の長さ $(\theta_1$ と θ_2 の関係式), 重心回りの回転角 φ ($\varphi \equiv \varphi(\theta_1, \theta_2)$) は、次のように表される:

$$\begin{cases} x_A = x_0 + L_1 \sin(\theta_1), & z_A = z_0 + L_1 \cos(\theta_1), \\ x_B = x_0 + 2c + L_2 \sin(\theta_2), \\ z_B = z_0 + L_2 \cos(\theta_2), \\ x_G = (x_A + x_B)/2, & z_G = (z_A + z_B)/2, \\ 2a = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2}, \\ \tan(\varphi) = -\frac{z_B - z_A}{x_B - x_A} \end{cases} \quad (2.2)$$

第 5 行目の方程式は、 θ_1 と θ_2 の関係を与える関数方程式である。第 6 行目左辺の φ は、右辺の θ_1 と θ_2 の関数である。物体の重心 (x_{G2}, z_{G2}) は次のように表わされる:

$$\begin{cases} x_{G2} = x_G - h_g \sin(\varphi), \\ z_{G2} = z_G - h_g \cos(\varphi) \end{cases} \quad (2.3)$$

小振り子 P_1 (Fig.1, Fig.2) と小振り子 P_2 (Fig.2) の錘の座標は次のように表される:

$$\begin{cases} x_{p1} = x_G - a_{p1} \cos(\varphi) + L_{p1} \sin(\theta_{p1}), \\ z_{p1} = z_G + a_{p1} \sin(\varphi) + L_{p1} \cos(\theta_{p1}), \\ x_{p2} = x_G + a_{p2} \cos(\varphi) + L_{p2} \sin(\theta_{p2}), \\ z_{p2} = z_G - a_{p2} \sin(\varphi) + L_{p2} \cos(\theta_{p2}) \end{cases} \quad (2.4)$$

Fig.1 の系の静止平衡状態における力と力の moment の釣合は、次のように表される:

$$\begin{cases} -S_1 \sin(\theta_1) + S_2 \sin(2\pi - \theta_2) = 0, \\ S_1 \cos(\theta_1) + S_2 \cos(2\pi - \theta_2) = (m_1 + m_{p1})g, \\ 2cS_2 \cos(2\pi - \theta_2) = (c - a_{p1})m_{p1}g + cm_1g, \\ (c + a_{p1})m_{p1}g + cm_1g + 2cS_1 \cos(\theta_1) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

ここで、左右対称な配置の静止平衡解 $\theta_1 = \alpha = 2\pi - \theta_2$ が成り立つならば、(2.5) 式中の第 1 式から $S_1 = S_2$ を得る。第 2 式は $2S_1 \cos(\alpha) = m_1g + m_{p1}g$ となり、第 3, 4 式より $a_{p1}m_{p1}g = 0$ を得る。つまり、 $a_{p1} = 0$ の場合には、Fig.1(a) の左右対称の配置が成り立つ。同様にして、Fig.2 (a) の静止平衡状態の力と力の moment の釣合により $m_{p1}ga_{p1} - m_{p2}ga_{p2} = 0$ が必要であり、 $m_{p1} = m_{p2}$, $a_{p1} = a_{p2}$ ならば Fig.2 (a) の左右対称の配置が成り立つことが導かれる。糸の長さ L_{p1} と L_{p2} は静止平衡状態の記述には関与しない。これらの点に留意して、以下では Fig.2 (a) の系の運動方程式を解き、その特別な場合として Fig.1(a) の系の運動を扱う。

静止平衡状態の解 $\theta_1 = \alpha = 2\pi - \theta_2$, $\theta_{p1} = \theta_{p2} = 0$ に角度攪乱を加えて、 $\theta_1 = \alpha + \theta_{11}$, $\theta_2 = 2\pi - \alpha + \theta_{21}$, $\theta_{p1} = 0 + \theta_{p1}$, $\theta_{p2} = 0 + \theta_{p2}$ と表し、攪乱が小さいと仮定して (2.2)-(2.4) 式を静止平衡解の周りで Taylor 展開する。x 方向には攪乱の 1 次まで取り、z 方向には攪乱の 2 次まで取る。そして、攪乱の 1 次まで取って運動・回転 energy を評価し、攪乱の 2 次まで取って重力 potential energy を評価する。これらを考慮して、(2.2)-(2.4) 式の座標値は次のように表される:

$$\begin{cases} x_G = x_0 + a\beta + h\theta_{11}, \\ z_G = z_0 + h - \frac{1}{2}(h - a\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2, \\ x_{G2} = x_0 + a\beta + (h + h_g\beta_1)\theta_{11}, \\ z_{G2} = z_0 + h - h_g - \frac{1}{2}(h - a\theta_{222}\beta_1 - h_g\beta_1^2)\theta_{11}^2, \\ x_{p1} = x_0 + a\beta - a_{p1} + h\theta_{11} + L_{p1}\theta_{p1}, \\ z_{p1} = z_0 + h + L_{p1} - a_{p1}\beta_1\theta_{11}, \\ \quad -\frac{1}{2}(h - (a + a_{p1})\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2 - \frac{1}{2}L_{p1}\theta_{p1}^2, \\ x_{p2} = x_0 + a\beta + a_{p2} + h\theta_{11} + L_{p2}\theta_{p2}, \\ z_{p2} = z_0 + h + L_{p2} + a_{p2}\beta_1\theta_{11} \\ \quad -\frac{1}{2}(h - (a - a_{p2})\theta_{222}\beta_1)\theta_{11}^2 - \frac{1}{2}L_{p2}\theta_{p2}^2, \\ \varphi_L = -\beta_1\theta_{11} \end{cases} \quad (2.6)$$

但し、 $\beta_1 = \beta - 1$ とおいた。

Fig.2 (a) の系は $\theta_{11}, \theta_{p1}, \theta_{p2}$ で記述され, その線形振動を記述する Lagrange 関数 \mathcal{L} は次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{m_1}{2} \dot{x}_G^2 + \frac{J}{2} \dot{\phi}_1^2 + m_1 g z_G + \frac{m_{p1}}{2} (\dot{x}_{p1}^2 + \dot{z}_{p1}^2) \\ & + m_{p1} g z_{p1} + \frac{m_{p2}}{2} (\dot{x}_{p2}^2 + \dot{z}_{p2}^2) + m_{p2} g z_{p2} \\ = & \frac{J}{2} \beta_1^2 \dot{\theta}_{11}^2 + \frac{m_1}{2} [\dot{x}_0 + h \dot{\theta}_{11}]^2 \\ & + \frac{m_{p1}}{2} \left[(\dot{x}_0 + h \dot{\theta}_{11} + L_{p1} \dot{\theta}_{p1})^2 + (\dot{z}_0 + a_{p1} \beta_1 \dot{\theta}_{11})^2 \right] \\ & + \frac{m_{p2}}{2} \left[(\dot{x}_0 + h \dot{\theta}_{11} + L_{p2} \dot{\theta}_{p2})^2 + (\dot{z}_0 - a_{p2} \beta_1 \dot{\theta}_{11})^2 \right] \\ & + m_1 g \left(z_0 + h + (-h + a \theta_{222} \beta_1) \frac{\theta_{11}^2}{2} \right) \\ & + m_{p1} g \left[z_0 + h + L_{p1} + a_{p1} \beta_1 \theta_{11} \right. \\ & \left. - (h - (a + a_{p1}) \theta_{222} \beta_1) \frac{\theta_{11}^2}{2} - L_{p1} \frac{\theta_{p1}^2}{2} \right] \\ & + m_{p2} g \left[z_0 + h + L_{p2} - a_{p2} \beta_1 \theta_{11} \right. \\ & \left. - (h - (a - a_{p2}) \theta_{222} \beta_1) \frac{\theta_{11}^2}{2} - L_{p2} \frac{\theta_{p2}^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

これにより, (x_0, z_0) が定数の場合の Lagrange の運動方程式は, 次のように表される:

$$\begin{cases} a_{000} + a_{110} \theta_{11} + a_{111} \ddot{\theta}_{11} \\ + a_{121} \ddot{\theta}_{p1} + a_{131} \ddot{\theta}_{p2} = 0, \\ a_{211} \ddot{\theta}_{11} + a_{220} \theta_{p1} + a_{221} \ddot{\theta}_{p1} = 0, \\ a_{311} \ddot{\theta}_{11} + a_{330} \theta_{p2} + a_{331} \ddot{\theta}_{p2} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

ここで, 全質量 M と係数 $a_{000}-a_{331}$ は次式で与えられる:

$$\begin{cases} M = m_1 + m_{p1} + m_{p2}, \\ a_{000} = -g(m_{p1} a_{p1} - m_{p2} a_{p2}) \beta_1, \\ a_{110} = g [Mh - (m_{p1} a_{p1} - m_{p2} a_{p2} + Ma) \theta_{222} \beta_1], \\ a_{111} = (J + m_{p1} a_{p1}^2 + m_{p2} a_{p2}^2) \beta_1^2 + Mh^2, \\ a_{121} = m_{p1} h L_{p1}, \quad a_{131} = m_{p2} h L_{p2}, \\ a_{211} = m_{p1} h L_{p1}, \\ a_{220} = m_{p1} g L_{p1}, \quad a_{221} = m_{p1} L_{p1}^2, \\ a_{311} = m_{p2} h L_{p2}, \\ a_{330} = m_{p2} g L_{p2}, \quad a_{331} = m_{p2} L_{p2}^2 \end{cases} \quad (2.9)$$

また, 先の (2.1) 式の設定により $L_2 = L_1 = a = 1$ と取ると, β ($0 < \beta < 2$) の変化に対して, θ_{222} は次のように表される:^[12]

$$\theta_{222} = \frac{(1 - \beta) \sqrt{\beta}}{\sqrt{2 - \beta}} \quad (2.10)$$

(2.8) 式は定数係数の線形同次連立微分方程式であり, 解は $\exp(i\omega t)$ (ω は一般には複素定数) と表現できる. これを (2.8) 式に代入して整理すると同次連立線形代数方程式を得るから, 可解条件は ω^2 の 3 次の代数方程式となる:

$$\begin{vmatrix} a_{110} - a_{111} \omega^2 & -a_{121} \omega^2 & -a_{131} \omega^2 \\ -a_{211} \omega^2 & a_{220} - a_{221} \omega^2 & 0 \\ -a_{311} \omega^2 & 0 & a_{330} - a_{331} \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

なお, 円木と 1 つの小振子 (Fig.1(a)) の 2 自由度系の場合には $a_{131} = a_{311} = a_{330} = a_{331} = 0$ となり, (2.11) 式から 2 次の正方行列の行列式を得るので, 可解条件は ω^2 の 2 次の代数方程式となる:

$$(a_{110} - a_{111} \omega^2) (a_{220} - a_{221} \omega^2) - a_{211} a_{121} \omega^4 = 0 \quad (2.12)$$

(2.12) 式を解いて, 4 つの根を $\pm\omega_1, \pm\omega_2$ と表す.

Fig.1(a) の系の規定値を $m_1 = 1, a_{p1} = 0, L_{p1} = 1$ と設定し, 3 つの m_{p1} の場合 ($m_{p1} = 0.2, 1, 2$) について, β の値を変化させたときの固有角振動数を Fig.3 に示す. $m_{p1} = 1$ (Fig.3a) では, 2 つの固有角振動数 $\omega_1 < 1$ と $\omega_2 \geq 1$ があることが分かる. $m_{p1} = 0.2$ (Fig.3b) では, 2 つの固有角振動数の値が近づく. $m_{p1} \rightarrow 0$ では, 円木の場合の固有角振動数となる. 逆に, $m_{p1} = 2$ (Fig.3c) では, 2 つの固有角振動数の差が大きくなる.

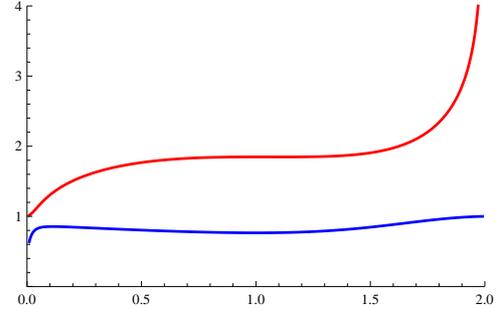


Fig.3a Natural angular frequency ω versus β , for $m_{p1} = 1$.

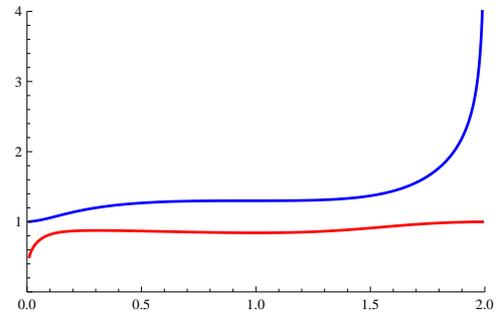


Fig.3b Natural angular frequency ω versus β , for $m_{p1} = 0.2$.

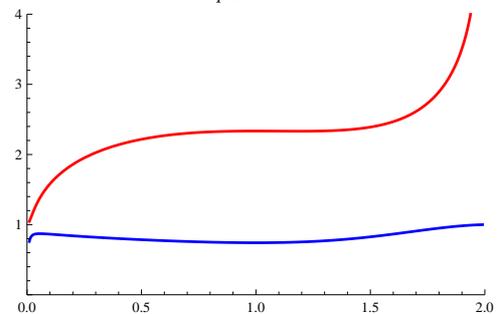


Fig.3c Natural angular frequency ω versus β , for $m_{p1} = 2$.

Fig.2 の 3 自由度の系の規定値を $m_1 = 1, m_{p1} = m_{p2} = 1, a_{p1} = a_{p2}, L_{p1} = L_{p2} = 1$ と設定して, (2.11) 式を解いて, 4 つの場合 ($a_{p1} = 1, 2, 5, 0.5$) について β の値を変化させたときの固有角振動数を Fig.4 に示す. 小振子の数が増えたので, 運動の自由度は 3 となり, 固有角振動数が $\omega = 1$ で β に依らない mode が出現する.

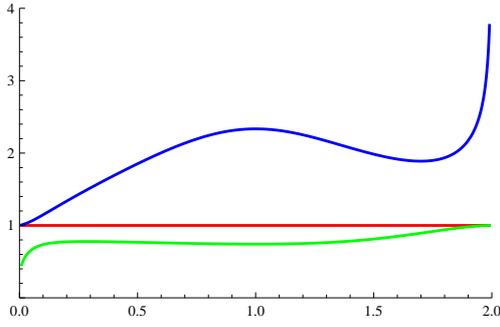


Fig.4a Natural angular frequency ω versus β , for $a_{p1} = 1$.

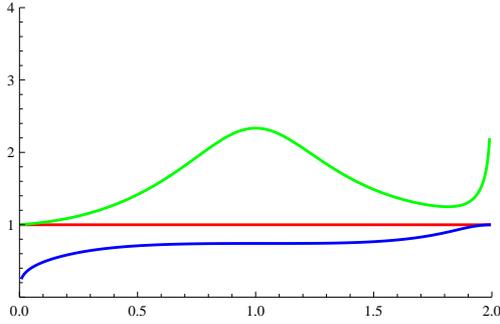


Fig.4b Natural angular frequency ω versus β , for $a_{p1} = 2$.

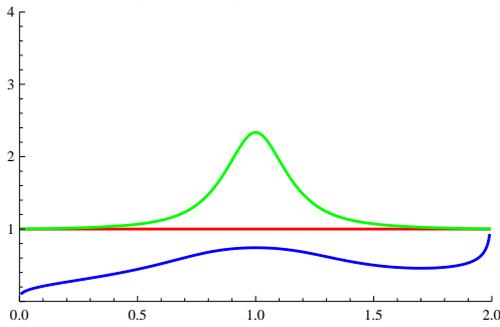


Fig.4c Natural angular frequency ω versus β , for $a_{p1} = 5$.

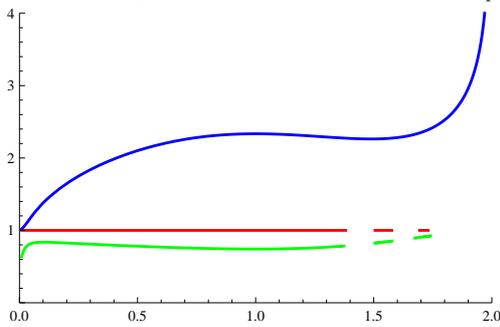


Fig.4d Natural angular frequency ω versus β , for $a_{p1} = 0.5$.

3 壁面からの励振

壁面が時間的に振動し、2点吊り振子と小振子を励振する場合には、支持点の位置 (x_0, z_0) の変化による項が (2.8) 式の右辺に $-b_{i,1}\ddot{x}_0 - b_{i,2}\ddot{z}_0$ ($i = 1, 2, 3$) と現れる。その係数 b_{ij} は次式で定義される:

$$\begin{cases} b_{11} = Mh, \\ b_{12} = -(m_{p1}a_{p1} - m_{p2}a_{p2})\beta_1, \\ b_{21} = m_{p1}L_{p1}, \quad b_{22} = 0, \\ b_{31} = m_{p2}L_{p2}, \quad b_{32} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

但し、静止平衡状態での釣合により $b_{12} = 0$ であるから、鉛直変位 z_0 の励振は線形振動問題には含まれない。

壁面からの励振の項 $-b_{i,1}\ddot{x}_0$ ($x_0 = X_0 \exp(i\omega t) + c.c.$) を (2.8) 式の右辺に加えると $\theta_{11}, \theta_{p1}, \theta_{p2}$ に対する非同次の線形代数方程式形となるから、解 $\theta_{11}, \theta_{p1}, \theta_{p2}$ は次のように表される:

$$\theta_{11} = \frac{\omega^2 x_0}{D_3} \begin{vmatrix} b_{11} & -a_{121}\omega^2 & -a_{131}\omega^2 \\ b_{21} & a_{220} - a_{221}\omega^2 & 0 \\ b_{31} & 0 & a_{330} - a_{331}\omega^2 \end{vmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\theta_{p1} = \frac{\omega^2 x_0}{D_3} \begin{vmatrix} a_{110} - a_{111}\omega^2 & b_{11} & -a_{131}\omega^2 \\ -a_{211}\omega^2 & b_{21} & 0 \\ -a_{311}\omega^2 & b_{31} & a_{330} - a_{331}\omega^2 \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\theta_{p12} = \frac{\omega^2 x_0}{D_3} \begin{vmatrix} a_{110} - a_{111}\omega^2 & -a_{121}\omega^2 & b_{11} \\ -a_{211}\omega^2 & a_{220} - a_{221}\omega^2 & b_{21} \\ -a_{311}\omega^2 & 0 & b_{31} \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

但し、 D_3 は次式で与えられる:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{110} - a_{111}\omega^2 & -a_{121}\omega^2 & -a_{131}\omega^2 \\ -a_{211}\omega^2 & a_{220} - a_{221}\omega^2 & 0 \\ -a_{311}\omega^2 & 0 & a_{330} - a_{331}\omega^2 \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

これらを無次元表示するために、次の無次元 parameter を導入する:

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{m_{p1}}{m_2}, \quad \mu_2 = \frac{m_{p2}}{m_2}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L_1}, \\ p_1 = \sqrt{\frac{L_{p1}}{L_1}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{L_{p2}}{L_1}}, \\ q_1 = \frac{a_{p1}}{L_1}, \quad q_2 = \frac{a_{p2}}{L_1} \end{cases} \quad (3.6)$$

円木・物体と小振子の場合の応答関数は、 $s = i\omega$ とおいて、 $\theta_{11}/x_0 = -\omega^2 f_{x01}/f_{x00}$, $\theta_{p1}/x_0 = -\omega^2 f_{x02}/f_{x00}$ と表され、 $f_{x00}, f_{x01}, f_{x02}$ は次式で定義される:

$$\begin{cases} f_{x00} = p_1^2 \mu_1 (h - \theta_{222}\beta_1 - h_g \beta_1^2 + h\mu_1 \\ \quad - \theta_{222}\beta_1 \mu_1 + \theta_{222}\beta_1 q_1 \mu_1) \\ \quad + s^2 p_1^2 \mu_1 (h^2 + 2hh_g \beta_1 + h_g^2 \beta_1^2 + J_2 \beta_1^2 + hp_1^2 \\ \quad - \theta_{222}\beta_1 p_1^2 - h_g \beta_1^2 p_1^2 + h^2 \mu_1 + hp_1^2 \mu_1) \\ \quad - \theta_{222}\beta_1 p_1^2 \mu_1 + \theta_{222}\beta_1 p_1^2 q_1 \mu_1 + \beta_1^2 q_1^2 \mu_1) \\ \quad + s^4 p_1^2 \mu_1 (h^2 p_1^2 + 2hh_g \beta_1 p_1^2 + h_g^2 \beta_1^2 p_1^2 \\ \quad + J_2 \beta_1^2 p_1^2 + \beta_1^2 p_1^2 q_1^2 \mu_1) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} f_{x01} = s^4 (h + h_g \beta_1) p_1^4 \mu_1 + s^2 p_1^2 \mu_1 (h + h_g \beta_1 \\ \quad + h\mu_1) \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} f_{x02} = s^2 p_1^2 \mu_1 (h - \theta_{222}\beta_1 - h_g \beta_1^2 + h\mu_1 \\ \quad - \theta_{222}\beta_1 \mu_1 + \theta_{222}\beta_1 q_1 \mu_1) \\ \quad + s^4 p_1^2 \mu_1 (hh_g \beta_1 + h_g^2 \beta_1^2 + J_2 \beta_1^2 + \beta_1^2 q_1^2 \mu_1) \end{cases} \quad (3.9)$$

$f_{x00} = 0$ を与える ω は固有角振動数であり、このとき系は共振する。

次に、円木・物体と2つの小振子の場合の応答関数は、 $\theta_{11}/x_0 = -\omega^2 f_{x01}/f_{x00}$, $\theta_{p1}/x_0 = -\omega^2 f_{x02}/f_{x00}$,

$\theta_{p2}/x_0 = -\omega^2 f_{x03}/f_{x00}$ と表され, $f_{x00}, f_{x01}, f_{x02}, f_{x03}$ は次式で定義される:

$$\left\{ \begin{aligned} f_{x00} = & p_1^2 p_2^2 \mu_1 \mu_2 (h - \theta_{222} \beta_1 - h_g \beta_1^2 \\ & + h \mu_1 - \theta_{222} \beta_1 \mu_1 + \theta_{222} \beta_1 q_1 \mu_1 + h \mu_2 \\ & - \theta_{222} \beta_1 \mu_2 + \theta_{222} \beta_1 q_2 \mu_2) \\ & + s^2 p_1^2 p_2^2 \mu_1 \mu_2 (h^2 + 2h h_g \beta_1 + h_g^2 \beta_1^2 + J_2 \beta_1^2 \\ & + h p_1^2 - \theta_{222} \beta_1 p_1^2 - h_g \beta_1^2 p_1^2 + h p_2^2 - \theta_{222} \beta_1 p_2^2 \\ & - h_g \beta_1^2 p_2^2 + h^2 \mu_1 + h p_2^2 \mu_1 - \theta_{222} \beta_1 p_1^2 \mu_1 \\ & + h p_2^2 \mu_1 - \theta_{222} \beta_1 p_2^2 \mu_1 + \theta_{222} \beta_1 p_1^2 q_1 \mu_1 \\ & + \theta_{222} \beta_1 p_2^2 q_1 \mu_1 + \beta_1^2 q_1^2 \mu_1 + h^2 \mu_2 + h p_1^2 \mu_2 \\ & - \theta_{222} \beta_1 p_1^2 \mu_2 + h p_2^2 \mu_2 - \theta_{222} \beta_1 p_2^2 \mu_2 \\ & + \theta_{222} \beta_1 p_1^2 q_2 \mu_2 + \theta_{222} \beta_1 p_2^2 q_2 \mu_2 + \beta_1^2 q_2^2 \mu_2) \\ & + s^4 p_1^2 p_2^2 \mu_1 \mu_2 (h^2 p_1^2 + 2h h_g \beta_1 p_1^2 + h_g^2 \beta_1^2 p_1^2 \\ & + J_2 \beta_1^2 p_1^2 + h^2 p_2^2 + 2h h_g \beta_1 p_2^2 + h_g^2 \beta_1^2 p_2^2 \\ & + J_2 \beta_1^2 p_2^2 + h p_1^2 p_2^2 - \theta_{222} \beta_1 p_1^2 p_2^2 - h_g \beta_1^2 p_1^2 p_2^2 \\ & + h^2 p_2^2 \mu_1 + h p_1^2 p_2^2 \mu_1 - \theta_{222} \beta_1 p_1^2 p_2^2 \mu_1 \\ & + \theta_{222} \beta_1 p_1^2 p_2^2 q_1 \mu_1 + \beta_1^2 p_1^2 q_1^2 \mu_1 + \beta_1^2 p_2^2 q_1^2 \mu_1 \\ & + h^2 p_1^2 \mu_2 + h p_1^2 p_2^2 \mu_2 - \theta_{222} \beta_1 p_1^2 p_2^2 \mu_2 \\ & + \theta_{222} \beta_1 p_1^2 p_2^2 q_2 \mu_2 + \beta_1^2 p_1^2 q_2^2 \mu_2 + \beta_1^2 p_2^2 q_2^2 \mu_2) \\ & + s^6 p_1^2 p_2^2 \mu_1 \mu_2 (h^2 p_1^2 p_2^2 + 2h h_g \beta_1 p_1^2 p_2^2 + h_g^2 \beta_1^2 p_1^2 p_2^2 \\ & + J_2 \beta_1^2 p_1^2 p_2^2 + \beta_1^2 p_1^2 p_2^2 q_1^2 \mu_1 + \beta_1^2 p_1^2 p_2^2 q_2^2 \mu_2) \end{aligned} \right. \quad (3.10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_{x01} = & s^6 (h + h_g \beta_1) p_1^4 p_2^4 \mu_1 \mu_2 \\ & + s^2 p_1^2 p_2^2 \mu_1 \mu_2 (h + h_g \beta_1 + h \mu_1 + h \mu_2) \\ & + s^4 p_1^2 p_2^2 \mu_1 \mu_2 (h p_1^2 + h_g \beta_1 p_1^2 \\ & + p_2^2 (h + h_g \beta_1 + h \mu_1) + h p_1^2 \mu_2) \end{aligned} \right. \quad (3.11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_{x02} = & s^2 p_1^2 p_2^2 \mu_1 \mu_2 (h - \theta_{222} \beta_1 - h_g \beta_1^2 \\ & + h \mu_1 - \theta_{222} \beta_1 \mu_1 + \theta_{222} \beta_1 q_1 \mu_1 + h \mu_2 \\ & - \theta_{222} \beta_1 \mu_2 + \theta_{222} \beta_1 q_2 \mu_2) \\ & + s^4 p_1^2 p_2^2 \mu_1 \mu_2 (h h_g \beta_1 + h_g^2 \beta_1^2 + J_2 \beta_1^2 + h p_2^2 \\ & - \theta_{222} \beta_1 p_2^2 - h_g \beta_1^2 p_2^2 + h p_2^2 \mu_1 - \theta_{222} \beta_1 p_1^2 \mu_1 \\ & + \theta_{222} \beta_1 p_2^2 q_1 \mu_1 + \beta_1^2 q_1^2 \mu_1 + h p_2^2 \mu_2 \\ & - \theta_{222} \beta_1 p_2^2 \mu_2 + \theta_{222} \beta_1 p_2^2 q_2 \mu_2 + \beta_1^2 q_2^2 \mu_2) \\ & + s^6 p_1^2 p_2^2 \mu_1 \mu_2 (h h_g \beta_1 p_2^2 + h_g^2 \beta_1^2 p_2^2 \\ & + J_2 \beta_1^2 p_2^2 + \beta_1^2 p_2^2 q_1^2 \mu_1 + \beta_1^2 p_2^2 q_2^2 \mu_2) \end{aligned} \right. \quad (3.12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_{x03} = & s^2 p_1^2 p_2^2 \mu_1 \mu_2 (g^2 h - a g^2 \theta_{222} \beta_1 - g^2 h_g \beta_1^2 \\ & + g^2 (h - a \theta_{222} \beta_1) \mu_1 + g^2 \theta_{222} \beta_1 q_1 \mu_1 \\ & + g^2 h \mu_2 - a g^2 \theta_{222} \beta_1 \mu_2 + g^2 \theta_{222} \beta_1 q_2 \mu_2) \\ & + s^4 p_1^2 p_2^2 \mu_1 \mu_2 (g h h_g \beta_1 + g h_g^2 \beta_1^2 + g J_2 \beta_1^2 \\ & + g h p_1^2 - a g \theta_{222} \beta_1 p_1^2 - g h_g \beta_1^2 p_1^2 \\ & + g (h - a \theta_{222} \beta_1) p_1^2 \mu_1 \\ & + g \theta_{222} \beta_1 p_1^2 q_1 \mu_1 + g \beta_1^2 q_1^2 \mu_1 + g h p_1^2 \mu_2 \\ & - a g \theta_{222} \beta_1 p_1^2 \mu_2 + g \theta_{222} \beta_1 p_1^2 q_2 \mu_2 + g \beta_1^2 q_2^2 \mu_2) \\ & + s^6 p_1^2 p_2^2 \mu_1 \mu_2 (h h_g \beta_1 p_1^2 + h_g^2 \beta_1^2 p_1^2 \\ & + J_2 \beta_1^2 p_1^2 + \beta_1^2 p_1^2 q_1^2 \mu_1 + \beta_1^2 p_1^2 q_2^2 \mu_2) \end{aligned} \right. \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{aligned} c_{01} = & 2p_1^6 \mu_1^3 (1 + \mu_1)^3, \\ c_{11} = & p_1^6 \mu_1^3 (1 + \mu_1)^2 (p_1^2 (2 + \mu_1) - 2(1 + \mu_1)), \\ c_{21} = & -2p_1^8 \mu_1^3 (1 + \mu_1)^2, \\ c_{31} = & 0 \end{aligned} \right. \quad (3.14)$$

故に, $f_{x00} = 0$ を与える ω は固有角振動数であり, このとき系は共振する. 共振の具体例を示すことが望まれるが, 紙数の制約のため, 本報告では割愛する.

4 おわりに

前報^{[6],[7]}では, 2点吊り振子の3つの振動 mode の特徴を述べ, それらの振子の静止平衡状態を表す幾何学的関係式を図式解法により解いた. それに続き, 本報告では, 対称2点吊り振子の円木に小振子を取り付けて mode 1 (遊動円木 mode) の振動を分散させることにより円木・物体の振動の低減を図ることを目標として, 上壁面からの励振に対する円木・物体と小振子の線形応答を解析した. 系の静止平衡状態回りの運動の記述において, $\theta_{21} \equiv \theta_{21}(\theta_{11})$ を θ_{11} で展開した場合に表式が非常に長くなるので, 本報告では $a = L = 1$ として $\beta = c/a$ の関数として (2.10) 式に θ_{222} のみを示した. また, 線形振動を記述する Lagrange 関数を求めて Lagrange の運動方程式を導き, 固有角振動数の特性を議論した. 運動の自由度が増えたことにより, 円木・物体のみの固有角振動数と比べ, 小振子を伴う場合の固有角振動数は高い側と低い側に現れる. 小振子が1つの場合には, Fig.3a-3c のように, 元の系の固有角振動数の上側と下側に固有角振動数が現れ, 小振子が2つの場合には, Fig.4a-4d のように, 3つの固有角振動数があり, 内1つは β に依存しないことが示された. このような振動 mode が制振・免振に利用できるか否か, さらなる検討に期待される. 小振子の数を増やせば, 様々な固有振動が現れ, それを予測あるいは制御できれば, 受動的制振の課題に道筋をつけることになる. 特に, 数により制振でのロバスト性の高い効果が見出せるか否かへの期待は大きい.

3節では, 壁面からの励振の問題を定式化した. この数式処理には Mathematica を用いたが, 逆三角関数の展開式が非常に長くなるため, 励振に対する2点吊り振子と小振子の応答特性の表式が得られたことを示すだけに留まった. 数式処理機能を用いて, 従来は困難であった問題を解けるようになったが, 数式表現の整理の仕方により後処理が困難となるという新たな問題が生じる. 振動現象の解明から, 工学的応用や振動制御まで扱うためには, 力学 model の設計指針を明確にする必要がある.

一方, 振子教材・教程の調査^[13]並びに研究論文調査により, 2点吊り振子の研究はまだ少なく本研究が意義あるものと思われる. また, 本報告で扱った mode 1 と共に mode 2 (ブランコ mode), 擦れ振動 (mode 3) がうまく分離できず, 実験^{[14],[15]}では同時に現れることが分かって来た. 従って, 個々の mode 解析を行うと共に mode 間の結合・連成振動の研究も求められる. 擦れ振動は別の project として研究成果の報告を行うが, mode 間の振動問題の解明やそれらの計測・制御等の課題への取組計画が必要である.

線形/非線形振動に関連する解析は、次報^{[16]-[19]}で扱う。
 なお、本報告の一部は、先に講演発表したもの^{[8]-[11]}であることを付記する。

参考文献

- [1] 川口 衛, 立道 郁生: “21318 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 1 原理と免震床の実大実験” 学術講演梗概集. B-2, 構造 II, 振動, 原子力プラント 2000 (2000), pp.635-636(社団法人日本建築学会).
- [2] 登坂 史生, 川口 衛: “21319 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 2 高層建築物への適用” 学術講演梗概集. B-2, 構造 II, 振動, 原子力プラント 2000 (2000), pp.637-638(社団法人日本建築学会).
- [3] 島田 圭一郎, 川口 衛: “21298 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 3 対称 2 点吊り振子の性質について” 学術講演梗概集. 構造系 (B-2) (2002), pp.595-596(社団法人日本建築学会).
- [4] 井出 知良, 川口 衛, 永田 秀正, 服部 宏己, 君島 昭男: “21300 並進振子原理を用いた免震システムの開発: その 4 実構造物における自由振動試験” 学術講演梗概集. 構造系 (B-2) (2002), pp.599-600(社団法人日本建築学会).
- [5] Ding Zhou & Tianjian Ji: “Dynamic characteristics of a generalised suspension system” *International Journal of Mechanical Sciences* **50** (2008), pp.30-42.
- [6] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 内堀 晃彦, 宮内 太積, 川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (3): 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.63-70.
- [7] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 内堀 晃彦, 宮内 太積, 川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (4): 2 点吊り振子の実験と解析” 沼津高専研究報告第 43 号 (2009), pp.71-78.
- [8] 望月 孔二, 宮内 太積, 内堀 晃彦, 川上 誠, 中道 義之, Mazni Al Irfan, 川船 雄一郎, 佐々木 隆吾, 舟田 敏雄: “PSD 簡易計測システム試作と 2 点吊り振子の実験・解析” 電子情報通信学会 2009 年総合大会 2009 年 3 月 17 日 (火)~20 日 (金) 愛媛大 (松山市) 3 月 18 日 (水) 午前, 「D-15 教育工学」(一般セッション), 講演番号: D-15-24
- [9] 宮内 太積, 望月 孔二, 内堀 晃彦, 川上 誠, 中道 義之, 舟田 敏雄: “263 水平加振による非線形振動系の実験と振動解析 (振動学教材開発)” 日本機械学会東海支部第 58 期総会・講演会 2009 年 3 月 17 日 (火), 18 日 (水) 岐阜大学 工学部 3 月 18 日 (水) 12:45-14:00 GS 機械力学 講演番号 263.
- [10] 舟田 敏雄, 宮内 太積, 望月 孔二, 内堀 晃彦, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子と小振子の連成振動の数値解析” 第 58 回理論応用力学講演会 講演論文集 NCTAM2009, pp.255-256. 第 58 回理論応用力学講演会, 日本学術会議, 2009 年 6 月 9 日 (火)~11 日 (木), OS15 連成現象・複合現象のシミュレーション 講演番号 2B13 (6/10).
- [11] 望月 孔二, 宮内 太積, 舟田 敏雄, 内堀 晃彦, 川上 誠, 中道 義之, 大庭 勝久: “2 点吊り振子の基礎運動解析と PSD による簡易計測システム試作計画” 第 29 回高専情報処理教育研究発表会 (2009.8.27-28.), 論文集第 29 号, pp.8-11.
- [12] 望月 孔二, 宮内 太積, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 川船 雄一郎, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子の基礎運動解析” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.
- [13] 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 石本 拓也, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠, 望月 孔二: “出前授業のための「振子」教材の整備” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.
- [14] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠: “PSD による簡易計測システム試作のための振子運動の基礎解析 (5): 2 点吊り振子の捩れ振動” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.
- [15] 望月 孔二, 舟田 敏雄, 船津 佑介, 岩本 大, 清水 啓介, 石本 拓也, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠: “出前授業のための「振子」教材の整備: Pendulum Snake と 2 点吊り振子” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.
- [16] 川上 誠, 舟田 敏雄, マズニ アルイルファン, 佐々木 隆吾, 川船 雄一郎, 中道 義之, 宮内 太積, 望月 孔二: “2 点吊り振子の非線形振動の基礎解析” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.
- [17] 望月 孔二, 宮内 太積, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, マズニ アルイルファン, 川船 雄一郎, 川上 誠, 中道 義之: “2 点吊り振子の線形運動解析” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.
- [18] 中道 義之, 舟田 敏雄, 望月 孔二, 宮内 太積, 川上 誠: “2 点吊り振子と幾つかの小振子の連成運動の基礎解析” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.
- [19] 川上 誠, 舟田 敏雄, 佐々木 隆吾, 川船 雄一郎, マズニ アルイルファン, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 大庭 勝久, 中道 義之, 宮内 太積, 望月 孔二: “2 点吊り振子と小振子の連成振動の制振評価: 静岡県の「プロジェクト TOUKAI (東海・倒壊)-0 (ゼロ)」による教材の開発 (3)” 沼津高専研究報告第 44 号 (2010), in press.