揺動 Atwood 機械の鉛直方向パラメトリック励振の数値 simulation

舟田 敏雄[*1*2] 大庭 勝久[*1*2] 中道 義之[*2*3] 岩本 大[*1] 清水 啓介[*1] 船津 佑介[*1]

Numerical Simulation of Swinging Atwood's Machine Due to Vertical Parametric Excitation

Toshio FUNADA[*1*2] Katsuhisa OOBA[*1*2] Yoshiyuki NAKAMICHI[*2*3] Dai IWAMOTO[*1]
Keisuke SHIMIZU[*1] and Yusuke FUNATSU[*1]

Abstract: Atwood's machine is a representative device in mechanics, but it performs very complex phenomena when one body at its end swings in a vertical plane, which is referred to as swinging Atwood's machine. This has been extensively studied by Tufillaro and coworkers (N. B. Tufillaro, T. A. Abbott, and D. J. Griffiths, Swinging Atwood's Machine, American Journal of Physics 52 (10) (1984), pp.895-903) to reveal periodic and chaotic motions. We revisited this mechanical device to make PBL (Problem Based Learning) resources and practice problems for numerical computations. Parametric excitation of Atwood's pendulum may provide a new problem for practice, and vertical excitation is numerically solved in the present paper, for which we find out periodic and chaotic solutions.

Keywords: Swinging Atwood's Machine, Models of Elevators, Parametric Excitation in Vertical Direction, Periodic and Chaotic Motion

1 はじめに

先行研究[1]–[3] によれば，近年，建築物の超高層化に伴い，その層間移動手段であるエレベータの昇降行程の延長や高速化が図られ，分速 1010 m もの超高速エレベータが開発されている．このような超高速エレベータは主に吊りロープ式であり，そのロープの柔軟性から横振動の固有振動数が低く，強風や長周期地震で揺らされる超高層ビルの建屋との共振が問題となっている．また，エレベータの安全と信頼は安全装置と主要構造部材の様々な性能評価によって支えられている．その代表は，乗りかごの速度異常時にかごを緊急停止させる非常止め装置とかごを吊るワイヤロープの評価である[4]．これらに関して，エレベータの駆動の仕組みや装置等が解説されている[5],[6]．以上のような最近のエレベータの技術的課題・問題に注目して，技術者教育を推進する立場から教材開発並びに学修課題の発掘を目指そうというところに本研究の狙いがある．

エレベータの技術的課題は，先の一連の報告の視点からすれば，「揺動 Atwood 機械」の力学的問題が非常に近いと言えよう．しかしながら，著者等の調査した範囲では両者の関連を考慮した研究・報告例は見当たらず，既存の研究成果を適用して，新たな考察を試みる価値があるよう思われる．

揺動 Atwood 機械の特性は，特に Tufillaro[7]–[17] により Hamilton 系の力学問題として精力的に研究されている．Tufillaro[7] は、Atwood の機械の一方の錘 (質量 m) が揺動することにより，非常に多彩な現象が現れることを指摘している．先に，Tufillaro[7] に習い，SAM の運動方程式の解析と数値計算により SAM の特性を解明した[19]．本報告では，支持点の鉛直励振を考慮して揺動 Atwood 機械の力学問題を定式化し，運動方程式の初期値問題を数値解析する．

2 揺動 Atwood 機械の運動方程式

エレベータの模式図[4] (**Fig.1**) では，乗りかご (cage) と釣合錘 (counterweight) がロープで繋がれ，牽引綱車 (traction sheave) とそらせ綱車 (sheave) とロープでつるべ式に駆動している．綱車の巻付け角 θ と摩擦係数 μ により，張力 T_1, T_2 の間で，$T_1/T_2 = \exp(\mu\theta)$ の関係が成り立ち，これはエレベータの駆動力の伝達を考慮する際に重要となる．

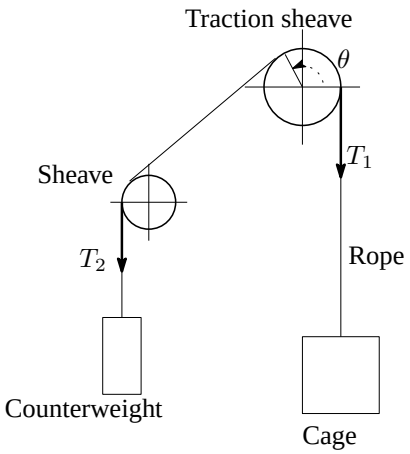

Fig.1 Schematic of elevator model driven with ropes and sheaves.

基本的には，左側の釣合錘は鉛直方向に上下し，右側の乗りかごもは鉛直方向に上下する．それらを駆動する制御則が課題となる．本報告では，しかしながら，乗りかごが振子として自由振動する場合を考察し，力学的問題の解析

[*1] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
[*2] 専攻科: Advanced Engineering Course.
[*3] 総合情報センター: Information Technology Center.

を行い，安全についての考察を行うことする．乗りかごや釣合錘の大きさを考慮すると物理振子を解析する必要があるが，ここではいずれも質点とみなす．また，ロープは，張った状態で伸縮せず，横振動は起こらないと仮定する．

揺動 Atwood 機械 (**Fig.2**) の左側の質量 M の物体 (釣合錘) は，左側の滑車から鉛直に吊り下がっており，上下に運動する．右側の質量 m の錘 (乗りかご) は，右側の滑車からの距離を r，鉛直軸との角度を θ として，鉛直面内で振子運動する．ロープの質量は無視でき，伸縮や曲げはなく，ロープの全長 r_0 は一定とする．水平に x 軸，鉛直下方を z 軸とするデカルト座標系 (x, y, z) と平面極座標系 (r, θ) を用い，2 つの錘の位置は，次式で表わされる:

$$\begin{cases} x_M = x_0, \quad z_M = z_0 + r_0 - r - c, \\ x_P = x_0 + c + r\sin(\theta), \\ z_P = z_0 + r\cos(\theta) \end{cases} \tag{2.1}$$

ここでは，支持点 (綱車) の位置 (x_0, z_0) が時間の周期関数で与えられる場合を考える．これは地震などによりエレベータが設置されている建屋が振動し，その影響を受けてエレベータが振動する問題に対応する．

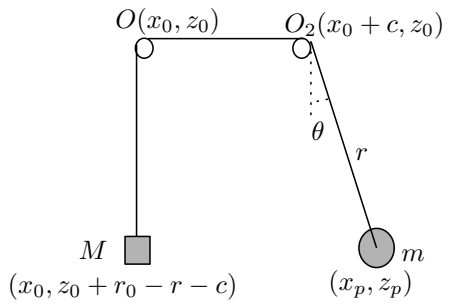

Fig.2 Swinging Atwood's Machine. The bob at the right hand side is located at (x_P, z_P), where $x_P = x_0 + c + r\sin(\theta)$ and $z_P = z_0 + r\cos(\theta)$.

それぞれの錘の運動 energy と重力 potential energy を求めると，この系の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\mu}{2}\left(\dot{x}_M^2 + \dot{z}_M^2\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{x}_P^2 + \dot{z}_P^2\right) + \mu g z_M + g z_P \\ &= g\left(\mu\left(r_0 - r - c\right) + r\cos(\theta) + (1+\mu)z_0\right) \\ &+ \frac{1}{2}\Big((1+\mu)\dot{r}^2 + 2\sin(\theta)\dot{r}\dot{x}_0 + (1+\mu)\dot{x}_0^2 \\ &-2\dot{r}\dot{z}_0\left(\mu - \cos(\theta)\right) + (1+\mu)\dot{z}_0^2 + 2r\dot{x}_0\dot{\theta}\cos(\theta) \\ &-2r\dot{z}_0\dot{\theta}\sin(\theta) + r^2\dot{\theta}^2\Big) \end{aligned} \tag{2.2}$$

これにより，Lagrange の運動方程式が求められ、減衰係数 c_1, c_2 として減衰項を加えると次式となる;

$$\begin{aligned} g\left(\mu - \cos(\theta)\right) - r\dot{\theta}^2 + (1+\mu)\ddot{r} + \ddot{x}_0\sin(\theta) \\ - \ddot{z}_0\left(\mu - \cos(\theta)\right) = -c_1\dot{r}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$r\left(g\sin(\theta) + 2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{x}_0\cos(\theta) - \ddot{z}_0\sin(\theta) + r\ddot{\theta}\right) = -c_1\dot{\theta} \tag{2.4}$$

これらは，連立非線形微分方程式であり，初期値問題として解くことができる．

3 数値計算

(T1) $0 \le t \le 2\pi \times 300$, (T2) $2\pi \times 300 \le t \le 2\pi \times 600$, (T3) $2\pi \times 600 \le t \le 2\pi \times 900$ としたときの数値計算結果を以下に示す。

3.1 $c_1 = c_2 = 0.1$

系の規定値を $g = 1$, $\mu = 1.0125$, $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.1$, $X_0 = 0$, $Z_0 = 0.5$ とおく．微分方程式系 (2.3), (2.4) 式の初期値を $r(0) = 10$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0.22$, $\dot{\theta}(0) = 0$ と設定して，(2.3), (2.4) 式を時間 (T1) で数値積分した結果を **Fig.3a-3e** に示す．

Fig.3a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in (T1).

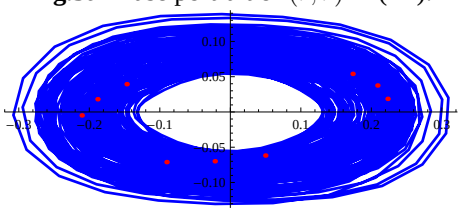

Fig.3b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in (T1).

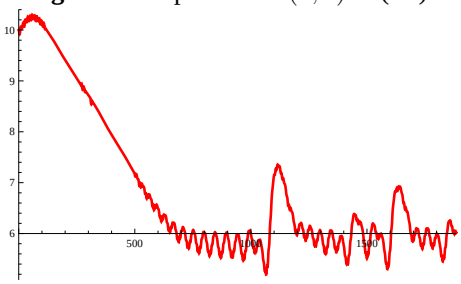

Fig.3c Time sequence of $r(t)$ versus t in (T1).

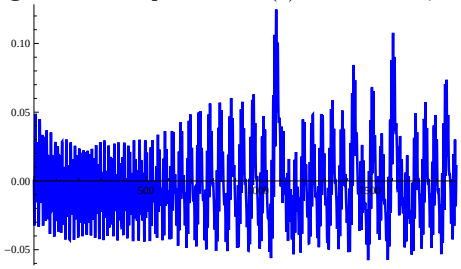

Fig.3d Time sequence of $\dot{r}(t)$ versus t in (T1).

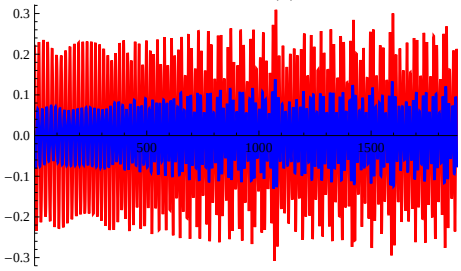

Fig.3e Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in (T1).

同様にして、時間 (T2) で数値積分した結果を **Fig.4a-4e** に示す．

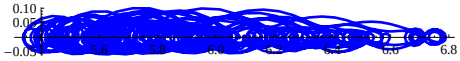

Fig.4a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in (T2).

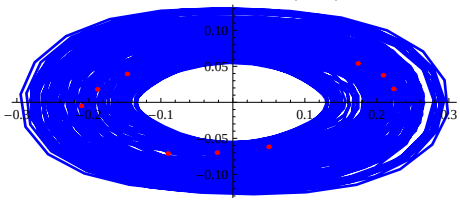

Fig.4b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in (T2).

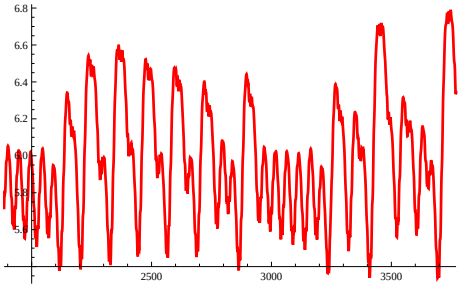

Fig.4c Time sequence of $r(t)$ versus t in (T2).

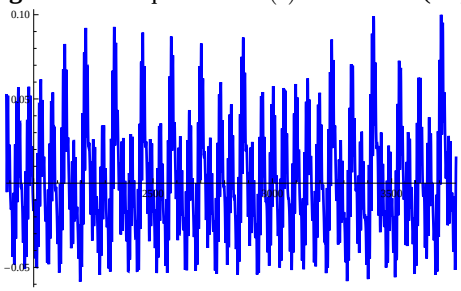

Fig.4d Time sequence of $\dot{r}(t)$ versus t in (T2).

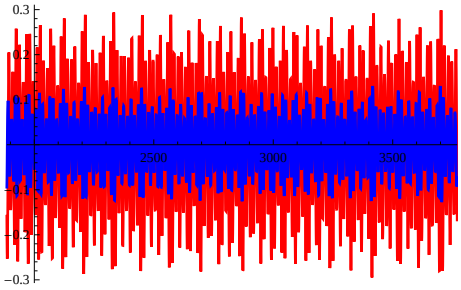

Fig.4e Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in (T2).

同様にして、時間 (T3) で数値積分した結果を **Fig.5a-5e** に示す.

Fig.5a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in (T3).

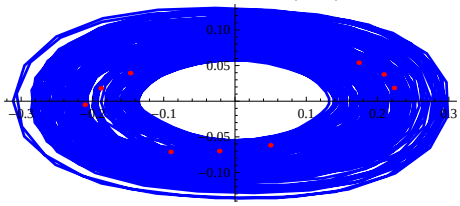

Fig.5b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in (T3).

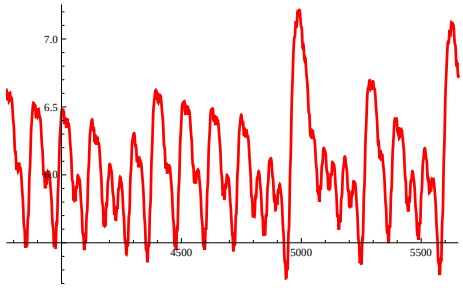

Fig.5c Time sequence of $r(t)$ versus t in (T3).

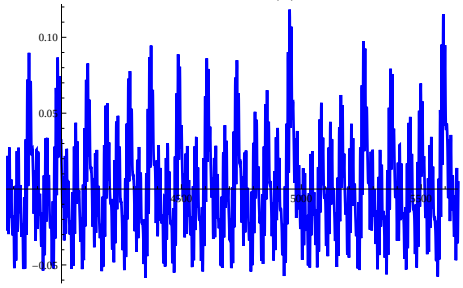

Fig.5d Time sequence of $\dot{r}(t)$ versus t in (T3).

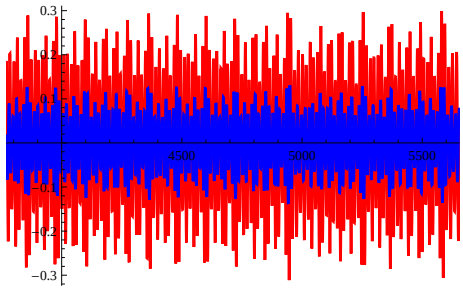

Fig.5e Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in (T3).

3.2 $c_1 = c_2 = 0.2$

系の規定値を $g = 1$, $\mu = 1.0125$, $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.2$, $X_0 = 0$, $Z_0 = 0.5$ とおく．微分方程式系 (2.3), (2.4) 式の初期値を $r(0) = 10$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0.22$, $\dot{\theta}(0) = 0$ と設定して，(2.3), (2.4) 式を時間 (T1) で数値積分した結果を **Fig.6a-6e** に示す.

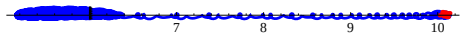

Fig.6a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in (T1).

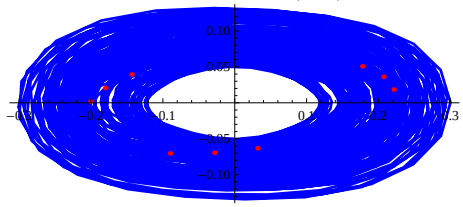

Fig.6b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in (T1).

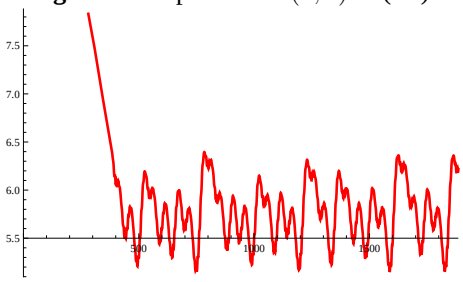

Fig.6c Time sequence of $r(t)$ versus t in (T1).

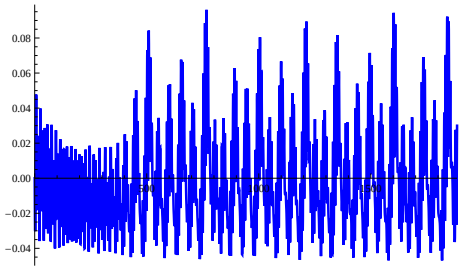

Fig.6d Time sequence of $\dot{r}(t)$ versus t in (T1).

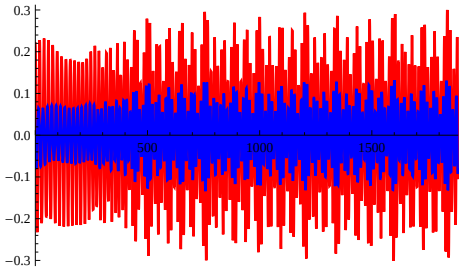

Fig.6e Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in (T1).

同様にして、時間 (T2) で数値積分した結果を **Fig.7a-7e** に示す.

Fig.7a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in (T2).

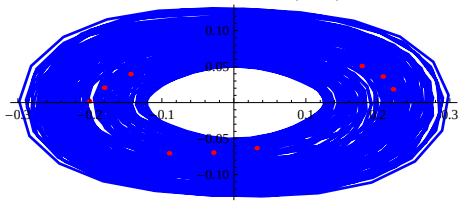

Fig.7b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in (T2).

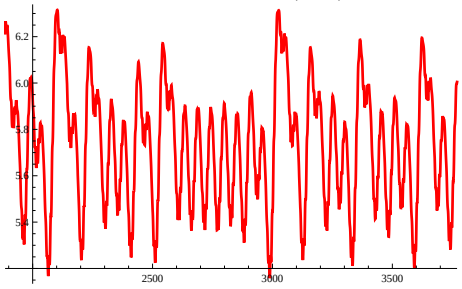

Fig.7c Time sequence of $r(t)$ versus t in (T2).

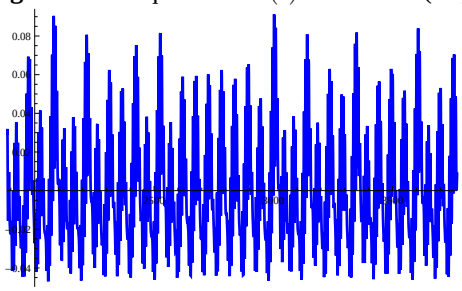

Fig.7d Time sequence of $\dot{r}(t)$ versus t in (T2).

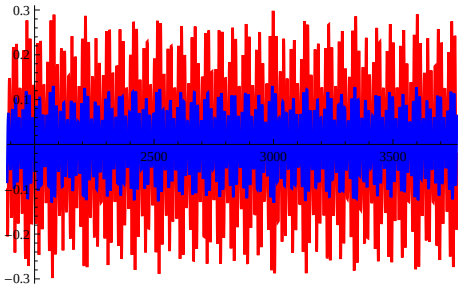

Fig.7e Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in (T2).

同様にして、時間 (T3) で数値積分した結果を **Fig.8a-8e** に示す.

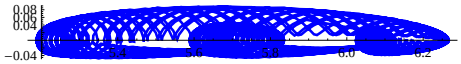

Fig.8a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in (T3).

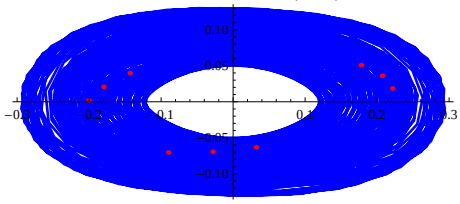

Fig.8b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in (T3).

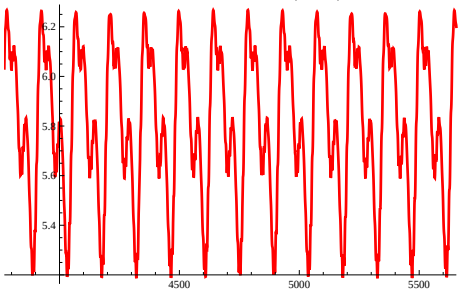

Fig.8c Time sequence of $r(t)$ versus t in (T3).

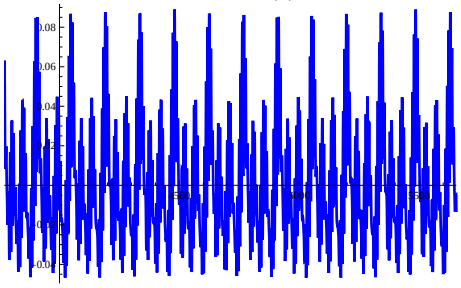

Fig.8d Time sequence of $\dot{r}(t)$ versus t in (T3).

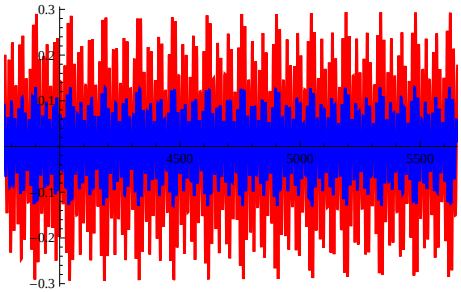

Fig.8e Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in (T3).

3.3 $c_1 = c_2 = 0.3$

系の規定値を $g = 1$, $\mu = 1.0125$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.3$, $X_0 = 0$, $Z_0 = 0.5$ とおく．微分方程式系 (2.3), (2.4) 式の

初期値を $r(0) = 10, \dot{r}(0) = 0, \theta(0) = 0.22, \dot{\theta}(0) = 0$ と設定して，(2.3), (2.4) 式を時間 (T1) で数値積分した結果を **Fig.9a-9e** に示す.

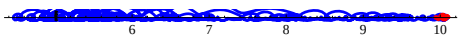

Fig.9a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in (T1).

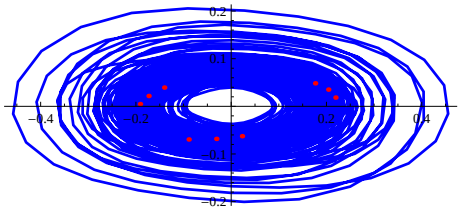

Fig.9b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in (T1).

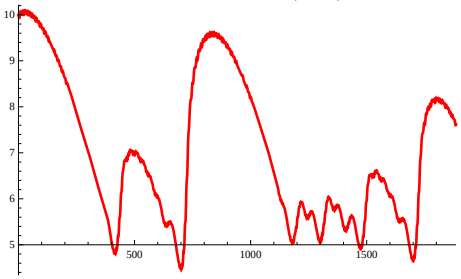

Fig.9c Time sequence of $r(t)$ versus t in (T1).

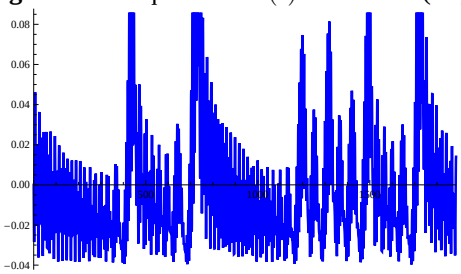

Fig.9d Time sequence of $\dot{r}(t)$ versus t in (T1).

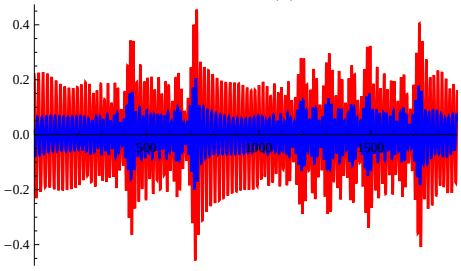

Fig.9e Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in (T1).

同様にして、時間 (T2) で数値積分した結果を **Fig.10a-10e** に示す.

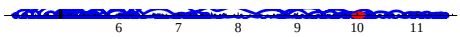

Fig.10a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in (T2).

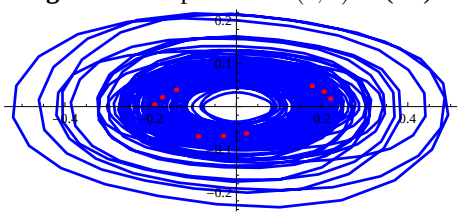

Fig.10b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in (T2).

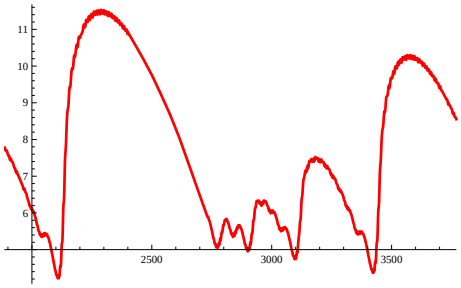

Fig.10c Time sequence of $r(t)$ versus t in (T2).

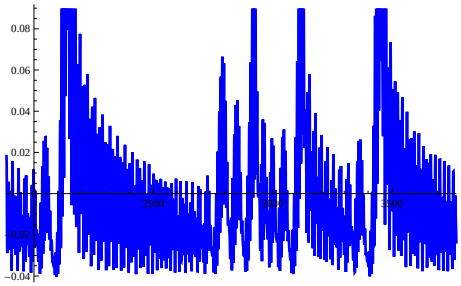

Fig.10d Time sequence of $\dot{r}(t)$ versus t in (T2).

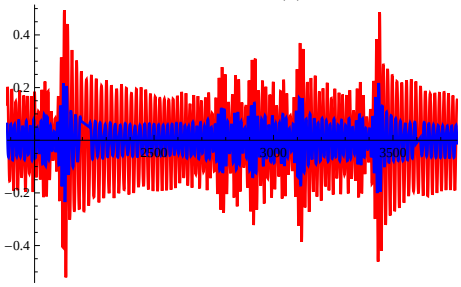

Fig.10e Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in (T2).

同様にして、時間 (T3) で数値積分した結果を **Fig.11a-11e** に示す.

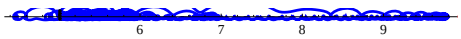

Fig.11a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in (T3).

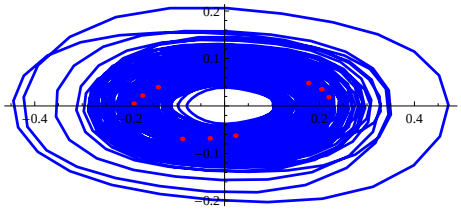

Fig.11b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in (T3).

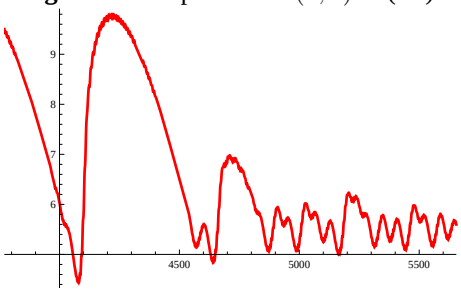

Fig.11c Time sequence of $r(t)$ versus t in (T3).

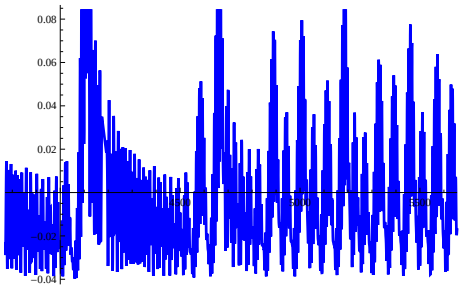

Fig.11d Time sequence of $\dot{r}(t)$ versus t in (T3).

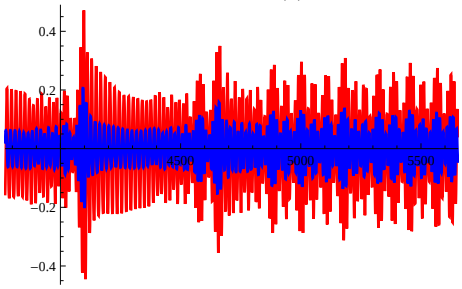

Fig.11e Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in (T3).

4 おわりに

本報告では揺動 Atwood 機械の運動方程式を導き，その連立非線形 2 階常微分方程式の力学的特性を論じ，数値計算により運動を解析した．$\mu > 1$ の場合に多彩な振動現象が起こり，カオス的振動解も見出された．

本研究遂行にあたり，本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して，柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] 大槻 真嗣 , 吉田 和夫 , 中川 俊明 , 木村 弘之 , 藤本 滋: “エレベータロープのロバスト振動制御 (機械力学, 計測, 自動制御)” 日本機械学會論文集. C 編 71(703), 859-866 ,20050325

[2] 三井 亜沙美 , 小檜山 雅之: “メインロープの震害軽減のための建物・エレベーター連成系の基礎的研究” 日本建築学会構造系論文集 (621), 41-48 ,20071130

[3] 馬場 敏光, 小檜山 雅之: “エレベーターロープの揺れを考慮したアクティブマスダンパーによる建物制震の基礎的検討” 第 57 回理論応用力学講演会 OS18 構造物のロバスト設計・最適設計，講演番号: 1B09，第 57 回理論応用力学講演会講演論文集 NCTAM2008, pp.31-32. http://www.jstage.jst.go.jp/article/japannctam/57/0/31/_pdf/-char/ja/

[4] 長田 朗，小林 英彦: “高層ビル用エレベーターの安全を支える制動技術とロープ技術 (< 特集 > セーフティと精密工学-安心のための設計・検査技術-)” 精密工学会誌 **75**(3) (2009), pp.346-350.

[5] 社団法人 日本エレベータ協会 http://www.n-elekyo.or.jp/

[6] 財団法人 日本建築設備・昇降機センター http://www.beec.or.jp/index.html

[7] A. Nunes, J. Casasayas, and N.B. Tufillaro: “Periodic orbits of the integrable swinging Atwood's machine” *American Journal of Physics* **63**(2), pp.121-126 (1995). The papers by Tufillaro can be accessed from URL (http://www.drchaos.net/drchaos/Sam/samrefs.html), where the file is saved as “File Name: sam_9.pdf.”

[8] N.B. Tufillaro: “Teardrop and heart orbits of a swinging Atwoods machine” *American Journal of Physics* **62**(3), pp.231-233 (1994). File Name: sam_8.pdf

[9] J. Casasayas, A. Nunes, and N.B. Tufillaro: “Swinging Atwood's machine: integrability and dynamics” *Journal de Physique* **51**, 1693 (1990). File Name: sam_7.pdf

[10] J. Casasayas, N.B. Tufillaro, and A. Nunes: “Infinity manifold of a swinging Atwood's machine” *European Journal of Physics* **10**(10), 173 (1989). File Name: sam_6.pdf

[11] N.B. Tufillaro, A. Nunes, and J. Casasayas: “Unbounded orbits of a swinging Atwood's machine” *American Journal of Physics* **56**(12), 1117 (1988). File Name: sam_5.pdf

[12] N.B. Tufillaro: “Integrable motion of a swinging Atwood's machine” *American Journal of Physics* **54**(2), 142 (1986). File Name: sam_4.pdf

[13] N.B. Tufillaro: “Motions of a swinging Atwood's machine” *Journal de Physique* **46**, 1495 (1985). File Name: sam_3.pdf

[14] N.B. Tufillaro: “Collision orbits of a swinging Atwood's machine” *Journal de Physique* **46**, 2053 (1985). File Name: sam_2.pdf

[15] N.B. Tufillaro, T.A. Abbott, and D.J. Griffiths: “Swinging Atwood's Machine” *American Journal of Physics* **52**(10), 895 (1984). File Name: sam_1.pdf

[16] N.B. Tufillaro: “Smiles and Teardrops (Senior Thesis),” Reed College Physics, 1982. File Name: sam_0.pdf

[17] Reed College Senior Physics Seminar 3 February 1982. Talk (pdf). Griffiths Memo (pdf).

[18] H.M. Yehia: “On the integrability of the motion of a heavy particle on a tilted cone and the swinging Atwood machine” *Mechanics Research Communications* **33** (2006), pp.711-716.

[19] 大庭 勝久，舟田 敏雄，中道 義之，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介: “揺動 Atwood 機械の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[20] 中道 義之，舟田 敏雄，岩本 大、大庭 勝久、杉山 清隆、藤田 將喜、漆畑 勇太: “揺動 Atwood 機械の水平方向パラメトリック励振の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[21] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，中道 義之、杉山 清隆、藤田 將喜、漆畑 勇太: “揺動 Atwood 機械の鉛直面内回転的パラメトリック励振の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[22] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大、杉山 清隆、藤田 將喜、漆畑 勇太，中道 義之、川上 誠、望月 孔二、宮内 太積: “揺動 Atwood 機械の鉛直面内回転的パラメトリック励振の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[23] 中道 義之，大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介: “ 球面振子の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[24] 大庭 勝久、中道 義之、舟田 敏雄、岩本 大、清水 啓介: “変形球面振子の解析とその強制減衰振動の数値解析” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.