揺動 Atwood 機械の数値 simulation

大庭 勝久[*1*2] 舟田 敏雄[*1*2] 中道 義之[*2*3] 岩本 大[*1] 清水 啓介[*1] 船津 佑介[*1]

Numerical Simulation of Swinging Atwood's Machine

Katsuhisa OOBA[*1*2] Toshio FUNADA[*1*2] Yoshiyuki NAKAMICHI[*2*3] Dai IWAMOTO[*1]
Keisuke SHIMIZU[*1] and Yusuke FUNATSU[*1]

Abstract: Atwood's machine is a representative and simple device in mechanics, but it performs very complex phenomena when one body at its end swings in a vertical plane, which is referred to as swinging Atwood's machine (SAM). This has been extensively studied by Tufillaro and coworkers (N. B. Tufillaro, T. A. Abbott, and D. J. Griffiths, Swinging Atwood's Machine, American Journal of Physics 52 (10) (1984), pp.895-903) to reveal periodic and chaotic motions. We revisited this mechanical device to make PBL (Problem Based Learning) resources and practice problems for numerical computations. It is then extended to involve parametric oscillations, spherical pendulum or other mechanisms for engineering applications.

Keywords: Swinging Atwood's Machine, Periodic and Chaotic Motion

1 はじめに

「初等教育から高等教育までの振子の教程で，どのような教材を用いて何を教育されているか」を現在の技術者教育の視点から調査研究することを本研究の目的とし，外国の高等教育機関の物理学・工学実験教材も調査して来た[1]．その代表的な教材の一つに「揺動 Atwood 機械 (swinging Atwood's machine, SAM)」があるが，国内では高等教育の教材に取り入れられている事例は少ないようである．元来の「Atwood の機械」自体は，高校課程でも扱われており，教育研究例もある．揺動 Atwood 機械の特性は，特に Tufillaro[2]–[12] により Hamilton 系の力学問題として精力的に研究されている．最近では Yehia[13] の報告がある．Tufillaro[2] は, SAM の奇異な特徴を次のように述べている: It might be supposed that SAM (Swinging Atwood's Machine) — like the simple Atwood's Machine — admits only runaway solutions (with the trivial exception of the equilibrium at $m = M$). But this is far from true; as we shall see, there is a rich variety of bounded and even periodic motions, which occur when M exceeds m. Under approximate conditions the centrifugal pseudoforce on the swinging mass balances the extra weight of the hanging mass, imparting to the system a kind of dynamical equilibrium with no counter part in the simple Awood's Machine. つまり，Atwood の機械の一方の錘 (質量 m) が揺動することにより，非常に多彩な現象が現れることが指摘されている．本報告でも，Tufillaro[2] に習い，SAM の運動方程式の解析と数値計算を行い SAM の特性を解明する．§2 では揺動 Atwood 機械の力学問題を定式化し，§3 では運動方程式の初期値問題を数値解析する．さらに，§4 では設定条件を変えて運動方程式を数値解析する．

2 揺動 Atwood 機械の運動方程式

Fig.1 の左側の質量 M の物体は，左側の滑車から鉛直に吊り下がっており，上下に運動する．右側の質量 m の錘は，右側の滑車からの距離を r，鉛直軸との角度を θ として，鉛直面内で振子運動する．紐の全長を r_0 とすると，物体の鉛直位置は $r_0 - r - c$ である．

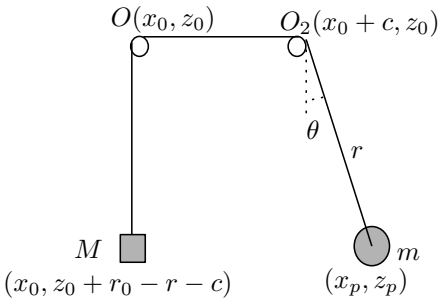

Fig.1 Swinging Atwood's Machine.

平面極座標 (r, θ) を用い，右側の錘の位置が記述でき，左側の錘の鉛直変位は r で記述できる．それぞれの錘の運動 energy と重力 potential energy を求めると，この系の運動を記述する Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ は次のように表わされる:

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + Mg(r_0 - r - c) + mrg\cos(\theta) \tag{2.1}$$

質量比 $\mu = M/m$ を導入し，$\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}_1$ に書き換える:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - gr\left(\mu - \cos(\theta)\right) \tag{2.2}$$

これにより，Lagrange の運動方程式は次式となる;

$$(1+\mu)\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g\left(\mu - \cos(\theta)\right) = 0, \tag{2.3}$$

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} + gr\sin(\theta) = 0 \tag{2.4}$$

[*1] 電子制御工学科: Department of Digital Engineering.
[*2] 専攻科: Advanced Engineering Course.
[*3] 総合情報センター: Information Technology Center.

これらは，θ に関して非線形項が含まれている連立非線形微分方程式であり，初期値問題として解くことができる．(2.3), (2.4) 式は，また，自律系の方程式であり，系の力学的 energy が保存するので，有界な領域に解があり，周期解を持つことが示される:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + gr\left(\mu - \cos(\theta)\right) \\
&\geq \frac{\mu+1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + gr\left(\mu - 1\right) \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

また，力学的 energy 保存状態は数値計算精度の確認にも用いられる．

3　数値計算 (1)

系の規定値 ($\mu = 1.0125$, $g = 1$, $r(0) = 10$, $\dot{r}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$) に対して，初期角度を (i) $\theta(0) = 0.1$, (ii) $\theta(0) = 0.3$, (iii) $\theta(0) = 0.5$, (iv) $\theta(0) = 0.7$ と取って数値計算した結果を示す．(i) の場合，$r(t) \leq 10$ で変化する．(ii) の場合には $10 \leq r(t) \leq 22$，(iii) の場合には $10 \leq r(t) \leq 70$，(iv) の場合には $10 \leq r(t) \leq 150$ で変化する．つまり，初期角度の値によって，$r(t)$ の変化する範囲が異なる．

3.1　$\mu = 1.0125$ の計算例

微分方程式系 (2.3), (2.4) 式の初期値を $r(0) = 10$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0.1$, $\dot{\theta}(0) = 0$ と平衡点の近傍に設定して，(2.3), (2.4) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 62$) で数値積分した結果を **Fig.2a-2d** に示す．

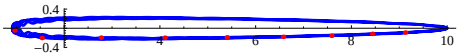

Fig.2a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 62$.

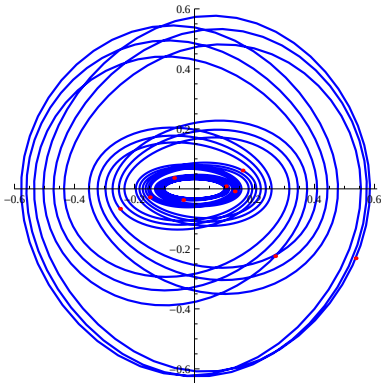

Fig.2b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 62$.

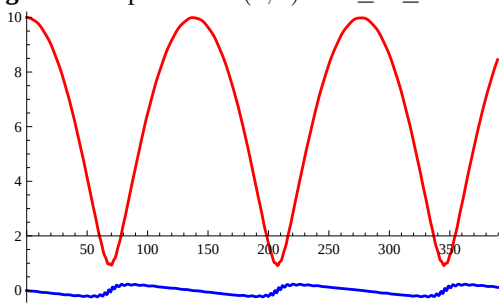

Fig.2c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 62$.

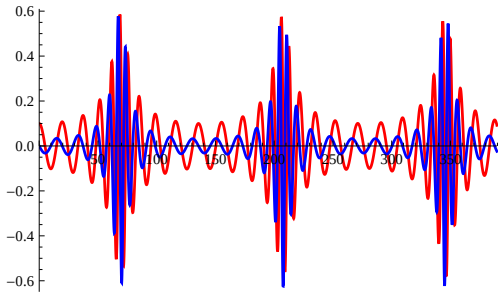

Fig.2d Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 62$.

系の規定値は同様とし，初期値を $r(0) = 10$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0.3$, $\dot{\theta}(0) = 0$ と設定し，方程式系 (2.3), (2.4) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 122$) で数値積分した結果を **Fig.3a-3d** に示す．

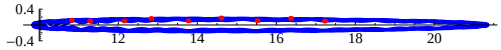

Fig.3a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 122$.

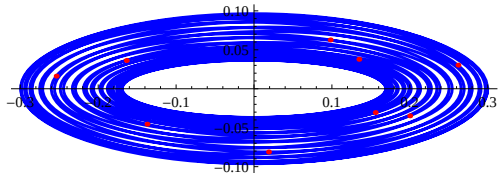

Fig.3b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 122$.

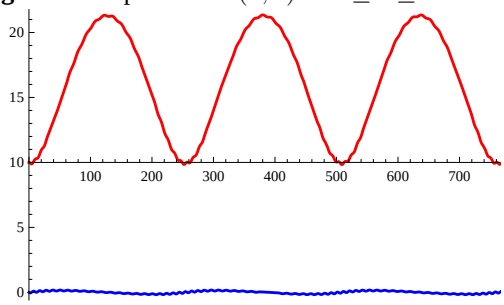

Fig.3c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 122$.

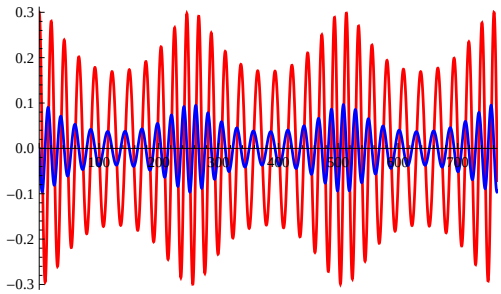

Fig.3d Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 122$.

系の規定値は同様とし，初期値を $r(0) = 10$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0.5$, $\dot{\theta}(0) = 0$ と設定し，方程式系 (2.3), (2.4) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 122$) で数値積分した結果を **Fig.4a-4d** に示す．

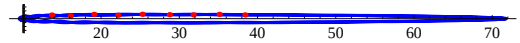

Fig.4a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 122$.

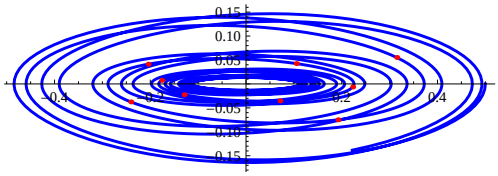

Fig.4b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \le t \le 2\pi \times 122$.

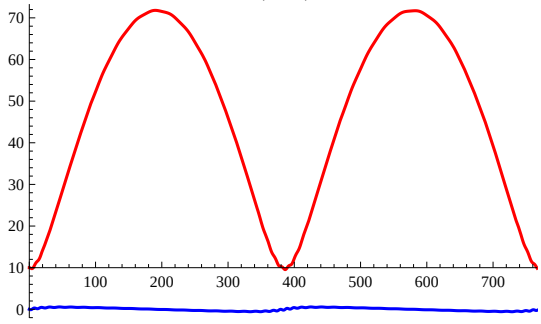

Fig.4c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \le t \le 2\pi \times 122$.

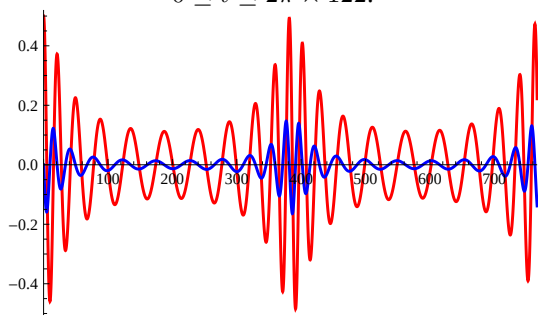

Fig.4d Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in $0 \le t \le 2\pi \times 122$.

系の規定値は同様とし，初期値を $r(0) = 10$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0.7$, $\dot{\theta}(0) = 0$ と設定し，方程式系 (2.3), (2.4) 式を時間 $0 \le t \le t_e$ ($t_e = 2\pi \times 202$) で数値積分した結果を **Fig.5a-5d** に示す．

Fig.5a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in $0 \le t \le 2\pi \times 202$.

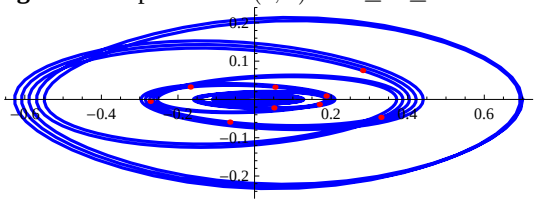

Fig.5b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \le t \le 2\pi \times 202$.

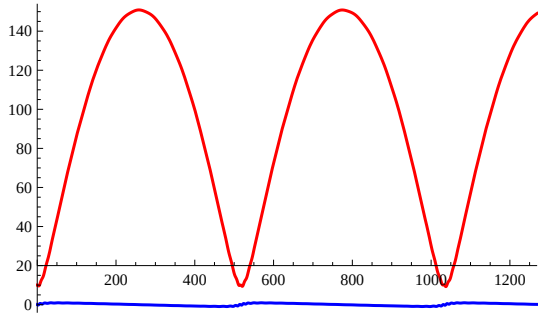

Fig.5c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \le t \le 2\pi \times 202$.

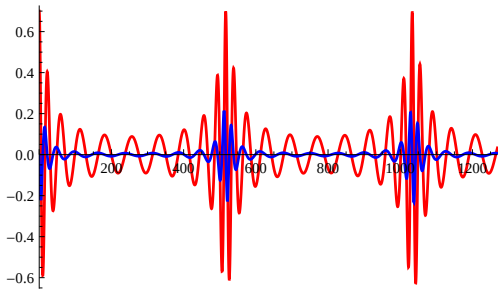

Fig.5d Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in $0 \le t \le 2\pi \times 202$.

3.2 μ が大きい値のときの計算例

系の規定値 ($g = 1$, $r(0) = 10$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0.1$, $\dot{\theta}(0) = 0$) に対して，質量比 μ を (a) $\mu = 2$, (b) $\mu = 3$, (c) $\mu = 4$ と設定して数値計算した結果を示す．この場合には，いずれも $r(t) \le 10$ であり，初期値とそれによる E_1 の値とによって，$r(t)$ の上限が決まる．

揺動 Atwood 機械の規定値を $\mu = 2$ とおく．微分方程式系 (2.3), (2.4) 式の初期値を $r(0) = 10$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0.1$, $\dot{\theta}(0) = 0$ と平衡点に設定して，(2.3), (2.4) 式を時間 $0 \le t \le t_e$ ($t_e = 2\pi \times 62$) で数値積分した結果を **Fig.6a-6f** に示す．

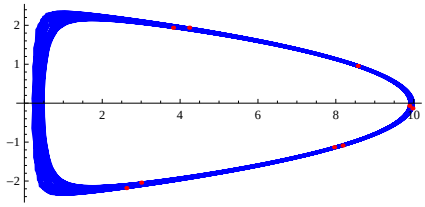

Fig.6a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in $0 \le t \le 2\pi \times 62$.

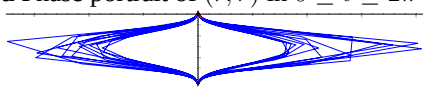

Fig.6b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \le t \le 2\pi \times 62$.The figure is rotated by 90°.

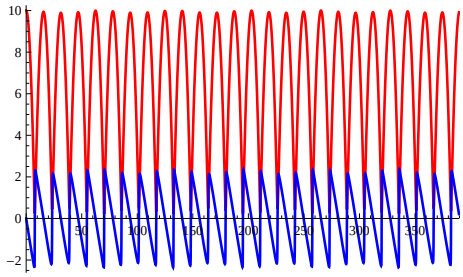

Fig.6c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \le t \le 2\pi \times 62$.

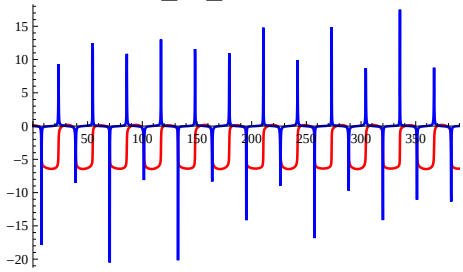

Fig.6d Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in $0 \le t \le 2\pi \times 62$.

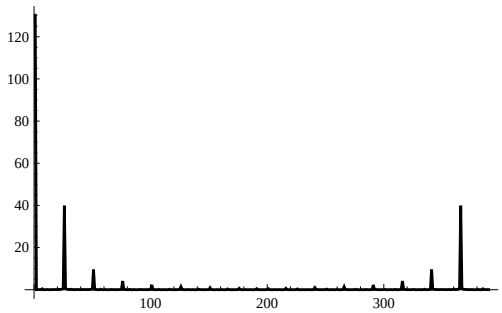

Fig.6e Spectrum of $r(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 62$.

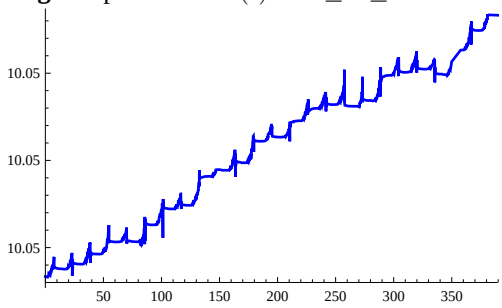

Fig.6f Total mechanical energy $E_1(t)$ in $0 \le t \le 2\pi \times 62$.

揺動 Atwood 機械の規定値を $\mu = 3$ とおく．微分方程式系 (2.3), (2.4) 式の初期値を $r(0) = 10$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0.1$, $\dot{\theta}(0) = 0$ と平衡点に設定して，(2.3), (2.4) 式を時間 $t_s \le t \le t_e$ ($t_s = 2\pi \times 20$, $t_e = 2\pi \times 122$) で数値積分した結果を **Fig.7a-7f** に示す．

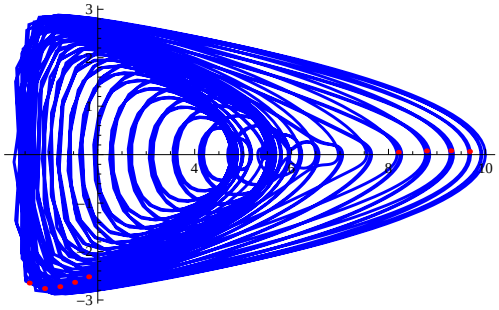

Fig.7a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in $2\pi \times 20 \le t \le 2\pi \times 122$.

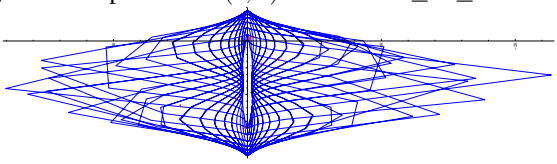

Fig.7b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $2\pi \times 20 \le t \le 2\pi \times 122$.The figure is rotated by 90°.

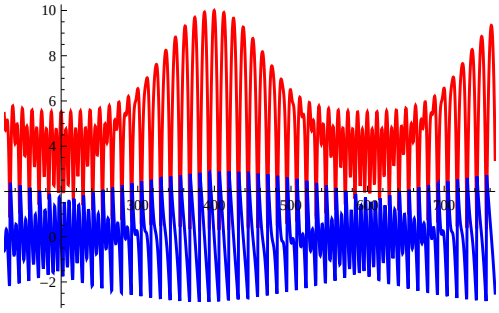

Fig.7c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $2\pi \times 20 \le t \le 2\pi \times 122$.

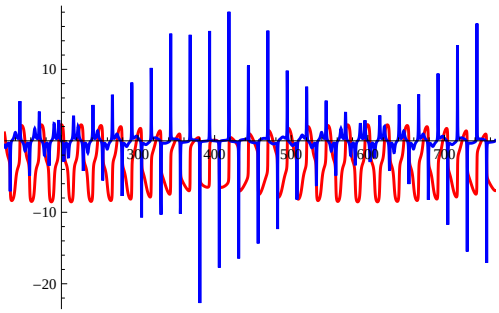

Fig.7d Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in $2\pi \times 20 \le t \le 2\pi \times 122$.

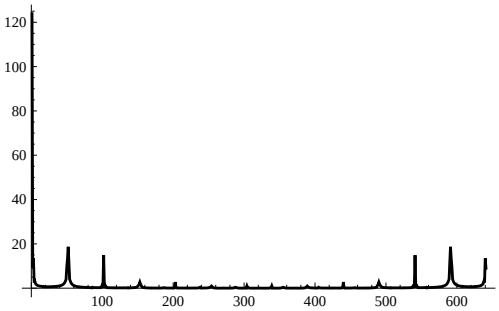

Fig.7e Spectrum of $r(t)$ in $2\pi \times 20 \le t \le 2\pi \times 122$.

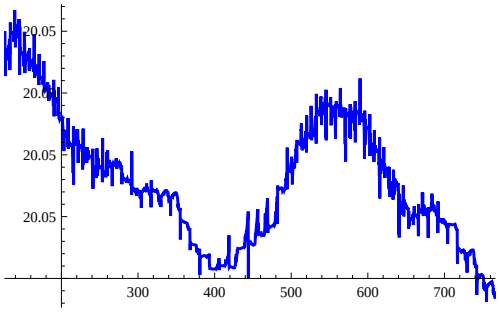

Fig.7f Total mechanical energy $E_1(t)$ in $2\pi \times 20 \le t \le 2\pi \times 122$.

揺動 Atwood 機械の規定値を $\mu = 4$ とおく．微分方程式系 (2.3), (2.4) 式の初期値を $r(0) = 10$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0.1$, $\dot{\theta}(0) = 0$ と平衡点に設定して，(2.3), (2.4) 式を時間 $t_s \le t \le t_e$ ($t_s = 2\pi \times 20$,$t_e = 2\pi \times 62$) で数値積分した結果を **Fig.8a-8f** に示す．

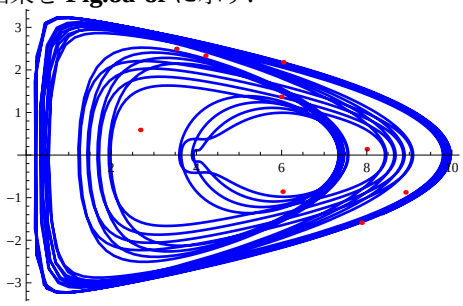

Fig.8a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in $2\pi \times 20 \le t \le 2\pi \times 62$.

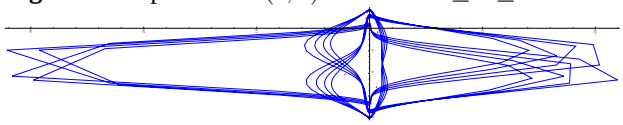

Fig.8b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $2\pi \times 20 \le t \le 2\pi \times 62$.The figure is rotated by 90°.

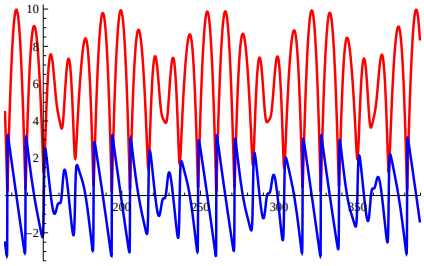

Fig.8c Time sequence of $r(t)$ and $\dot{r}(t)$ versus t in $2\pi \times 20 \leq t \leq 2\pi \times 62$.

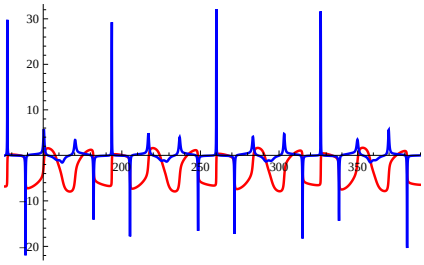

Fig.8d Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in $2\pi \times 20 \leq t \leq 2\pi \times 62$.

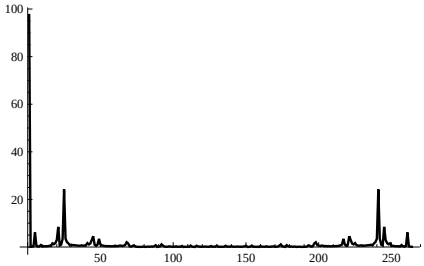

Fig.8e Spectrum of $r(t)$ in $2\pi \times 20 \leq t \leq 2\pi \times 62$.

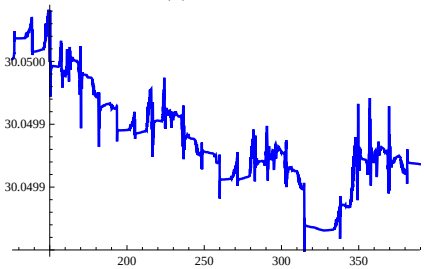

Fig.8f Total mechanical energy $E_1(t)$ in $2\pi \times 20 \leq t \leq 2\pi \times 62$.

4　数値計算 (2)

揺動 Atwood 機械の規定値を $\mu = 1.0125$ とおく．微分方程式系 (2.3), (2.4) 式の初期値を $r(0) = 10$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0.22$, $\dot{\theta}(0) = 0$ と平衡点に設定して，(2.3), (2.4) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値積分した結果を **Fig.9a-9e** に示す．

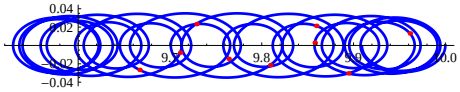

Fig.9a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 32$.

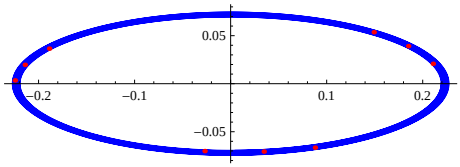

Fig.9b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 32$.

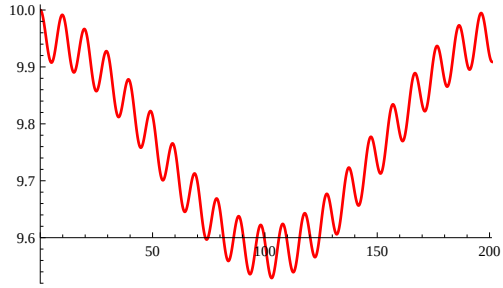

Fig.9c Time sequence of $r(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 32$.

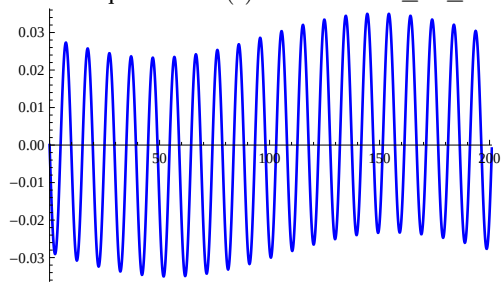

Fig.9d Time sequence of $\dot{r}$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 32$.

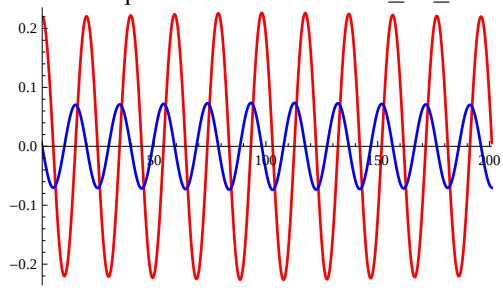

Fig.9e Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 32$.

系の規定値は同様とし，初期値を $r(0) = 10$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0.23$, $\dot{\theta}(0) = 0$ と設定し，方程式系 (2.3), (2.4) 式を時間 $0 \leq t \leq t_e$ ($t_e = 2\pi \times 32$) で数値積分した結果を **Fig.10a-10e** に示す．

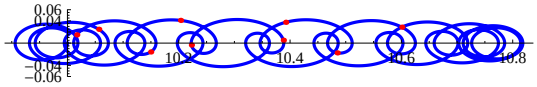

Fig.10a Phase portrait of $(r, \dot{r})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 32$.

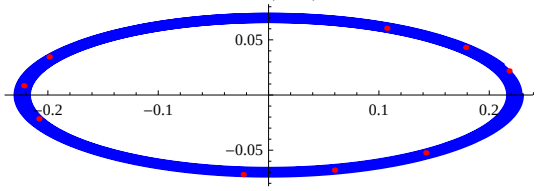

Fig.10b Phase portrait of $(\theta, \dot{\theta})$ in $0 \leq t \leq 2\pi \times 32$.

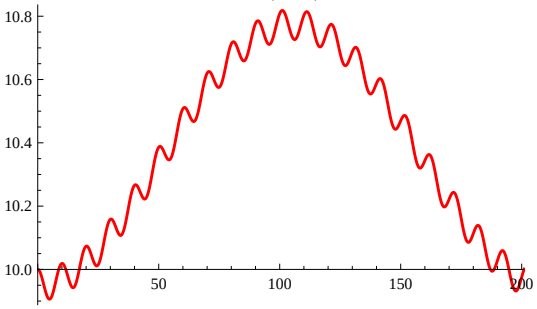

Fig.10c Time sequence of $r(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 32$.

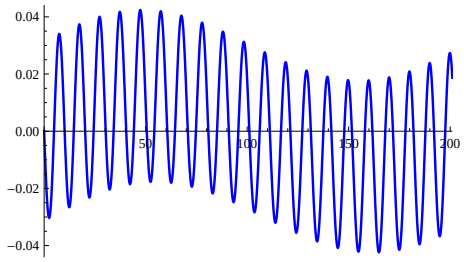

Fig.10d Time sequence of $\dot{r}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 32$.

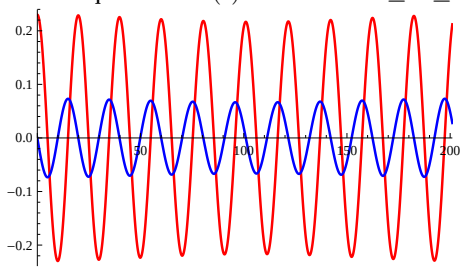

Fig.10e Time sequence of $\theta(t)$ and $\dot{\theta}(t)$ versus t in $0 \leq t \leq 2\pi \times 32$.

5　おわりに

本報告では揺動 Atwood 機械の運動方程式を導き，その連立非線形 2 階常微分方程式の力学的特性を論じ，数値計算により運動を解析した．この場合，力学的 energy が保存量であり，振子の重力 potential energy による非線形効果が含まれている．従って，周期的振動と共にカオスが起こり得る．数値解析により，$\mu > 1$ の場合に多彩な振動現象が起こり，カオス的振動解も見出された．また，$r(t)$ の振舞の分類 (**Fig.2c**, **3c**, **4c**, **5c**) は新たな知見と思われる．しかしながら，Tufillaro[2] の結果を参考に，さらに詳しい数値解析が求められる．本報告に続き，揺動 Atwood 機械のパラメトリック励振の数値 simulation では，鉛直方向励振[14]，水平方向励振[15]，鉛直面内の回転的励振[16] の数値解析を試みた．また，揺動 Atwood 機械問題の球面振子への拡張[17] を行ったので，それらも参照されたい．

本研究遂行にあたり，本校の校長リーダーシップ経費による支援を受けたことをここに記して，柳下福蔵校長に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] 舟田 敏雄，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介，石本 拓也，中道 義之，大庭 勝久，宮内 太積，川上 誠，望月 孔二: “出前授業のための「振子」教材の整備” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[2] A. Nunes, J. Casasayas, and N.B. Tufillaro: “Periodic orbits of the integrable swinging Atwood’s machine” *American Journal of Physics* **63**(2), pp.121-126 (1995). The papers by Tufillaro can be accessed from URL (http://www.drchaos.net/drchaos/Sam/samrefs.html), where the file is saved as “File Name: sam_9.pdf.”

[3] N.B. Tufillaro: “Teardrop and heart orbits of a swinging Atwoods machine” *American Journal of Physics* **62**(3), pp.231-233 (1994). File Name: sam_8.pdf

[4] J. Casasayas, A. Nunes, and N.B. Tufillaro: “Swinging Atwood’s machine: integrability and dynamics” *Journal de Physique* **51**, 1693 (1990). File Name: sam_7.pdf

[5] J. Casasayas, N.B. Tufillaro, and A. Nunes: “Infinity manifold of a swinging Atwood’s machine” *European Journal of Physics* **10**(10), 173 (1989). File Name: sam_6.pdf

[6] N.B. Tufillaro, A. Nunes, and J. Casasayas: “Unbounded orbits of a swinging Atwood’s machine” *American Journal of Physics* **56**(12), 1117 (1988). File Name: sam_5.pdf

[7] N.B. Tufillaro: “Integrable motion of a swinging Atwood’s machine” *American Journal of Physics* **54**(2), 142 (1986). File Name: sam_4.pdf

[8] N.B. Tufillaro: “Motions of a swinging Atwood’s machine” *Journal de Physique* **46**, 1495 (1985). File Name: sam_3.pdf

[9] N.B. Tufillaro: “Collision orbits of a swinging Atwood’s machine” *Journal de Physique* **46**, 2053 (1985). File Name: sam_2.pdf

[10] N.B. Tufillaro, T.A. Abbott, and D.J. Griffiths: “Swinging Atwood’s Machine” *American Journal of Physics* **52**(10), 895 (1984). File Name: sam_1.pdf

[11] N.B. Tufillaro: “Smiles and Teardrops (Senior Thesis),” Reed College Physics, 1982. File Name: sam_0.pdf

[12] Reed College Senior Physics Seminar 3 February 1982. Talk (pdf). Griffiths Memo (pdf).

[13] H.M. Yehia: “On the integrability of the motion of a heavy particle on a tilted cone and the swinging Atwood machine” *Mechanics Research Communications* **33** (2006), pp.711-716.

[14] 舟田 敏雄，大庭 勝久，中道 義之，岩本 大，清水 啓介，船津 佑介: “揺動 Atwood 機械の鉛直方向パラメトリック励振の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[15] 中道 義之，舟田 敏雄，岩本 大，大庭 勝久，杉山 清隆，藤田 將喜，漆畑 勇太: “揺動 Atwood 機械の水平方向パラメトリック励振の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[16] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，中道 義之，杉山 清隆，藤田 將喜，漆畑 勇太: “揺動 Atwood 機械の鉛直面内回転的パラメトリック励振の数値 simulation” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.

[17] 大庭 勝久，舟田 敏雄，岩本 大，杉山 清隆，藤田 將喜，漆畑 勇太，中道 義之，川上 誠，望月 孔二，宮内 太積: “揺動 Atwood 機械の数値 simulation: 球面振子” 沼津高専研究報告 第 44 号 (2010), in press.