

揺動 Atwood 機械の数値 simulation: 物理振り子

舟田 敏雄^{*1*2} 岩本 大^{*1}

Numerical Simulation of Swinging Atwood's Machine: Physical Pendulum

Toshio FUNADA^{*1*2} and Dai IWAMOTO^{*1}

Abstract: Atwood's machine is a representative device in mechanics, which George Atwood invented in 1784 as a laboratory experiment to verify the mechanical laws of uniformly accelerated motion. It performs very complex phenomena when one body at its end swings in a vertical plane, which is referred to as swinging Atwood's machine (SAM) and makes periodic and chaotic motions. We revisited this mechanical device to make PBL (Problem Based Learning) resources and practice problems for numerical computations. Observing the early apparatus and relating devices in detail, we may propose here some mechanical models to be solved numerically. A cage of elevator may be regarded as a physical pendulum on a swinging Atwood's machine. A big pulley provides an asymmetric pendulum. Other models are also presented to have deeper understanding on mechanics.

Keywords: Swinging Atwood's Machine, Periodic and Chaotic Motion, Physical Pendulum

1 はじめに

Atwood の機械 (器械) は George Atwood が 1784 年に発明した「一定加速度の運動の力学法則」を証明するための実験装置であると言われている。Fig.1 は Kenyon College に格納されている Atwood の機械^[1] であり、プーリー (pulley) の左側と右側の錘の質量を m_1, m_2 とし、プーリーとロープの質量や摩擦が無視できるとき、この系の一定加速度 α は $\alpha = (m_2 - m_1)g / (m_1 + m_2)$ (g : 重力加速度) と表され、自由落下の現象がゆっくりと観察できる装置となる。当時は、 g の値の測定装置としても利用されたようである。

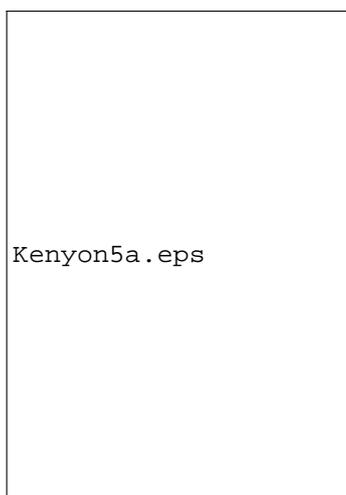


Fig.1 Atwood's machine (from the apparatus collection of Kenyon College).^[1]

揺動 Atwood 機械の特性は、特に Tufillaro^[2] 等により Hamilton 系の力学問題として精力的に研究されている。Tufillaro^[2] は、Atwood の機械の一方の錘 (質量 m) が揺動することにより、非常に多彩な現象が現れることを指摘し

ている。それに習い、本研究でも、SAM の運動方程式の解析と数値計算を行い SAM の特性を解明し、揺動 Atwood 機械の応用や拡張を試み、報告して来た^{[4]-[8]}。一方、ロープ式エレベータの乗りかごは揺動 Atwood 機械の錘 (物体) と見做すことができ、エレベータの安全運行並びに地震等の制振・免振対策に関わる多くの研究報告^{[9]-[14]} は揺動 Atwood 機械の新たな検討課題を提供する。その分野では乗りかご (cage)、綱車 (sheave)、ロープ (rope) 等の用語が用いられ、力学現象の解析から、エレベータ運行のための制御則まで広い範囲にわたる。また、ロープの全長が一定だと物体とプーリー間のロープ長が変化する振り子と見做した実験的理論的研究^[15] が極最近報告されている。本報告では、Atwood の機械の実験装置を再吟味し、視点を変えて model 化を試みる。§2 では、揺動 Atwood 機械に関わる物理振子の力学問題を定式化する。§3 ではプーリーに沿って振り子長が変化する揺動 Atwood 機械の問題を扱う。

2 揺動 Atwood 機械の model

まず、Atwood の機械の model を一望する。元々の Atwood 機械 (Fig.1, 2) では、左右の錘の質量の差が落下運動の向きを規定している。その際、力の関係式と Lagrange 関数による運動の記述を比較する。先の報告では、Tufillaro^[2] に習い、Fig.3 の揺動 Atwood 機械の model (Model 1) を採用した。図の左側の質量 M の錘は鉛直方向に上下移動し、右側の質量 m の錘は揺動 (swing) と上下移動する。この場合、支持点 O_1, O_2 は紐を支持する役割のみで、運動に関与しないと仮定した。エレベータでは右側は乗りかごであり、それに合わせて Fig.4 の鉛直面内で重心の並進と重心回りの回転を考慮した物理振子 (剛体振り子) (Model 2a) を解析する。それを考慮して、Fig.5 (Model 2) のように、揺動 Atwood 機械の右側を物理振子として、解析を試みる。

2.1 Atwood 機械 (Model 0)

Fig.2 に示すように、 O を原点とし鉛直上向きに z 軸とす

^{*1} 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.

^{*2} 専攻科: Advanced Engineering Course.

るデカルト座標系 (x, y, z) を用いて, 右側の質量 m_1 の錘の位置 $z_1 \equiv z_1(t)$ (t : 時間), 左側の質量 m_2 の錘の位置を $z_2 \equiv z_2(t)$ と表す. 紐に働く張力をそれぞれ T_1, T_2 とすると, 錘の運動方程式は次のように表される:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + T_1, & m_2 \ddot{z}_2 = -m_2 g + T_2, \\ J \ddot{\varphi} = T_2 a - T_1 a \end{cases} \quad (2.1)$$

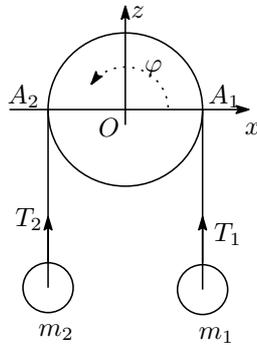


Fig.2 Atwood's machine (Model 0).

2つの錘をつなぐロープの全長は $r_0 = z_1 + \pi a + z_2$ で一定値であるから, これを時間 t で微分して, 速度について $\dot{z}_2 = -\dot{z}_1$ を得る. 摩擦が働いてロープとプーリーが滑らないものとして $a\dot{\varphi} = \dot{z}_1$ が成り立つから, 運動方程式は次のように書き換えられる:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + T_1, & m_2 \ddot{z}_1 = m_2 g - T_2, \\ \frac{J}{a^2} \ddot{z}_1 = T_2 - T_1 \end{cases} \quad (2.2)$$

これらの和を取り, この系全体の運動方程式を得る:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{a^2} \right) \ddot{z}_1 = (m_2 - m_1) g \quad (2.3)$$

これは次のように書き換えられ, 加速度を α と表す:

$$\ddot{z}_1 = \frac{(m_2 - m_1) g}{m_1 + m_2 + J/a^2} = \alpha \quad (2.4)$$

これを積分して, 解 z_1 は次のように表わされる:

$$z_1 = \frac{\alpha}{2} t^2 + c_1 t + c_2 \quad (2.5)$$

但し, c_1, c_2 は積分定数であり, 初期値により決定される. これは放物運動であり, $\alpha > 0$ のとき右側の錘が上昇(左側の錘は下降)し, $\alpha < 0$ のとき右側の錘が下降(左側の錘は上昇)する. $\alpha = 0$ ($m_1 = m_2$) のとき, 加速度は zero である. また, ロープとプーリーが滑る場合, プーリーの回転運動は錘の運動とは独立となる.

Fig.2 の系の運動を記述する Lagrange 関数 \mathcal{L} は, 次のように表される:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{z}_2^2 + \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2 - m_1 g z_1 - m_2 g z_2 \quad (2.6)$$

ここで, ロープの全長の式 $r_0 = z_1 + \pi a + z_2$ と滑らない条件 $a\dot{\varphi} = \dot{z}_1$ を用いれば, \mathcal{L} は, 次のように書き換えられる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{J}{a^2} \right) \dot{z}_1^2 - m_1 g z_1 \\ & - m_2 g (r_0 - z_1 - \pi a) \end{aligned} \quad (2.7)$$

これにより, Lagrange の運動方程式が導かれる:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_1} \right) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} \\ \rightarrow \left(m_1 + m_2 + \frac{J}{a^2} \right) \ddot{z}_1 &= (m_2 - m_1) g \end{aligned} \quad (2.8)$$

これは, (2.3) 式と同じである. この場合に, 張力 T_1, T_2 と摩擦力は仕事をしないので, これらは Lagrange 関数と Lagrange の運動方程式には含まれないことに注意する. (2.3) 式の導出過程と, (2.8) 式の導出過程は, それぞれに学習課程として重要な情報を提供している. また, (2.3)((2.8)) 式で記述される運動を元として, 以降では「揺動」を考慮する. それにより運動の自由度が増え, 且つ非線形項が含まれるので, 力学的 energy が保存するだけであるから, 周期運動のみならずカオスも発生する.

今回は触れないが, プーリーとロープとの摩擦, プーリーの運動, プーリーでの制動装置等を考慮する問題があり, その場合には (2.1) 式から出発する方が具体的になる.

さらに, ロープが質量と弾性を持ち所謂「弦の振動(波動)」が発生すること等々の様々な興味深い現象や工学的課題があることが挙げられる.

2.2 揺動 Atwood 機械 (Model 1)

Fig.3 の左側の質量 M の錘は, 左側の滑車 (pulley) から鉛直に吊り下がっており, 上下に運動する. 右側の質量 m の錘は, 右側の滑車からの距離を r , 鉛直軸との角度を θ として, 鉛直面内で振り運動する. 紐の全長を一定値 r_0 とすると, 左側の錘の鉛直位置は $z_0 + r_0 - r - c$ である.

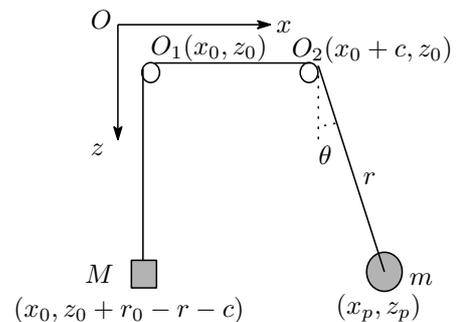


Fig.3 Swinging Atwood's machine (Model 1).

$$x_p = x_0 + c + r \sin(\theta), \quad z_p = z_0 + r \cos(\theta)$$

z 軸を鉛直下向きとするデカルト座標系 (x, y, z) と平面極座標 (r, θ) を用い, 右側の錘の位置が $x_p = x_0 + c + r \sin(\theta), z_p = z_0 + r \cos(\theta)$ と記述できる. それぞれの錘の運動 energy と重力 potential energy を求めると, この系の運動を記述する Lagrange 関数 \mathcal{L} は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{M}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \\ & + Mg(z_0 + r_0 - r - c) + mgr \cos(\theta) \end{aligned} \quad (2.9)$$

質量比 $\mu = M/m$ を導入し, \mathcal{L} を \mathcal{L}_1 に書き換える:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - gr (\mu - \cos(\theta)) \quad (2.10)$$

これにより，Lagrange の運動方程式は次式となる；

$$(1 + \mu)\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g(\mu - \cos(\theta)) = 0, \quad (2.11)$$

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} + gr \sin(\theta) = 0 \quad (2.12)$$

これらは， θ に関する非線形項が含まれている連立非線形微分方程式であり，初期値問題として数値的に解くことができる．(2.11), (2.12) 式は，自律系の方程式であり，系の力学的 energy が保存するので，有界な領域に解があり，周期解を持つことが示される：

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + gr(\mu - \cos(\theta)) \\ &\geq \frac{\mu+1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + gr(\mu - 1) \end{aligned} \quad (2.13)$$

また，力学的 energy 保存状態は数値計算精度の確認にも用いられる．

2.3 物理振り子 (Model 2a)

水平方向に x 軸，鉛直下方を z 軸とするデカルト座標系 (x, y, z) を取り，鉛直面内の平面極座標系 (r, θ) を併用して Fig.4 の物体の運動を記述する．支持点 O から長さ L_1 の紐を物体の一点 P に繋ぎ，紐の鉛直面からの傾き角を θ_1 と表す． P 点から重心 $G(x_G, 0, z_G)$ までの距離を L_2 とし，線分 PG と鉛直軸の角度を θ_2 とする．物体の重心の位置は，次式で表わされる：

$$\begin{cases} x_G = L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2), \\ z_G = L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_2) \end{cases} \quad (2.14)$$

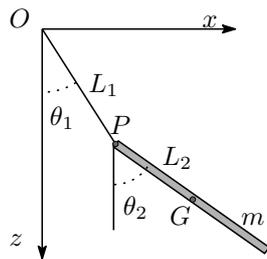


Fig.4 Physical pendulum (Model 2a).

(2.14) 式を用い，物体の並進運動・回転運動 energy と重力 potential energy を考慮して，この系の運動を記述する Lagrange 関数 \mathcal{L} は次のように表わされる：

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{J}{2}\dot{\theta}_2^2 + mgz_G \quad (2.15)$$

但し， J は物体の重心回りの慣性 moment である．(2.14) 式を用いて (2.15) 式を整理すると， \mathcal{L} は次式となる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} \left(L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) \\ &\quad + \frac{J}{2}\dot{\theta}_2^2 + mg(L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

これにより，Lagrange の運動方程式は次式となる；

$$\begin{aligned} mL_1^2\ddot{\theta}_1 + mgL_1 \sin(\theta_1) + mL_1L_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ + mL_1L_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} (mL_2^2 + J)\ddot{\theta}_2 + mgL_2 \sin(\theta_2) - mL_1L_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ + mL_1L_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

これらは， θ_1, θ_2 に関する非線形項が含まれている連立非線形微分方程式であり，初期値問題として数値的に解くことができる．(2.17), (2.18) 式は，自律系の方程式であり，系の力学的 energy が保存するので，有界な領域に解があり，周期解を持つことが示される：

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{m}{2} \left(L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(mL_2^2 + J)\dot{\theta}_2^2 + mg(L_1(1 - \cos \theta_1) + L_2(1 - \cos \theta_2)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.4 揺動 Atwood 機械: 物理振り子 (Model 2)

平面極座標 (r, θ) を用い，右側の質量 m_1 の物体 (乗りかご) の位置 (x_G, z_G) と左側の質量 m_2 の錘の位置 (x_2, z_2) は r_1, θ_1, θ_2 で記述できる．

$$\begin{cases} x_G = r_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2), \\ z_G = r_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_2), \\ x_2 = x_0, \quad z_2 = z_0 + r_0 - c - r_1 \end{cases} \quad (2.20)$$

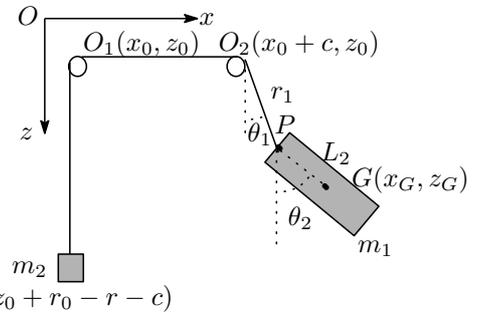


Fig.5 Swinging Atwood's machine with a cage (Model 2).

(2.20) 式を用い，物体の並進運動・回転運動 energy と重力 potential energy と左の錘の並進運動 energy と重力 potential energy を考慮して，この系の運動を記述する Lagrange 関数 \mathcal{L} は次のように表わされる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m_1}{2}(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2) + m_1gz_G \\ &\quad + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) + m_2gz_2 + \frac{J}{2}\dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

これを (2.20) 式を用いて整理すると， \mathcal{L} は次式となる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= m_2g(r_0 - c - r_1) + m_1g(L_2 \cos(\theta_2) + r_1 \cos(\theta_1)) \\ &\quad + \frac{\dot{r}_1^2}{2}(m_1 + m_2) + \frac{J}{2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{m_1}{2}r_1^2\dot{\theta}_1^2 \\ &\quad + m_1L_2\dot{\theta}_2(\dot{r}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + r_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \\ &\quad + \frac{m_1}{2}L_2^2\dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

これにより, Lagrange の運動方程式は次式となる:

$$m_1 g r_1 \sin(\theta_1) + m_1 \left(2r_1 \dot{r}_1 \dot{\theta}_1 + L_2 r_1 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + r_1^2 \ddot{\theta}_1 + L_2 r_1 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) = 0, \quad (2.23)$$

$$m_1 g L_2 \sin(\theta_2) + J \ddot{\theta}_2 + m_1 \left(2L_2 \dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - L_2 r_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + L_2 \dot{r}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + L_2 r_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_2^2 \ddot{\theta}_2 \right) = 0, \quad (2.24)$$

$$g(m_2 - m_1 \cos(\theta_1)) + (m_1 + m_2) \ddot{r}_1 + m_1 \left(-r_1 \dot{\theta}_1^2 - L_2 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_2 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right) = 0 \quad (2.25)$$

これらは, r_1, θ_1, θ_2 に関する非線形項が含まれている連立非線形微分方程式であり, 初期値問題として数値的に解くことができる. (2.23)-(2.25) 式は, 自律系の方程式であり, 系の力学的 energy が保存するので, 有界な領域に解があり, 周期解を持つことが示される:

$$E_1 = \frac{\dot{r}_1^2}{2} (m_1 + m_2) + \frac{J}{2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{m_1}{2} r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_1 L_2 \dot{\theta}_2 (\dot{r}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + r_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)) + \frac{m_1}{2} L_2^2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 g (-c + r_0 - r_1) - m_1 g (L_2 \cos(\theta_2) + r_1 \cos(\theta_1)) \quad (2.26)$$

3 振り長が変化する揺動 Atwood 機械

さらに, Fig.1, 6, 7 に見るように, プーリー (pulley) による振子の紐の長さの変化を考慮して解析を試みる.

3.1 ロープ長が円周に沿って変化する振子 (Model 3a)

静止プーリー (半径 a の円) 上の点 A_2 に紐の端を取り付け, プーリーの上側に紐を回して, 点 A_1 でプーリーから接線方向に離れて質量 m_1 の質点に繋ぎ振子となる (Fig.6).

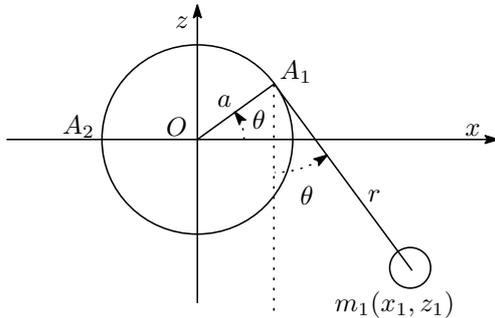


Fig.6 Swinging Atwood's machine with a rope along circular guide (Model 3a).

水平面と線分 OA_1 の角度 θ と紐が鉛直軸と成す角度と等しく, 紐は弛んだり切れたりしないものとする. これにより, 振子の紐が円の周上を移動するのに伴い振子の紐の長さが変化する. 紐の全長 r_0 は, 振子の長さ r とプーリーに接する長さ $a(\pi - \theta)$ の和である:

$$r_0 = r + a(\pi - \theta) \quad (3.1)$$

つまり, r は θ の関数として与えられる. 質点の位置を $(x_1, 0, z_1)$ とすると, Fig.6 により次のように表される:

$$\begin{cases} x_1 = a \cos(\theta) + r \sin(\theta), \\ z_1 = a \sin(\theta) - r \cos(\theta) \end{cases} \quad (3.2)$$

(3.2) 式を用い, 錘の並進運動 energy と重力 potential energy を考慮して, この系の運動を記述する Lagrange 関数 \mathcal{L} は次のように表わされる:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) - m_1 g z_1 \quad (3.3)$$

これは, 平面極座標系 (r, θ) の変数により, 次式に書き換えられる:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2} \dot{\theta}^2 (r_{01} + a + a\theta)^2 + m_1 g a \sin(\theta) - m_1 g (r_{01} + a\theta) \cos(\theta) \quad (3.4)$$

但し, $r_{01} = r_0 - a\pi$ である. (3.4) 式により, Lagrange の運動方程式は次式となる:

$$m_1 \left(a(r_{01} + a\theta) \dot{\theta}^2 + (r_{01} + a\theta)^2 \ddot{\theta} \right) - m_1 g \sin(\theta) (r_{01} + a\theta) = 0 \quad (3.5)$$

これらは, θ に関する非線形項が含まれている連立非線形微分方程式であり, 初期値問題として数値的に解くことができる. (3.5) 式は, 自律系の方程式であり, 系の力学的 energy が保存するので, 有界な領域に解があり, 周期解を持つことが示される:

$$E_1 = \frac{m_1}{2} \dot{\theta}^2 (r_{01} + a + a\theta)^2 - m_1 g a \sin(\theta) + m_1 g (r_{01} + a\theta) \cos(\theta) \quad (3.6)$$

3.2 ロープ長が変化する揺動 Atwood 機械 (Model 3)

Fig.7 は, 振子の紐の端点を質量 m_1, m_2 の錘につなぎ, 紐を静止したプーリーにかける. 紐の全長 r_0 は, 次式で与えられる:

$$r_0 = r_1 + a(\pi - \theta) + r_2, \quad (3.7)$$

但し, $r_{01} = r_0 - a\pi$ である.

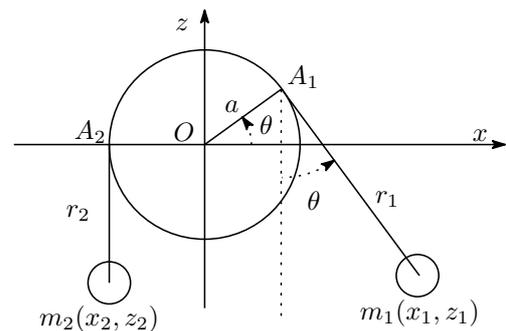


Fig.7 Swinging Atwood's machine with a rope along circular guide (Model 3).

プーリー (円) は, 円周上での紐の形状を規定しており, Fig.7 に示される錘の位置は次式で与えられる;

$$\begin{cases} x_1 = a \cos(\theta) + r_1 \sin(\theta), \\ z_1 = a \sin(\theta) - r_1 \cos(\theta), \\ x_2 = -a, z_2 = -r_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

(3.8) 式を用い錘の運動 energy と重力 potential energy を考慮して, この系の運動を記述する Lagrange 関数 \mathcal{L} は次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) - m_1 g z_1 \\ & + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) - m_2 g z_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

これは, 平面極座標系 (r, θ) の変数により, 次式に書き換えられる;

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & m_1 \left(\frac{1}{2} (\dot{r}_1 - a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} r_1^2 \dot{\theta}^2 \right) \\ & + \frac{m_2}{2} (\dot{r}_1 - a\dot{\theta})^2 + m_1 g (-r_1 \cos(\theta) + a \sin(\theta)) \\ & + m_2 g (r_0 - r_1 + a\theta) \end{aligned} \quad (3.10)$$

これにより, Lagrange の運動方程式が導かれる:

$$\begin{aligned} m_1 (2r_1 \dot{r}_1 \dot{\theta} - a \ddot{r}_1 + a^2 \ddot{\theta} + r_1^2 \ddot{\theta}) \\ - m_2 a (\ddot{r}_1 - a \ddot{\theta}) \\ g(-am_2 + m_1(-a \cos(\theta) - r_1 \sin(\theta))) = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} m_1 (-r_1 \dot{\theta}^2 + \ddot{r}_1 - a \ddot{\theta}) + m_2 (\ddot{r}_1 - a \ddot{\theta}) \\ g(m_2 + m_1 \cos(\theta)) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

プーリーが慣性 moment J , 角度 φ で回転する場合を考える. プーリーの周上では摩擦が働いており, ロープがプーリー上で滑らず, ロープの伸縮はないものすると, 周上の回転速度 $a\dot{\varphi}$ と右側物体の速度 \dot{r}_2 が等しいとおける:

$$a\dot{\varphi} = \dot{r}_2 \quad (3.13)$$

3.3 揺動 Atwood 機械と物理振子 (Model 5)

Fig.7 の系の拡張として, Fig.8 のように右側の錘を物理振子とする.

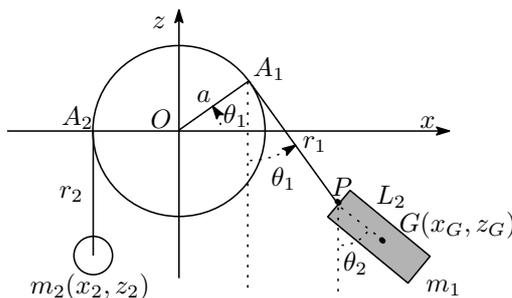


Fig.8 Swinging Atwood's machine with a physical pendulum and a rope along circular guide (Model 5).

P 点の座標 (x_P, z_P) , 物体の重心 (z_G, z_G) , 錘の座標 (x_2, z_2) は次のように表される:

$$\begin{cases} x_p = a \cos(\theta) + r_1 \sin(\theta), \\ z_p = a \sin(\theta) - r_1 \cos(\theta), \\ x_G = x_p + L_2 \sin(\theta_2), z_G = z_p + L_2 \cos(\theta_2), \\ x_2 = -a, z_2 = -r_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

(3.14) 式により, この系の運動を記述する Lagrange 関数は次のように表される:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{J}{2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{m_1}{2} \dot{r}_1^2 + \frac{m_1}{2} a^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_1}{2} r_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ & + g(m_1(-L_2 \cos(\theta_2) - r_1 \cos(\theta_1) + a \sin(\theta_1))) \\ & + m_2(-c + r_0 - r_1 + a\theta_1) + \frac{m_2}{2} (\dot{r}_1 - a\dot{\theta}_1)^2 \\ & + m_1(L_2 \dot{r}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + L_2 r_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \\ & + \frac{m_1}{2} L_2^2 \dot{\theta}_2^2 - m_1 a \dot{\theta}_1 (\dot{r}_1 + L_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

(3.15) 式より, Lagrange の運動方程式は次のように表される:

$$\begin{aligned} g(-am_2 + m_1(-a \cos(\theta_1) - r_1 \sin(\theta_1))) \\ - am_2 \ddot{r}_1 + a^2 m_2 \ddot{\theta}_1 + m_1 (2r_1 \dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \\ + (aL_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_2 r_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)) \dot{\theta}_2^2 \\ - a \ddot{r}_1 + (a^2 + r_1^2) \ddot{\theta}_1 + (L_2 r_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ - aL_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) \ddot{\theta}_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} -gL_2 m_1 \sin(\theta_2) + J \ddot{\theta}_2 + m_1 (2L_2 \dot{r}_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ + L_2(-a \cos(\theta_1 - \theta_2) - r_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)) \dot{\theta}_1^2 \\ + L_2 \dot{r}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) + L_2(r_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ - a \sin(\theta_1 - \theta_2)) \dot{\theta}_1 + L_2^2 \ddot{\theta}_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} g(m_2 + m_1 \cos(\theta_1)) + m_2 (\ddot{r}_1 - a \ddot{\theta}_1) \\ + m_1 (-r_1 \dot{\theta}_1^2 - L_2 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{r}_1 \\ - a \ddot{\theta}_1 + L_2 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

4 おわりに

本報告では, 一連の揺動 Atwood の機械の解析を受けて, 元々の Atwood の機械の力学 mode の再評価, 特にエレベータを model とするとき考慮すべき力学要因等を検討するため様々な model 構築を試み, 次の研究 step のための課題を整理した. 本報告に示した model の幾つかについて, すでに数値解析結果が出ているが, その成果の報告は次の機会に回すことにする.

本研究遂行にあたり, 本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して, 柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます.

参考文献

- [1] T. B. Greenslade, Jr.: "Atwood's Machine"
http://physics.kenyon.edu/EarlyApparatus/Mechanics/Atwoods_Machine/Atwoods_Machine.html
- [2] A. Nunes, J. Casasayas, and N.B. Tuffillaro: "Periodic orbits of the integrable swinging Atwood's machine" *American Journal of Physics* **63**(2), pp.121-126 (1995). The papers by Tuffillaro can be accessed from URL (<http://www.drchaos.net/drchaos/Sam/samrefs.html>), where the file is saved as "File Name: sam_9.pdf." Are saved at the Web site his papers labeled as "File Name: sam_0.pdf" to "File Name: sam_9.pdf" and Talk (pdf). Griffiths Memo (pdf).
- [3] H.M. Yehia: "On the integrability of the motion of a heavy particle on a tilted cone and the swinging Atwood machine" *Mechanics Research Communications* **33** (2006), pp.711-716.
- [4] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 中道 義之, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介: "揺動 Atwood 機械の数値 simulation" 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [5] 舟田 敏雄, 大庭 勝久, 中道 義之, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介: "揺動 Atwood 機械の鉛直方向パラメトリック励振の数値 simulation" 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [6] 中道 義之, 舟田 敏雄, 岩本 大, 大庭 勝久, 杉山 清隆, 藤田 将喜, 漆畑 勇太: "揺動 Atwood 機械の水平方向パラメトリック励振の数値 simulation" 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [7] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 中道 義之, 杉山 清隆, 藤田 将喜, 漆畑 勇太: "揺動 Atwood 機械の鉛直面内回転のパラメトリック励振の数値 simulation" 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [8] 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 杉山 清隆, 藤田 将喜, 漆畑 勇太, 中道 義之, 川上 誠, 望月 孔二, 宮内 太積: "揺動 Atwood 機械の鉛直面内回転のパラメトリック励振の数値 simulation" 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [9] 大槻 真嗣, 吉田 和夫, 中川 俊明, 木村 弘之, 藤本 滋: "エレベーターロープのロバスト振動制御 (機械力学, 計測, 自動制御)" 日本機械学会論文集. C 編 71(703), 859-866, 20050325
- [10] 三井 亜沙美, 小檜山 雅之: "メインロープの震害軽減のための建物・エレベーター連成系の基礎的研究" 日本建築学会構造系論文集 (621), 41-48, 20071130
- [11] 馬場 敏光, 小檜山 雅之: "エレベーターロープの揺れを考慮したアクティブマスダンパーによる建物制震の基礎的検討" 第 57 回理論応用力学講演会 OS18 構造物のロバスト設計・最適設計, 講演番号: 1B09, 第 57 回理論応用力学講演会講演論文集 NCTAM2008, pp.31-32. http://www.jstage.jst.go.jp/article/japanctam/57/0/31/_pdf/-char/ja/
- [12] 長田 朗, 小林 英彦: "高層ビル用エレベーターの安全を支える制動技術とロープ技術 (< 特集 > セーフティと精密工学-安心のための設計・検査技術-)" 精密工学会誌 **75**(3) (2009), pp.346-350.
- [13] 社団法人 日本エレベータ協会 <http://www.n-elekyo.or.jp/>
- [14] 財団法人 日本建築設備・昇降機センター <http://www.beec.or.jp/index.html>
- [15] O. Pujol, J-P. Perez, J-P Ramis, C. Simo, S. Simon, J-A. Weil: "Swinging Atwood's Machine: experimental and theoretical studies"
<http://www.maia.ub.es/dsg/2009/index.shtml>
- [16] 中道 義之, 大庭 勝久, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介: "球面振子の数値解析" 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [17] 大庭 勝久, 中道 義之, 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介: "変形球面振子の解析とその強制減衰振動の数値解析" 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [18] 舟田 敏雄, 岩本 大, 清水 啓介, 船津 佑介, 石本 拓也, 中道 義之, 大庭 勝久, 宮内 太積, 川上 誠, 望月 孔二: "出前授業のための「振子」教材の整備" 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.
- [19] 根本 栄治, 富永 馨: "707 アトウッド微小重力実験装置による加速度の検証および物理現象への応用 (振動・音響・制御)" 平成 19 年度日本機械学会関東支部茨城講演会, 平成 19 年 9 月 28 日 茨城大学日立キャンパス, 茨城講演会講演論文集 2007, pp.175-176.
- [20] 南原 律子: "アトウッドの器械を用いた運動の歴史的考察" 物理教育研究大会発表予稿集 (9), pp.21-22, 19920730.
- [21] 物理チャレンジ 2006 応募理論問題・応募実験問題 第 1 問 摩擦のあるアトウッドの器械 <http://www.phys-challenge.jp/img/pdf/oubo2006.pdf>
- [22] O. Babelon, M. Talon, M. C. Peyranere: "Kowalevski's analysis of the swinging Atwood's machine" Submitted on 30 Sep 2009. <http://arxiv.org/abs/0909.5574>

4.1 二重 Atwood 器械 (Model 6)

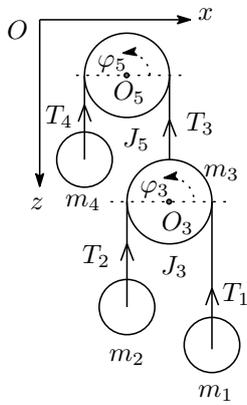


Fig.9 compound-Atwood-machine (Model 6).

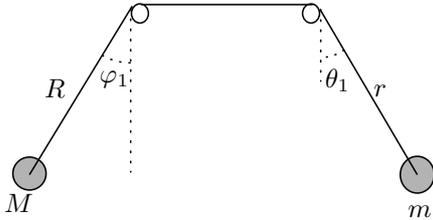


Fig.10 swinging-Atwood-double (Model 7).

5 揺動 Atwood 器械の運動方程式

6 数値計算 (1)

物理振子の規定値を $g = 1, m = 1, L_1 = 1, L_2 = 1, J = 1$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta_1(0) = 0.1, \dot{\theta}_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_2(0) = 0$ と設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 0 \leq t \leq 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を Fig.3a-3e に示す .

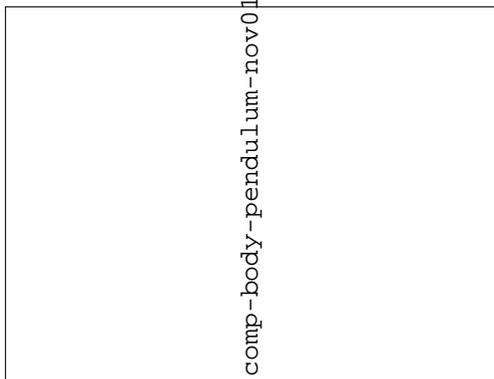


Fig.1a Phase portrait of $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$. The figure is rotated by 90° .



Fig.1b Phase portrait of $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$. The figure is rotated by 90° .

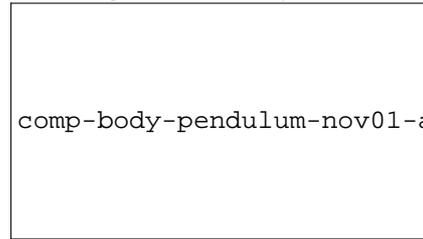


Fig.1c Time sequence of $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

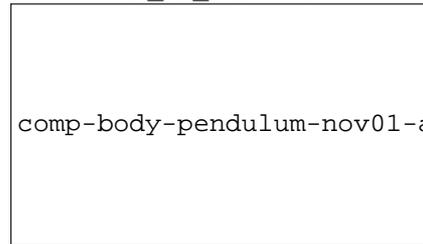


Fig.1d Time sequence of $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

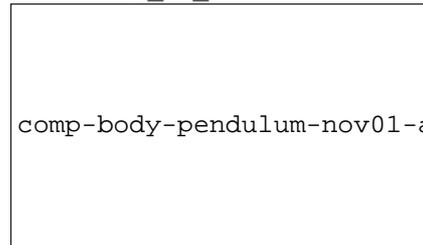


Fig.1g Spectrum of $\theta_1(t)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

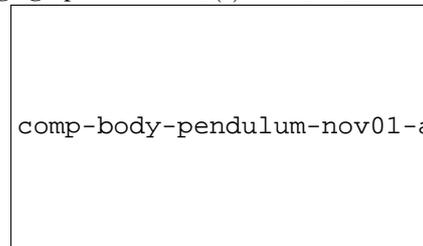


Fig.1h Spectrum of $\theta_2(t)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

物理振子の規定値を $g = 1, m = 1, L_1 = 1, L_2 = 1, J = 1$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta_1(0) = 0, \dot{\theta}_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0.1, \dot{\theta}_2(0) = 0$ と設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 0 \leq t \leq 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を Fig.3a-3e に示す .

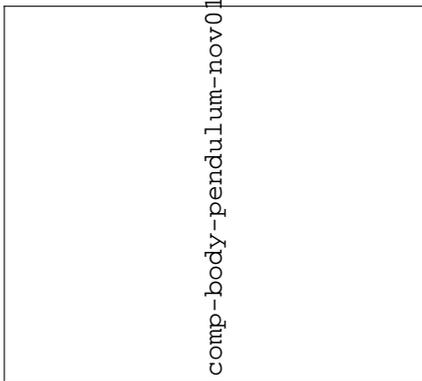


Fig.1a Phase portrait of $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$. The figure is rotated by 90° .

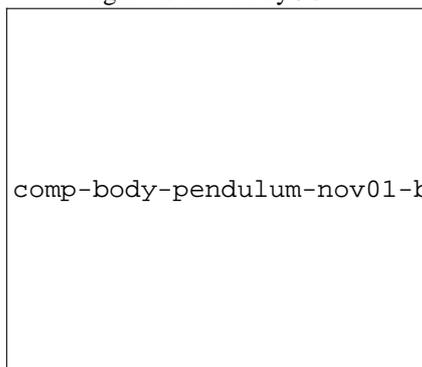


Fig.1b Phase portrait of $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

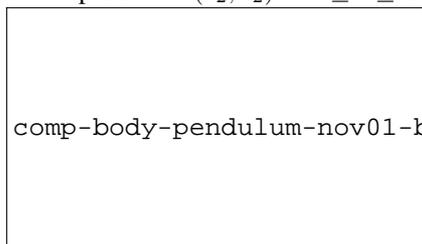


Fig.1c Time sequence of $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

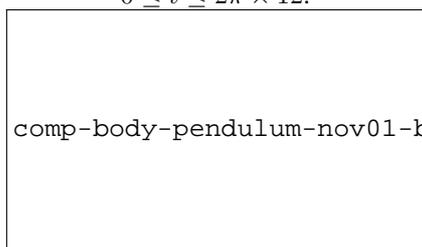


Fig.1d Time sequence of $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

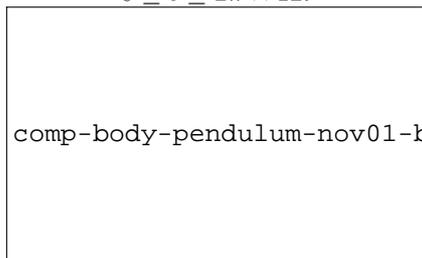


Fig.1g Spectrum of $\theta_1(t)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

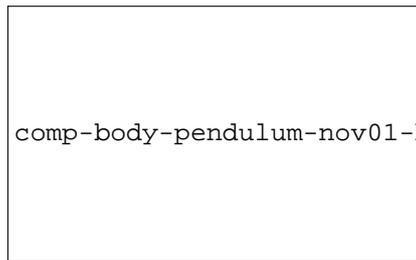


Fig.1h Spectrum of $\theta_2(t)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

物理振子の規定値を $g = 1, m = 1, L_1 = 1, L_2 = 1, J = 40$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta_1(0) = 0.1, \dot{\theta}_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0, \dot{\theta}_2(0) = 0$ と設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 0 \leq t \leq 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を Fig.3a-3e に示す .

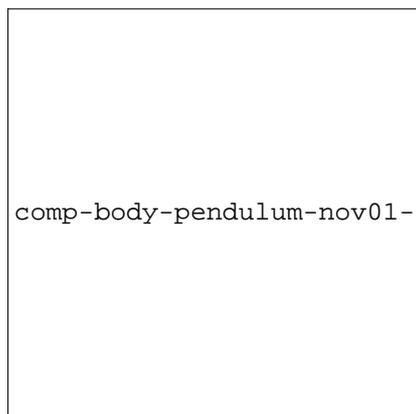


Fig.1a Phase portrait of $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

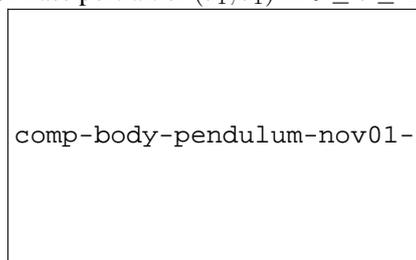


Fig.1b Phase portrait of $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

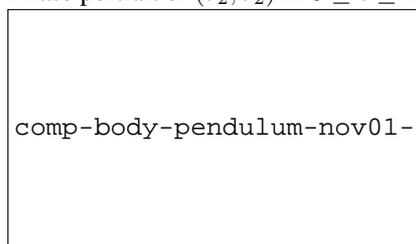


Fig.1c Time sequence of $(\theta_1, \dot{\theta}_1)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

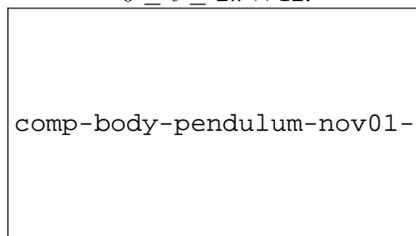


Fig.1d Time sequence of $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

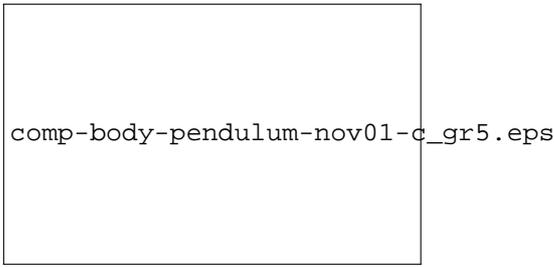


Fig.1g Spectrum of $\theta_1(t)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

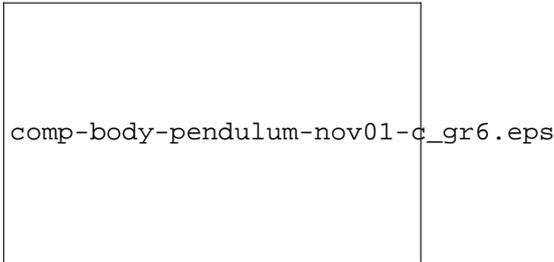


Fig.1h Spectrum of $\theta_2(t)$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

7 数値計算 (2)

系の規定値を $g = 1, m = 1, r_0 = 2, a = 0.5$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta(0) = -1.5, \dot{\theta}(0) = 0$ に設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を **Fig.2a-2c** に示す .

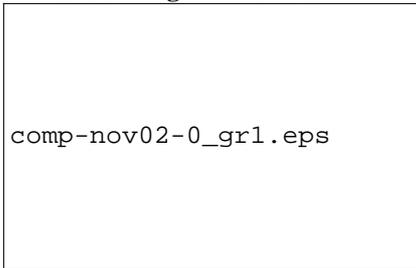


Fig.2a Phase portrait of (r, \dot{r}) in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

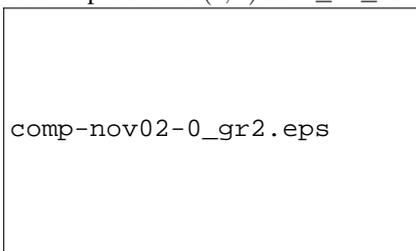


Fig.2b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

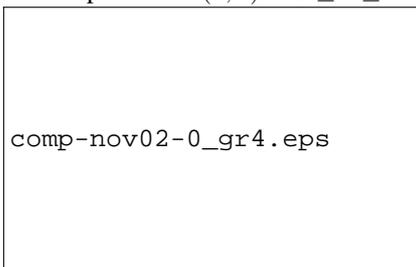


Fig.2c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, r_0 = 2, a = 0.5$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta(0) = -1.5, \dot{\theta}(0) = -0.872$ に設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$

($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を **Fig.2a-2c** に示す .

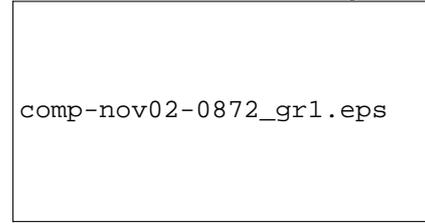


Fig.2a Phase portrait of (r, \dot{r}) in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

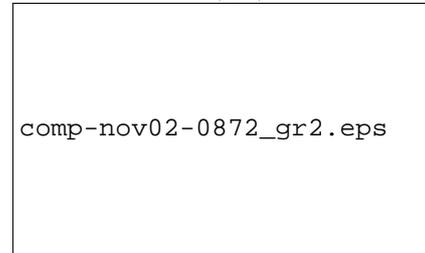


Fig.2b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

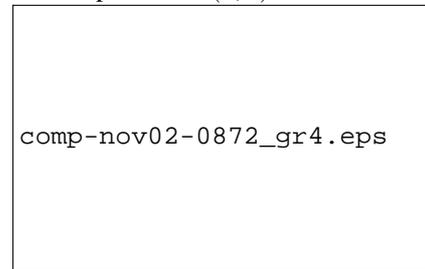


Fig.2c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, r_0 = 2, a = 0.5$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta(0) = -1.5, \dot{\theta}(0) = -0.873$ に設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を **Fig.2a-2c** に示す .

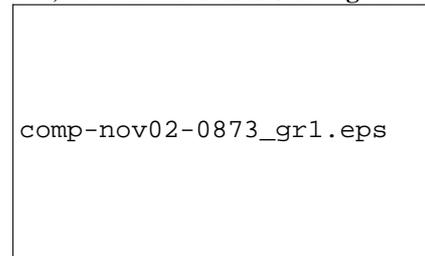


Fig.2a Phase portrait of (r, \dot{r}) in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

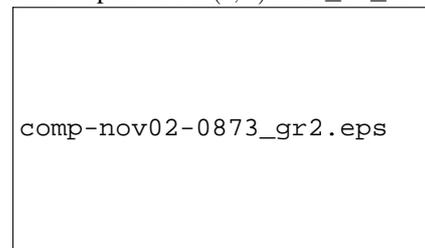


Fig.2b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

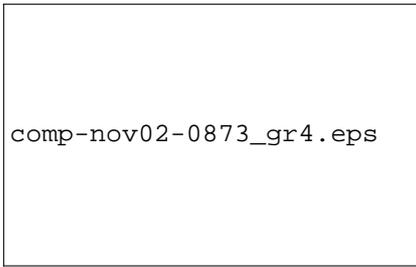


Fig.2c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, r_0 = 2, a = 0.5$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta(0) = -1.5, \dot{\theta}(0) = -0.874$ に設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を **Fig.2a-2c** に示す .

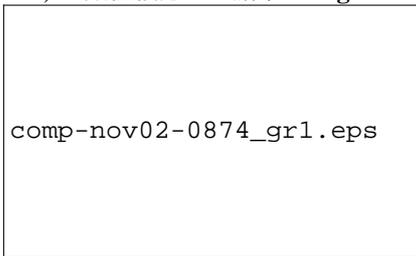


Fig.2a Phase portrait of (r, \dot{r}) in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

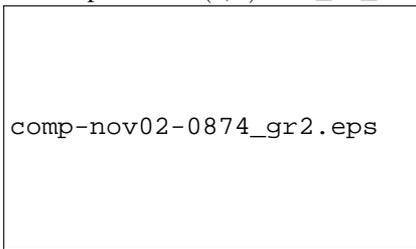


Fig.2b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

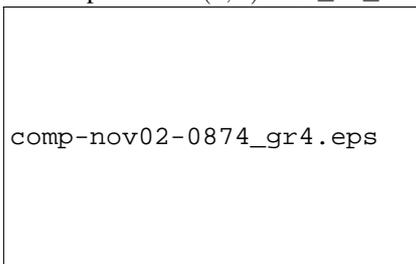


Fig.2c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, r_0 = 2, a = 0.5$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta(0) = -1.5, \dot{\theta}(0) = -1$ に設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を **Fig.2a-2c** に示す .

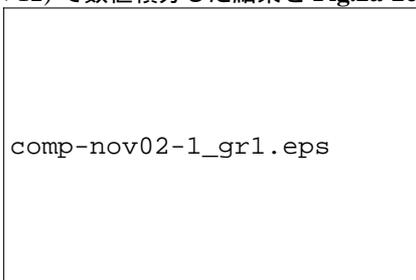


Fig.2a Phase portrait of (r, \dot{r}) in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

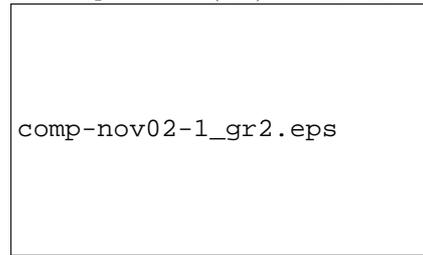


Fig.2b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

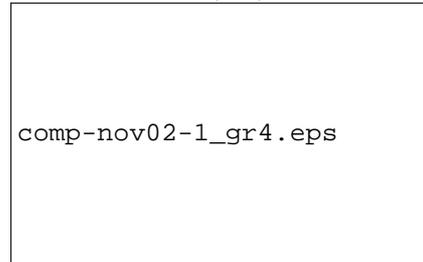


Fig.2c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, r_0 = 2, a = 0.5$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta(0) = -1.5, \dot{\theta}(0) = -1.2$ に設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を **Fig.2a-2c** に示す .

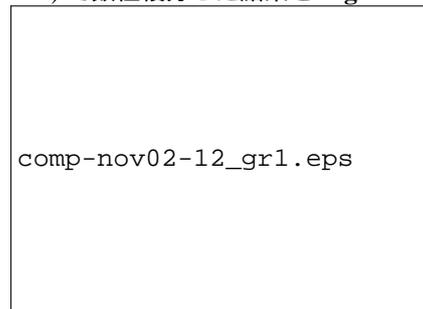


Fig.2a Phase portrait of (r, \dot{r}) in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

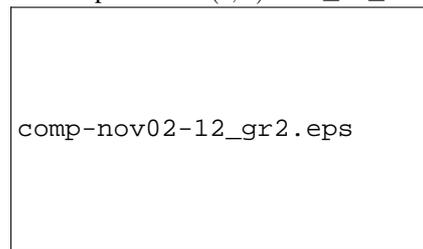


Fig.2b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

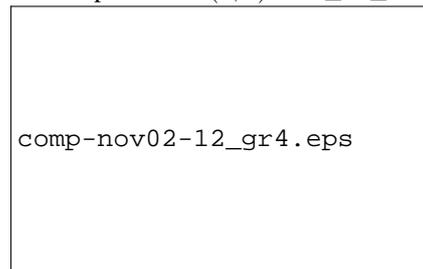


Fig.2c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, r_0 = 2, a = 0.5$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta(0) = -1.5, \dot{\theta}(0) = -1.21$ に設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を Fig.2a-2c に示す .

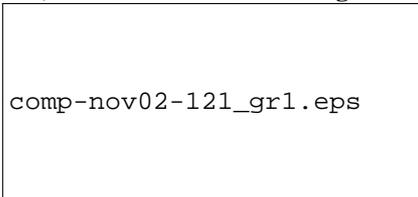


Fig.2a Phase portrait of (r, \dot{r}) in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

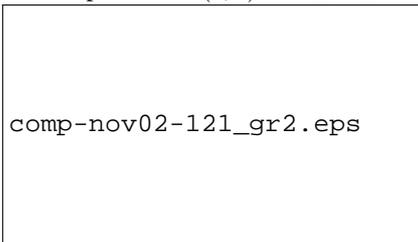


Fig.2b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

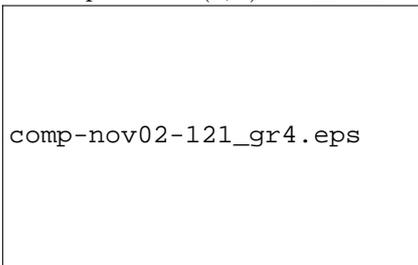


Fig.2c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, r_0 = 2, a = 0.5$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta(0) = -1.5, \dot{\theta}(0) = -1.5$ に設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を Fig.2a-2c に示す .

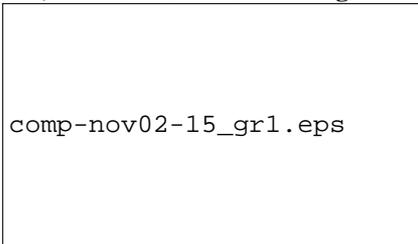


Fig.2a Phase portrait of (r, \dot{r}) in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

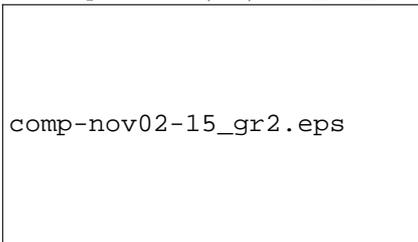


Fig.2b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

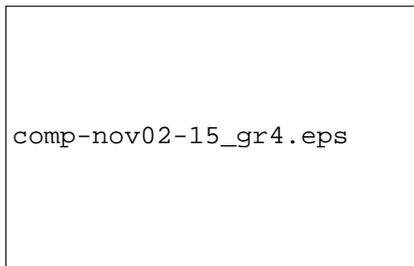


Fig.2c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, r_0 = 2, a = 0.5$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta(0) = -1.5, \dot{\theta}(0) = -2$ に設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を Fig.2a-2c に示す .

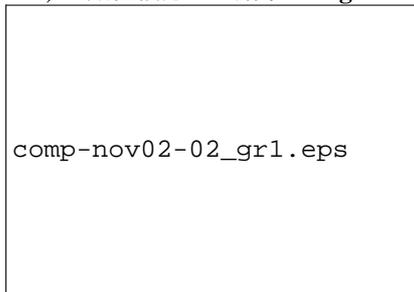


Fig.2a Phase portrait of (r, \dot{r}) in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

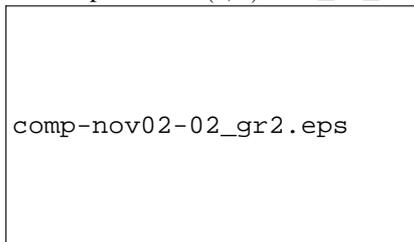


Fig.2b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

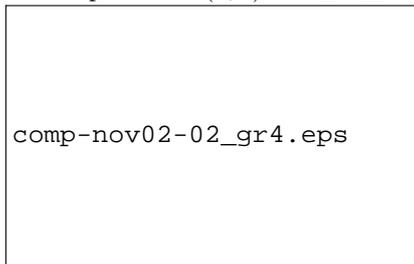


Fig.2c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, r_0 = 2, a = 0.5$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta(0) = -1.5, \dot{\theta}(0) = -2.02$ に設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を Fig.2a-2c に示す .

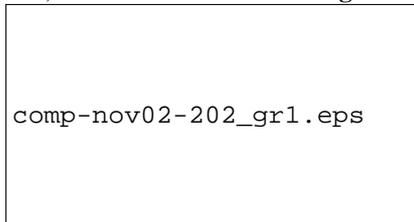


Fig.2a Phase portrait of (r, \dot{r}) in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

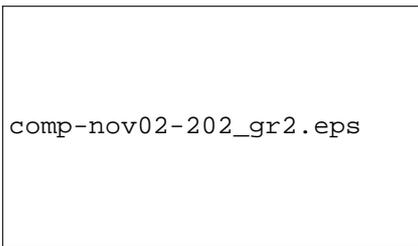


Fig.2b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

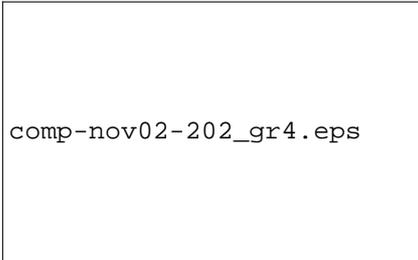


Fig.2c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

系の規定値を $g = 1, m = 1, r_0 = 2, a = 0.5$ とおく . 微分方程式系 (??), (??) 式の初期値を $\theta(0) = -1.5, \dot{\theta}(0) = -2.5$ に設定して , (??), (??) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 12$) で数値積分した結果を Fig.2a-2c に示す .

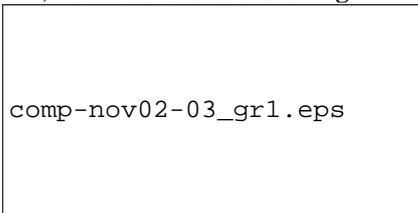


Fig.2a Phase portrait of (r, \dot{r}) in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

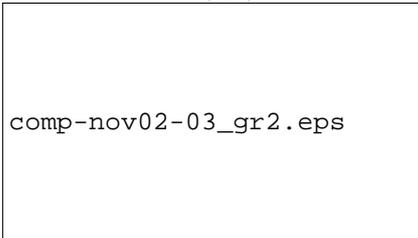


Fig.2b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

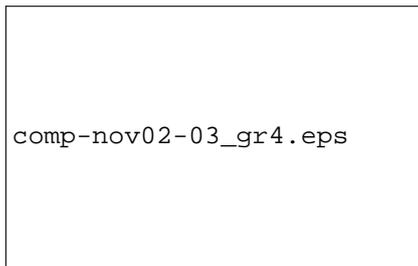


Fig.2c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 12$.

目次

1	はじめに	1901
2	揺動 Atwood 機械の model	1901
2.1	Atwood 機械 (Model 0)	1901
2.2	揺動 Atwood 機械 (Model 1)	1902
2.3	物理振子 (Model 2a)	1903
2.4	揺動 Atwood 機械: 物理振子 (Model 2) . . .	1903
3	振子長が変化する揺動 Atwood 機械	1904
3.1	ロープ長が円周に沿って変化する振子 (Model 3a)	1904
3.2	ロープ長が変化する揺動 Atwood 機械 (Model 3)	1904
3.3	揺動 Atwood 機械と物理振子 (Model 5) . . .	1905
4	おわりに	1905
4.1	二重 Atwood 器械 (Model 6)	1907
5	揺動 Atwood 機械の運動方程式	1907
6	数値計算 (1)	1907
7	数値計算 (2)	1909