

## 2 輪駆動系の線形制御

瀬川 博貴

## 1. 2輪駆動系の動力学モデル

### 1.1 2輪駆動系の運動方程式

2輪駆動系の走行系のモデルを示す(図1)。2輪駆動系の運動は重心の並進運動と重心まわりの回転運動に分離できる。重心と回転中心が一致しているとする、それぞれの運動方程式は次のように表される。

並進運動に関する運動方程式

$$M\dot{V} + c_v V = F_r + F_l \quad (1.1)$$

回転運動に関する運動方程式

$$J\dot{\omega} + c_\omega \omega = b(F_r - F_l) \quad (1.2)$$

ただし、

$M$  : 制御対象の質量

$J$  : 制御対象の慣性モーメント

$V$  : 制御対象の並進速度

$\omega$  : 制御対象の回転速度

$c_v$  : 速度抵抗,  $c_\omega$  : 角速度抵抗

$F_r, F_l$  : 左右タイヤにかかる力

$b$  : 制御対象の重心からタイヤ中心までの距離

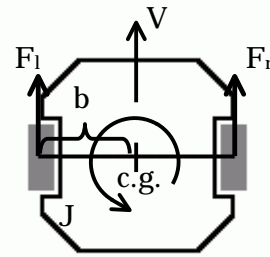


図 1

### 1.2 タイヤと制御対象の動作の関係

タイヤの直径を  $d$  として、左右のタイヤの角速度をそれぞれ  $\omega_l, \omega_r$  とすると、

$$V = \frac{d}{4}(\omega_r + \omega_l) \quad (1.3)$$

$$\omega = \frac{d}{4b}(\omega_r - \omega_l) \quad (1.4)$$

(1.1) + (1.2)/b より、

$$F_r = a_1 \dot{\omega}_r + a_2 \dot{\omega}_l + c_1 \omega_r + c_2 \omega_l \quad (1.5)$$

(1.1) - (1.2)/b より、

$$F_l = a_2 \dot{\omega}_r + a_1 \dot{\omega}_l + c_2 \omega_r + c_1 \omega_l \quad (1.6)$$

ただし、

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{d}{8} \left( M + \frac{J}{b^2} \right), & a_2 &= \frac{d}{8} \left( M - \frac{J}{b^2} \right), \\ c_1 &= \frac{d}{8} \left( c_v + \frac{c_\omega}{b^2} \right), & c_2 &= \frac{d}{8} \left( c_v - \frac{c_\omega}{b^2} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

### 1.3 タイヤ系の運動方程式

モーター単独の回転に関する方程式（モーター方程式）は、

$$J\dot{\omega} + \left( D + \frac{K_t K_e}{R} \right) \omega = \frac{K_t}{R} E \quad (1.8)$$

である。ただし、

$R$  : モーターの抵抗,  $I$  : モーターの電流,  $E$  : モーターにかかる電圧

$K_e$  : 逆起電力定数,  $K_t$  : トルク定数,  $D$  : モーターの摩擦抵抗

ここで、モーター、ギア、タイヤを含めた系をタイヤ系とする。

タイヤ系ではモーター方程式にタイヤからのトルクが加わり、慣性モーメント、角速度抵抗もモーター単独のものとは異なる。それらを考慮したタイヤ系の方程式は次のように表される。

$$J_r \dot{\omega}_r + c_r \omega_r = b_r E_r - \frac{1}{2} F_r d \quad (1.9)$$

$$J_l \dot{\omega}_l + c_l \omega_l = b_l E_l - \frac{1}{2} F_l d \quad (1.10)$$

ただし、

$E_r, E_l$  : 左右のモーターへの印加電圧,  $J_r, J_l$  : 左右のタイヤ系の慣性モーメント

$b_r, b_l$  : 左右のタイヤ系の電圧係数

### 1.4 2輪駆動系モデルの方程式

(1.9),(1.10)式に(1.5),(1.6)式を代入し整理すると、

$$\left( J_r + \frac{d}{2} a_1 \right) \dot{\omega}_r + \frac{d}{2} a_2 \dot{\omega}_l = - \left( c_r + \frac{d}{2} c_1 \right) \omega_r - \frac{d}{2} c_2 \omega_l + b_r E_r \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{2} a_2 \dot{\omega}_r + \left( J_l + \frac{d}{2} a_1 \right) \dot{\omega}_l = - \frac{d}{2} c_2 \omega_r - \left( c_l + \frac{d}{2} c_1 \right) \omega_l + b_l E_l \quad (1.12)$$

これらを1つの式に整理すると、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega_r \\ \omega_l \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}_c \begin{bmatrix} \omega_r \\ \omega_l \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{B}}_c \begin{bmatrix} E_r \\ E_l \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

ただし、

$$\tilde{\mathbf{A}}_c = - \begin{bmatrix} J_r + \frac{d}{2} a_1 & \frac{d}{2} a_2 \\ \frac{d}{2} a_2 & J_l + \frac{d}{2} a_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_r + \frac{d}{2} c_1 & \frac{d}{2} c_2 \\ \frac{d}{2} c_2 & c_l + \frac{d}{2} c_1 \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_c = \begin{bmatrix} J_r + \frac{d}{2} a_1 & \frac{d}{2} a_2 \\ \frac{d}{2} a_2 & J_l + \frac{d}{2} a_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_r & 0 \\ 0 & b_l \end{bmatrix}$$

この制御系の目標値が、変位 $\theta_r, \theta_l$ で与えられるとき、状態量は左右のタイヤの回転角と角速度となり、4次の状態方程式となる。したがって、状態方程式および出力方程式は、

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (1.15)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) \quad (1.16)$$

ここで、 $\{\tilde{a}_{i,j}\} = \tilde{\mathbf{A}}_c, \{\tilde{b}_{i,j}\} = \tilde{\mathbf{B}}_c$ とすると、状態変数ベクトルは $\mathbf{x} = [\theta_r, \theta_l, \omega_r, \omega_l]^T$ であるから、次のように書ける。

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} E_r \\ E_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \theta_r \\ \theta_l \end{bmatrix}$$

## 2. 制御器の構成

### 2.1 サーボ系（積分器の導入）

サーボ系に対して定常偏差が生じないようにするために、偏差を積分した値を入力として加える必要があり、状態の推定値および偏差の満たすべき方程式は、次のようになる。

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K}_c - \mathbf{H}_c \mathbf{C}_c) \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}_c \mathbf{K}_I \mathbf{v}(t) \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) \quad (2.2)$$

これらを、 $\zeta(t) = [\hat{\mathbf{x}}(t) \quad \mathbf{v}(t)]^T, \eta(t) = [\mathbf{r}(t) \quad \mathbf{y}(t)]^T$ として整理すると、

$$\dot{\zeta}(t) = \mathbf{A}_{cc} \zeta(t) + \mathbf{B}_{cc} \eta(t) \quad (2.3)$$

また、入力 $\mathbf{u}(t)$ は、

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}_{cc} \zeta(t) \quad (2.4)$$

で与えられる。ここで、

$$\mathbf{A}_{cc} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K}_c - \mathbf{H}_c \mathbf{C}_c & -\mathbf{B}_c \mathbf{K}_I \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B}_{cc} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{cc} = -[\mathbf{K}_c \quad \mathbf{K}_I]$$

### 2.2 連続系から離散系への変換

(2.3),(2.4)を離散系に変換すると、(2.6),(2.7)のようになる。

$$\zeta(k+1) = \mathbf{A}_d \zeta(k) + \mathbf{B}_d \eta(k) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{C}_d \boldsymbol{\zeta}(k) \quad (2.7)$$

ただし、

$$\mathbf{A}_d = \exp(\mathbf{A}_{cc} T), \quad \mathbf{B}_d = \mathbf{A}_{cc}^{-1} [\mathbf{A}_d - \mathbf{I}] \mathbf{B}_{cc}, \quad \mathbf{C}_d = \mathbf{C}_{cc} \quad (2.9)$$

(T : サンプルング時間)

### 3. パラメーターの決定

全体の質量 M は重量計, タイヤ直径 d, 回転中心からタイヤまでの距離 b はノギス等で事前に測っておく。

#### 3.1 タイヤ系のパラメーターの導出(タイヤは接地させない)

まず、タイヤ系の係数である  $b_r, b_l, c_r, c_l, J_r, J_l$  を決定する必要がある。

(1.9), (1.10) はタイヤ接地面からの力が働かないとすると、次式となる。

$$J_r \dot{\omega}_r + c_r \omega_r = b_r E_r = T_r \quad (3.1)$$

$$J_l \dot{\omega}_l + c_l \omega_l = b_l E_l = T_l \quad (3.2)$$

ここで、(3.1), (3.2) より、次の関係式を得る。

$$b_r = \frac{T_r}{E_r}, \quad c_r = \frac{T_r}{\omega_{r\infty}}, \quad J_r = \tau_r c_r \quad (3.3)$$

$$b_l = \frac{T_l}{E_l}, \quad c_l = \frac{T_l}{\omega_{l\infty}}, \quad J_l = \tau_l c_l \quad (3.4)$$

ただし、

$\omega_l, \omega_r$  : 左右のタイヤ系の角速度

$\omega_{l\infty}, \omega_{r\infty}$  : 左右のタイヤ系の最終角速度

$\tau_l, \tau_r$  : 左右のタイヤ系の応答時定数

$T_l, T_r$  : 左右のタイヤ系にかかるトルク

$c_l, c_r$  : 左右のタイヤ系の角速度係数

(3.3), (3.4) の関係を用いタイヤ系のパラメーターを導出するために、タイヤを浮かせた状態で以下の手順で実験を行い、 $b_r, b_l, c_r, c_l, J_r, J_l$  値を求める。

< 左右のタイヤ系の電圧係数の導出 >

左右のタイヤの駆動力をバネばかりで測り、トルク ( $T_l, T_r$ ) と Duty 比の関係を求める。

Duty 比と実効電圧 ( $E_l, E_r$ ) の関係を出す。

よりトルクと電圧の関係を求め、その勾配  $\frac{\Delta T}{\Delta E}$  から電圧係数( $b_l, b_r$ )を算出する。

<左右のタイヤ系の角速度係数の導出>

左右のタイヤの最終角速度( $\omega_{l\infty}, \omega_{r\infty}$ )と電圧の関係を求める。

先に求められた電圧係数と の勾配  $\frac{\Delta \omega}{\Delta E}$  から角速度係数( $c_l, c_r$ )を算出する。

<左右タイヤ系の慣性モーメントの導出>

立ち上がりのグラフより、応答時定数(定常値の63%になる時間)を求める。

応答時定数に角速度係数を掛けたものが慣性モーメントである。

### 3.2 本体のパラメーターの導出(タイヤは接地させる)

本体を床に置き、直進走行、回転走行を行い  $c_v, c_\omega, J$  を求める。

#### 3.2.1 直進走行による $c_v$ の導出

(1.1)より  $M\dot{V} + c_v V = F_r + F_l$  であるから、 $t \rightarrow \infty$  とすると、 $c_v$  は次式で表される。

$$c_v = \frac{F_r + F_l}{V_\infty} \quad (3.5)$$

ただし、

$V_\infty$  : 直進走行の最終速度

(3.5)の関係をを用い速度抵抗を導出するために、本体を床に置き直進走行をさせて、以下の手順でパラメーターを求める。

駆動力の合計( $F_r + F_l$ )は本体後部中央からバネばかりを使い測定する。

駆動力の合計と Duty 比の関係を求める。

Duty 比と最終直進速度の関係を求める。

最終直進速度と駆動力との関係から速度抵抗( $c_v$ )を求める。

#### 3.2.2 回転走行による $c_\omega$ の導出

(1.2)より  $J\dot{\omega} + c_\omega \omega = b(F_r - F_l)$  であり、トルクを  $T \equiv b(F_r - F_l)$  とし、 $T$  をステップ的に与えたとすると  $t \rightarrow \infty$  で、 $c_\omega$  は次式で表される。

$$c_\omega = \frac{T}{\omega_\infty} \quad (3.6)$$

また、慣性モーメントは、

$$J = \tau_\omega c_\omega \quad (3.7)$$

ただし、

$\omega_{\infty}$  : 回転走行の最終角速度,  $\tau_{\omega}$  : 回転走行の応答時定数

(3.6),(3.7)の係数を用い回転走行によるパラメータの導出をするために、本体を床に置きその場回転をさせ、以下の手順でパラメータを求める。

直進走行と同様の Duty 比の組み合わせで回転させる。

トルクと の Duty 比の関係を求める。

トルクは  $T = r(F_r + F_l)$  で与えられる。

回転走行の最終角速度と Duty 比の関係を求める。

最終角速度は  $\omega = \frac{1}{2r}(V_r + V_l)$  で与えられる。

トルクと最終角速度の関係から角速度抵抗( $c_{\omega}$ )を求める。

角速度の立ち上がりのグラフから、応答時定数  $\tau_{\omega}$  を求め、慣性モーメントを導出する。